—Area trapecio, en el que p designa el semiperímetro de un triángulo cuyos lados son los dos lados no paralelos c y d y la semidiferencia $a-b$ de las bases:

$$\frac{a+b}{a-b}\sqrt{p(p-a+b)(p-c)(p-d)}.$$

—La altura que corresponde al lado c en un triángulo cuyos otros dos lados son a y b es:

$$\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ;\ \text{ó bien}\ \frac{2S}{c}$$

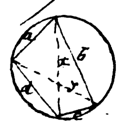
—Segun esto, si se designa por h', h'', h''' las tres alturas que respectivamente corresponden á los lados a, b, c, será $\frac{2S}{c}=h'$, $\frac{2S}{b}=h''$, $\frac{2S}{a}=h'''$ de donde se saca:

$$p=S\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''}\right),\quad p-a=S\left(\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''}-\frac{1}{h'}\right),$$
$$p-b=S\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h'''}-\frac{1}{h''}\right);\quad p-c=S\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h'''}\right);$$

y por consiguiente, el producto $p(p-a)(p-b)(p-c)$ que expresa el cuadrado de la superficie se convierte en $S^4\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''}\right)\left(\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''}-\frac{1}{h'}\right)\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h'''}-\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h'''}\right)$; de donde

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''}\right)\left(\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''}-\frac{1}{h'}\right)\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h'''}-\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h'''}\right)}}.$$

expresion del area de un triángulo, en funcion de sus tres alturas.



—En todo cuadrilátero inscrito

$ac=bd$; y tambien $\frac{x}{y}=\frac{ab+cd}{bc+ad}$

—El area S de un triángulo, siendo $2p$ el perímetro y r el radio del círculo inscrito es $S=2p.\frac{r}{2}$ de donde $r=\frac{S}{p}$, ó bien $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

—En todo triángulo en que a y b son dos lados, h la altura del tercero y R el radio del círculo circunscrito $ab=2R.h$; de donde $abc=2Rhc=4RS$; luego $R=\frac{abc}{4S}$; ó $R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$;

—Si convenimos en designar por $a_{(n)}$ el lado de un polígono regular de n lados, tendremos las fórmulas:

$a_{(3)} = r\sqrt{3}$; $a_{(4)} = r\sqrt{2}$; $a_{(6)} = r$; $a_{(10)} = r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $a_{(8)} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$;
$a_{(12)} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $a_{(15)} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)$

J. de Castro

CURSO

DE GEOMETRÍA

ELEMENTAL.

CURSO
DE
GEOMETRÍA
ELEMENTAL,

POR A. J. H. VINCENT,
PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EL COLEGIO REAL DE S. LUIS, ETC., ETC.

REVISADO POR EL AUTOR Y POR
M. BOURDON,
Inspector general de Estudios, etc.

Traducido de la 5.ª edicion francesa

POR
D. Lope Gisbert,
Catedrático de Matemáticas en el Instituto de Murcia.

Madrid y Santiago:
LIBRERÍAS DE D. ANGEL CALLEJA, EDITOR.
GRANADA: SRES. CALLEJA Y OJEA.
LIMA: SRES. CALLEJA, OJEA Y COMPAÑÍA.

MADRID: 1851.

IMPRENTA DE D. J. REPULLÉS.

CURSO DE GEOMETRIA ELEMENTAL.

INTRODUCCION.

Nociones generales sobre la línea recta, el plano y la circunferencia de círculo.

N.º 1. Todo cuerpo ocupa en el ESPACIO *indefinido* que abraza al universo material, un LUGAR ó SITIO *determinado* ó *finito* que se llama propiamente UN ESPACIO.

Este espacio finito, que el cuerpo llena, tiene ciertos *límites* que le distinguen del resto del espacio absoluto, constituyendo la SUPERFICIE de dicho cuerpo. Por consiguiente, siendo la superficie el lugar de separacion entre el cuerpo y el espacio restante, pertenece á entrambos igualmente; y como en el espacio indefinido, pueden existir innumerables cuerpos con sus límites propios y peculiares, resulta que

En el espacio pueden imaginarse innumerables superficies.

Cuando dos superficies se *encuentran* ó *cortan*, el lugar de su mutuo *encuentro* ó *interseccion* se llama LÍNEA; la cual evidentemente pertenece á un tiempo á entrambas superficies.— Como una línea proviene en general de la interseccion de dos superficies, y como una misma superficie puede ser encontrada por otras sin número enteramente diversas, resulta que

En una superficie cualquiera pueden imaginarse infinidad de líneas.

Finalmente, cuando dos líneas se encuentran ó cortan, el lugar de su interseccion ó encuentro se llama PUNTO; el cual es comun á entrambas; y como el punto resulta de la interseccion de dos líneas, pudiendo cada una de estas encontrarse con otras muchas sin número, en otros tantos lugares diferentes, resulta que

En toda línea pueden imaginarse infinidad de puntos (*).

N.° 2. Aunque se adquiere la nocion del punto por la consideracion de las líneas, la nocion de la línea por la consideracion de las superficies, y la nocion de las superficies por medio de los *cuerpos*, es decir, por medio de cosas *materiales*, no por eso se debe creer que son tambien objetos materiales, los puntos, las líneas y las superficies: pues nosotros en virtud de una facultad inherente á nuestra inteligencia, conseguimos facilmente representarnos el punto sin las líneas que le determinan, la línea fuera de las superficies, cuya interseccion constituye, la superficie independientemente del espacio ó cuerpo á que sirve de límite, y aun al mismo espacio nos le imaginamos como absolutamente inmaterial. Los resultados de estas diversas abstracciones son los que llamamos con toda propiedad, *punto*, *línea*, *superficie* y *espacio*; y los que significamos cuando decimos los *puntos de una línea*, *las líneas de una superficie*, *la superficie de un cuerpo*, *&c.*

N.° 3. Pueden considerarse el espacio, la superficie y la línea, bajo dos distintos aspectos; ó bajo el de sus diversas *formas* que se llaman generalmente FIGURAS; ó bajo el de sus *magnitudes* relativas que se llaman su ESTENSION.

La estension toma el nombre particular de VOLÚMEN, ÁREA, ó LONGITUD, cuando es la magnitud relativa de un *espacio*, de una *superficie*, ó de una *línea*. Asi, la *longitud* de una línea, ó la *estension lineal*, no es mas que su magnitud *valuada* ó *medida* en *unidades* de línea. Igualmente el *área* de una superficie, ó la *estension superficial*, es la magnitud de la superficie, valuada ó medida en unidades superficiales; finalmente, el *volúmen*, ó la *estension de un espacio* [ó de un cuerpo], es la magnitud del espacio propuesto, valuada ó medida en unidades de espacio (**).

(*) Algunos autores, siguiendo una marcha diametralmente opuesta á la que adoptamos nosotros, parten de la idea primitiva del *punto*, al cual definen por una negacion diciendo: *Punto es lo que no tiene partes* (*Euclides*, lib. 1.°, def. 1.ª); y despues consideran la línea como engendrada por el movimiento del punto, la superficie como producida por el movimiento de la línea, y el espacio como procedente del movimiento de la superficie.

(**) En la mayor parte de los Tratados de Geometría, al esplicar las tres clases de estension, se las distingue con los nombres de esten-

Las figuras toman diversos nombres, que daremos á conocer mas adelante.

La GEOMETRÍA es la ciencia que trata de las *propiedades* de las *figuras*, y de la *medida de la estension*, considerada bajo los diferentes aspectos que acabamos de indicar.

N.° 4. *El punto no tiene ni figura ni estension*;—lo cual le distingue de los demas objetos de la Geometría, que son todos *descriptibles* y *mensurables*.

Sin embargo, como muchas veces hay necesidad de considerar uno ó muchos puntos *aislados*, se ha convenido en designarlos por medio de una ligera *señal* hecha con lapiz ó pluma, ó con cualquier otro medio adecuado. Pero debe tenerse entendido que dicha señal no supone en el punto forma alguna, y que siempre debe considerarse como nula en estension.

Ademas, para distinguir unos de otros los diferentes puntos del espacio, se coloca al lado de la señal que los representa una letra, que sirve para nombrarle en el discurso: asi se dice: el *punto* A, *el punto* B, *el punto* C,... (fig. 1). Fig. 1.

De la línea recta.

N.° 5. De todas las líneas de que trata la Geometría, es la mas sencilla la LÍNEA RECTA.

Aunque la idea de la línea recta es una de las primeras á que nos conduce nuestra esperiencia y el uso de nuestros sentidos, no por eso es menos dificil de definir. Casi todos los autores se reducen á decir con Arquímedes, que—*La línea recta es el camino mas corto de un punto á otro*;—y para entender esta definicion, es necesario imaginar que un punto aislado (n.° 4.) y *materializado* por el pensamiento, se mueve hácia otro punto, siguiendo, para salvar el intervalo que los separa, el camino mas corto entre los innumerables que pueden llevar desde la posicion primitiva del primer punto á la posicion del segundo. El camino recorrido en esta forma por el punto móvil es lo que se llama *Línea recta*, ó simplemente *Recta*.

Generalizaremos mas la definicion, si decimos que línea rec-

---

sion con *solo una dimension* (la longitud); estension con *dos dimensiones* (longitud y latitud); estension con las *tres dimensiones* (longitud, latitud y altura ó profundidad ó grueso); pero hemos creido oportuno omitir aqui esas definiciones por la imposibilidad de esplicarlas rigorosamente en este momento.

Fig. 2. ta es la línea indefinida MNOP.... (fig. 2) que posee [con esclusion de toda otra línea] la propiedad de ser el camino mas corto entre dos cualesquiera de sus puntos, M y N, N y O, O y P,..., M y O, M y P, N y P,..., tomados á voluntad en su estension ilimitada.

Toda línea recta MN debe imaginarse *prolongada* indefinidamente en los dos sentidos MNO..., NML..., á no ser que en virtud de circunstancias particulares, se encuentre limitada por *uno* ó por *ambos* lados.

Cuando una recta termina en dos puntos M y N, decimos que está *determinada* de longitud; y cuando solo tiene un estremo determinado, encontrándose en la posicion de las INO,..., IML..., se denomina *segmento* de recta.

La traza indefinida, sea real, sea ideal, de una línea recta, se llama tambien su *direccion*; y debe admitirse que cada recta no tiene en particular mas que *una sola* direccion, lo cual significa, que una porcion de recta MN no puede tener mas que una sola *prolongacion* indefinida en los dos sentidos MNOP..., NML...

N.° 6. *Todas las líneas rectas son*, por su propia naturaleza, *superponibles*;—y para que la superposicion se verifique completamente, basta que *coincidan dos de sus puntos.* Esta propiedad que caracteriza á la línea recta, debe considerarse como evidente, y admitirse por lo tanto *à priori.*

De aqui resulta que—*Dos rectas coinciden en toda su estension indefinida*, cuando se las hace pasar por *dos puntos comunes.*

O en otras palabras,—*Dos puntos determinan la posicion de una recta*,—es decir, que—*Por dos puntos siempre se puede tirar una recta* [segun la definicion];—*y no se puede tirar mas que una sola.*

Por eso se acostumbra designar una recta por medio de *dos*
Fig. 2. *letras* M y N (fig. 2) que señalan dos de sus puntos.

Se infiere tambien de lo anterior que—*Dos rectas diferentes no pueden tener mas de un punto comun.*—En ese caso se llaman *concurrentes*, porque concurren en el mismo punto.

Finalmente, si en una recta MN, determinada de longitud (n.° 5.), se señala un punto I, tal que haciendo girar la parte IN al rededor de él, pueda venir el punto N á caer sobre el punto M, las dos partes IN, IM, que resultan *superponibles*, se llaman *iguales entre sí*, y el punto I, *punto medio* de la recta MN.

Del plano.

N.º 7. La mas sencilla de todas las superficies es la SUPERFICIE PLANA, ó el PLANO; que es una superficie indefinida, á la cual se imagina que puede aplicarse por todos sus puntos y en todas direcciones, una línea recta (*); cuya propiedad nos suministra un medio muy facil de examinar si es plana una superficie.

De la definicion de la línea recta y de la del plano se infiere necesariamente, que

Una recta se confunde enteramente con un plano en teniendo con él dos puntos comunes.

Porque estos dos puntos determinan una de las direcciones en que la recta puede colocarse sobre la superficie.

Asi—*Una recta no puede estar parte en un plano y parte fuera de él.*

Sin embargo, se concibe que puede tener un solo punto comun con el plano; en cuyo caso, se dice que la recta *atraviesa* al plano, y que el plano *corta* á la recta. Es visto que entonces los dos segmentos de la recta (n.º 5.) estan colocados respectivamente á una y otra parte del plano.

N.º 8. Asi como una recta queda determinada de posicion por medio de dos puntos (n.º 6.), asi tambien

La posicion de un plano se determina en fijando tres de sus puntos, con tal que *no se hallen estos en una misma línea recta*; lo cual significa,

1.º que *Se puede siempre hacer pasar un plano por tres puntos, no situados en línea recta*; —y 2.º— que *nada mas se puede hacer pasar uno solo.*

Asi — *Dos planos que coinciden en tres puntos no situados en línea recta, coinciden en todas su estension indefinida.*

Esta propiedad del plano hace, respecto de él, el mismo papel que la propiedad del n.º 6. respecto de la línea recta. Debe por lo tanto admitirse tambien como evidente (**).

De donde necesariamente se sigue que

La interseccion comun de dos planos es una línea recta.

(*) Un cristal bien pulimentado, una hoja de papel bien terso, pueden dar idea de la superficie plana.

(**) Volveremos á hablar de esta proposicion en el lib. 3.º, capítulo de los planos.

N.° 9. En fin, los planos, lo mismo que las rectas, son siempre *superponibles*; bastando para confundirlos, hacer que *tres puntos* del uno, no situados en línea recta, coincidan respectivamente con tres análogos del otro.

N.° 10. *Dos rectas que se cortan*, *determinan* tambien *un*
Fig. 3. *plano*: asi las AB, AC (fig. 3);

Porque si hacemos pasar un plano por su punto de encuentro A, y por dos puntos cualesquiera C y B, tomados respectivamente en cada una de ellas, contendrá dicho plano á las dos rectas (n.° 7.); y ademas, será el único que las pueda contener (n.° 8.): — por cuya razon se llama el *plano de las dos rectas.*

Es útil ademas observar, que en este caso, el sistema [ó conjunto] de las dos rectas divide la estension de su plano en cuatro distintas porciones, BAC, CAD, DAE, EAB, que toman el nombre de ÁNGULOS. La consideracion de esta especie de magnitudes, que á cada paso se presentan en la Geometría, es de la mayor importancia.

N.° 11. Se llama *figura plana* una figura que tiene todos sus puntos en *un mismo plano.* — La línea recta es esencialmente *plana* (n.° 7.); y divide al plano en que se encuentra en dos porciones *superponibles* que llamaremos *regiones del plano* respecto de la recta.

De las líneas y de las superficies, quebradas y curvas.

N.° 12. Se llama LÍNEA QUEBRADA la *compuesta*, como
Fig. 4. ABCDEF (fig. 4) *de rectas consecutivas*, AB, BC, CD, DE,..., *determinadas de longitud*, *y unidas de dos en dos por uno de sus estremos.* — Las partes de rectas, limitadas en los puntos de encuentro B, C, D, E,..., se llaman *lados* de la figura.

Toda *línea quebrada que no sea plana* (n.° 11.) se llama *Línea* GAUCHA (*) ó ALABEADA.

En general se llama LÍNEA CURVA, ó simplemente CURVA, toda *línea que ninguna porcion apreciable tiene rigorosamen-*
Fig. 5. *te recta.* — Tales son las lineas ABC, ABCDE,... (fig. 5).

LÍNEA MISTA es una *línea quebrada que se compone de rectas y curvas.*

(*) Adoptado este adjetivo por la Escuela de Ingenieros de esta Corte, y usado ya por autores españoles originales, no dudamos emplearlo á pesar de ser tan evidente galicismo: las ciencias al pasar de unas naciones á otras llevan necesariamente su tecnicismo, de uno á otro idioma. — *Nota del Traductor.*

Se llama SUPERFICIE QUEBRADA toda *superficie compuesta de planos consecutivos que tienen de dos en dos comun una interseccion*—la cual es necesariamente una recta como hemos visto en el n.° 8.

SUPERFICIE CURVA es la *superficie que ninguna porcion apreciable tiene rigorosamente plana.*

Finalmente, se llama SUPERFICIE MISTA *la superficie en parte plana y en parte curva.*

Del círculo.

N.° 13. La mas sencilla é importante de todas las líneas curvas es la LÍNEA CIRCULAR ó CIRCUNFERENCIA DE CÍRCULO.—Asi se llama una *línea plana* ABCD (*fig.* 6), *cerrada* [ó *reentrante en sí misma*], *que tiene todos sus puntos á igual distancia de uno interior* O, que se llama CENTRO.—CÍRCULO es la *porcion de plano limitada por la circunferencia*; pero algunas veces por abreviar se da ese nombre á la misma *circunferencia.* Fig. 6.

Cada una de las rectas OA, OB, OC, OD,..., tiradas desde el centro á la circunferencia, se llama RADIO del círculo.

Todos los radios de un mismo círculo son iguales, con arreglo á su definicion.

Se llama DIÁMETRO de un círculo, la *recta*, *que*, como AC, *pasando por el centro*, *termina con ambos estremos en la circunferencia.*

Todos los diámetros de un mismo círculo son iguales,—porque cada uno se compone de la suma de dos radios OA, OC.

Ademas,—*Todo diámetro* AC *divide al círculo* y *á su circunferencia en dos partes iguales.*

En efecto, doblemos la figura por la línea AC, ó hagamos girar la parte ABC *al rededor* de AC, de modo que venga á aplicarse sobre la otra parte ADC. Es evidente que se *confundirán* exactamente las dos porciones de circunferencia; porque si una de ellas quedara por fuera ó por dentro de la otra, no estarian todos los puntos igualmente distantes del centro, lo cual implica contradiccion con la definicion de la circunferencia. Asi, el diámetro AC divide al círculo en dos *semi-círculos*, y á la circunferencia en dos *semi-circunferencias.*

N.° 14. Una *porcion* cualquiera, ACB ó ADB (*fig.* 7), *de circunferencia*, se llama ARCO *de círculo*; el arco toma el nombre de CUADRANTE cuando es la *cuarta parte* de la circunferencia. Fig. 7.

La parte de recta AB comprendida entre los dos puntos, A y B, de la circunferencia, se llama CUERDA y se puede considerar como *subtendente* del arco ACB ó del arco ADB; es decir, que cada cuerda *subtende* dos arcos cuya suma equivale á la circunferencia entera.

Cuando la cuerda pasa por el centro, se convierte en diámetro; y los dos arcos subtendidos son *semi-circunferencias.*

Sea C un punto colocado en el arco ACB, de modo que si se tira el diámetro COD, y se aplica la semi-circunferencia CBD sobre la semi-circunferencia CAD, el punto B caiga sobre el punto A: los dos arcos deben *confundirse* exactamente, y se llaman por lo tanto *iguales entre sí.* El punto C se llama el *punto medio del arco* AB. Igualmente, siendo los arcos AD y BD iguales entre sí, será D el *punto medio* del arco ADB. Ademas, como, despues de la superposicion de los dos semi-círculos, queda comun el punto I, y los puntos A y B coinciden, resulta que IA es igual á IB, es decir, que el punto I es el punto medio de la cuerda AB.

Cada una de las partes IC, ID, del diámetro CD, comprendidas respectivamente entre los puntos medios C y D de los arcos ACB, ADB, y el punto medio I de su cuerda comun AB, se llama *sagita* del arco correspondiente.

En fin, se llama SEGMENTO DE CÍRCULO *la parte de círculo comprendida entre un arco* ACB ó ADB, *y su cuerda* AB; y SECTOR CIRCULAR la *parte de círculo comprendida entre un arco* ACB ó ADB, *y los dos radios* OA, OB, *tirados á sus estremos.*

De la regla y el compas.

N.° 15. La línea *recta* y el *círculo*, que son las únicas líneas de que trata la *Geometría elemental*, se trazan respectivamente en un plano por medio de la REGLA y del COMPAS (*).

Fig. 8. Para trazar una recta que pase por dos puntos A y B (*fig.* 8), dados en un plano, sirve una *regla*, cuyos bordes salientes sean perfectamente *rectilíneos* [hay medios mecánicos de satisfacer esta condicion con bastante precision]. Colocando la regla sobre el plano, de modo que uno de sus bordes pase por los dos pun-

(*) Se emplean tambien en Geometría práctica otros instrumentos, como la *escuadra*, el *compas de proporcion*, el *semi-círculo graduado*, etc., cuya descripcion reservamos para el fin de esta obra.

tos A y B, se pasa á lo largo de ella un *lapiz*, una *pluma*, ú otra cosa análoga, y su rasgo va trazando la recta.

El *compas* es un instrumento (*fig.* 9) compuesto de dos piernas [por lo comun iguales], terminadas en *punta* por uno de sus estremos, y unidas en el otro estremo [llamado *cabeza del compas.*] por una articulacion que permite *abrir* y *cerrar* las piernas á voluntad. Una de las puntas sirve para marcar el centro que se quiere describir, y la otra lleva un lapiz ó pluma, que sirve para trazar la circunferencia. Fig. 9.

Cuando por medio del compas se quiere *describir* sobre un plano dado una circunferencia cuyo centro sea un punto A del mismo plano, y cuyo radio tenga una longitud determinada, se empieza por dar al instrumento una abertura igual al radio dado AB, es decir, que una de sus puntas pueda colocarse en A y la otra en B al mismo tiempo: despues se coloca la punta *fija* sobre el punto que debe servir de centro, y se hace mover la punta *armada* de lapiz, por el plano. Esta punta es la que va trazando al rededor del punto A, la circunferencia pedida; y esto es lo que se llama

Describir una circunferencia desde el punto A *como centro y con un radio igual á* AB.

N.° 16. *Dos circunferencias descritas desde puntos distintos como centros, pero con el mismo radio, son iguales y superponibles;*—porque si se transporta el segundo círculo sobre el primero de modo que coincidan sus centros y sus planos, las dos circunferencias coincidirán en toda su estension; sin lo cual los radios de la una no serian todos iguales á los de la otra.

De las diversas clases de proposiciones y cuestiones.

N.° 17. Se distinguen muchas clases de proposiciones y de cuestiones, á las cuales se dan por convencion diferentes denominaciones:

1.° El AXIOMA es una *proposicion evidente por sí misma*, cuya verdad se conoce con solo oirla enunciar. — Tales son las siguientes:

— *El todo es mayor que cada una de sus partes*; ó bien
— *La parte es menor que el todo*;
— *Dos cantidades iguales á una tercera, son iguales entre sí.*
— *Dos cantidades iguales, aumentadas ó disminuidas en una misma cantidad, dan resultados iguales*, — &c.

2.° La *demanda* ó POSTULADO es una *proposicion cuya* *verdad se admite sin demostracion*, aunque no tenga el grado de evidencia del axioma.

3.° El TEOREMA es una *proposicion cuya verdad necesita demostrarse*; lo cual se hace por medio de un raciocinio llamado *demostracion*, que se apoya en verdades de antemano conocidas.

En el enunciado de un teorema se distinguen ordinariamente dos partes principales: la una, llamada *hipótesis* ó *supuesto*, es una suposicion hecha sobre un *sugeto* (*); y la otra, llamada *conclusion*, es la consecuencia del supuesto hecho.

4.° La RECÍPROCA de un teorema [ó de cualquiera otra proposicion] es otra proposicion que resulta tomando *al reves* la primera, de modo que sin variar el *sugeto* se toma la hipótesis por conclusion y esta por aquella.

A veces una misma proposicion admite varias recíprocas; lo cual sucede siempre que la hipótesis es *compleja*, es decir, siempre que puede descomponerse en varias proposiciones parciales é independientes unas de otras.

Hay tambien proposiciones cuyas recíprocas son *falsas*: de aqui nace la necesidad de demostrar las proposiciones *inversas* siempre que, siendo ciertas, no se deducen evidentemente de las *directas*; ó la *obligacion* de manifestar su absurdo cuando son falsas.

En fin, hay proposiciones que no son susceptibles de inversion, es decir, que sin enunciados tomados *al reves* no ofrecen sentido alguno razonable.

5.° El COROLARIO es la *consecuencia inmediata de una proposicion.*

Por esta definicion puede comprenderse que no hay una diferencia bien esencial entre un corolario y un teorema. En efecto, por una parte, casi todos los teoremas son consecuencias de los que preceden mas ó menos inmediatamente; y por otra, los corolarios suelen ser tan importantes como los teoremas en que se apoyan. Sin embargo, la denominacion de *corolario*, dada á una proposicion, casi siempre supone que, si bien se necesita un nuevo raciocinio para establecer su verdad, es este bastante sencillo y obvio para poder suprimirse sin graves inconvenientes.

6.° El PROBLEMA es una cuestion que tiene por objeto *determinar ciertas cosas desconocidas*, por medio de una ó mas

---

(*) Es sabida la significacion lógica de esta palabra.

cosas *conocidas ó dadas*, que tienen con las primeras ciertas relaciones indicadas en el enunciado.

Hay dos clases de problemas; los *problemas gráficos* ó relativos á las *figuras*, y los *problemas numéricos* ó relativos á la *estension* (n.º 3.)

7.º Algunas veces la esposicion de una *teoría* ó la resolucion de una serie de problemas exige una *proposicion preliminar*, que les sirve de *preparacion* ó de *base*: semejante proposicion recibe el nombre de LEMA.

8.º En fin, el ESCOLIO es una *observacion* hecha sobre una ó mas proposiciones precedentes, cuyo objeto especial es manifestar la *estension* que pueden tener, las *restricciones* que pueden sufrir, su mutua *conexion*, su *utilidad*, &c.

Muchas veces el escolio da ocasion á establecer nuevas *definiciones*, á demostrar nuevos teoremas y á resolver nuevos problemas.

Métodos de demostracion.

N.º 18. De los diferentes medios de demostracion propios de la Geometría, el mas fecundo y el mas sencillo á la vez cuando se puede emplear es el de la *superposicion* de las figuras. Consiste en probar que pueden hacerse *coincidir* exactamente dos figuras por la aplicacion de la una sobre la otra, lo cual conduce á reconocer la *igualdad* de todas sus partes *respectivamente*, es decir, la de cada parte con su análoga.

Hay *dos modos de superposicion* que debemos distinguir; para lo cual debemos observar que toda figura, trazada primero sobre un plano y desprendida luego de él por la imaginacion, tiene dos caras, que pueden llamarse en términos vulgares, el *derecho* y el *reves* de la figura. Ahora bien, las dos caras, que en la superposicion se aplican una contra otra, pueden ser, ó ambas del *mismo nombre*, ó cada una de *nombre distinto*.

Esto supuesto, se llama la superposicion *directa* siempre que al hacerla se aplican una contra otra, caras de *nombre distinto*; y se llama *inversa* siempre que se hacen coincidir dos caras del *mismo nombre*.

Un ejemplo del primer caso puede verse en la demostracion dada en el n.º 16., y un ejemplo del segundo en la demostracion que termina el n.º 13.

N.º 19. La superposicion *directa* de una figura plana sobre otra trazada en el mismo plano, puede siempre efectuarse por medio de *dos movimientos* sucesivos, uno de TRASLACION, y otro de **ROTACION**, al rededor de un punto dado que recibe el nombre de *Centro de rotacion.*—Algunas veces basta con uno de los dos.—Para la superposicion *inversa* se necesita ademas un tercer movimiento, que consiste en hacer *girar* la figura en torno de una *recta* situada en el plano y considerada como *charnela*, que recibe el nombre de *eje de* **REBATIMIENTO** ó de **REVOLUCION.**

En adelante tendremos continuamente ocasiones de aclarar con ejemplos el principio de la igualdad de las figuras por superposicion.

N.º 20. Hay otro medio de demostracion mas general que el precedente en el sentido de que sus aplicaciones no se reducen á la Geometría, sino que se estienden á todas las ciencias de raciocinio. Este método, llamado de **REDUCCION AL ABSURDO**, consiste en suponer primero que no *sea verdadera* la proposicion que se trata de demostrar, haciendo luego, por medio de deducciones sacadas de verdades reconocidas y rigorosamente probadas, que resalte una contradiccion manifiesta con alguna de ellas ó con el mismo supuesto.

Esta forma de razonamientos, aunque muy rigorosa, tiene sin embargo cierta cosa de *indirecta*, por lo cual se debe usar con reserva, y solo cuando ya, por algunas consideraciones antecedentes, se haya adquirido cierto presentimiento de la verdad que se trata de probar, como sucede en las proposiciones llamadas *recíprocas ó inversas* (n.º 17., 4.º).

Para dar un ejemplo de esta clase de demostracion, elegirêmos una proposicion descomponible en otras tres, cada una de las cuales dé lugar á su correspondiente recíproca; con esto haremos ver de qué modo puede usarse la *reduccion al absurdo* para la demostracion de estas últimas:

Dado un círculo trazado en un plano,

1.º *Todo punto* [sujeto] *situado en la superficie* [hipótesis], *está del centro á una distancia igual al radio* [conclusion];

2.º *Todo punto situado dentro del círculo, está del centro á una distancia menor que el radio*;

3.º *Todo punto situado fuera del círculo, está á una distancia del centro mayor que el radio.*

La primera de estas proposiciones está comprendida en la definicion misma del círculo; y las otras dos son consecuencias evidentes suyas.

Sus recíprocas son:

Hallándose un círculo trazado en un plano,

1.º *Todo punto* [el sujeto es el mismo] *cuya distancia al* *centro es igual al radio* [hipótesis], *está situado en la circunferencia* [conclusion];

2.° *Todo punto cuya distancia al centro es menor que el radio, está situado dentro del círculo;*

3.° *Todo punto cuya distancia al centro es mayor que el radio, está situado fuera del círculo.*

Estas tres recíprocas resultan necesariamente de la existencia de las tres proposiciones directas que suponemos admitida. Por ejemplo, si el punto dado está á una distancia del centro, menor que el radio, no puede menos de estar situado dentro del círculo; porque, para que estuviera situado en la circunferencia ó fuera del círculo, sería necesario en virtud de la primera y tercera de las proposiciones directas, que su distancia al centro fuera igual ó mayor que el radio; lo cual, tanto en uno como en otro caso, envuelve contradiccion con la hipótesis, y es por consiguiente *un absurdo.*

N.° 21. Desde luego podemos convertir en regla general la forma de demostracion que acabamos de usar, sentando en consecuencia el principio siguiente, que es importantísimo:

Siempre que, en una proposicion ó en una serie de proposiciones, se han hecho todas las HIPÓTESIS *admisibles sobre un* SUGETO *determinado, y todas han conducido á* CONCLUSIONES *respectivas esencialmente distintas, y tales que cada una de ellas escluye á todas las otras, puede asegurarse que las* RECÍPROCAS *de las proposiciones establecidas son* VERDADERAS *todas.*

Asi pues, volviendo á las tres primeras proposiciones del número precedente, como desde luego se descubre, —1.°— que el punto, tomado por *sugeto,* no puede tener mas que *tres* posiciones esencialmente distintas en el círculo; —2.°— que para cada una de ellas hay una conclusion particular relativa á su distancia al centro; — y 3.°— que cualquiera de las tres conclusiones escluye completamente á las otras dos; es evidente la necesidad de admitir la verdad de las recíprocas correspondientes.

Encargamos á los discípulos que se penetren bien de este principio, porque es aplicable á la mayor parte de las proposiciones inversas.

N.° 22. Terminaremos estas indicaciones sobre las especies que hay de demostracion, señalando dos clases de *raciocinios falsos,* muy comunes entre los principiantes, y de que deben guardarse con gran cuidado: llámanse en términos lógicos CÍRCULO VICIOSO y PETICION DE PRINCIPIO.

El *círculo vicioso* es un raciocinio en el cual, para demostrar una proposicion, nos apoyamos, ya implícita, ya esplícitamente, en otra que, en virtud de la marcha seguida, no puede demostrarse sino por medio de la primera.

La *peticion de principio* es un raciocinio en el cual para demostrar una proposicion nos apoyamos en ella misma. — Por consiguiente es una especie de círculo vicioso.

Para evitar estas groseras violaciones de los primeros principios de la lógica, no hay cosa mas útil que repasar á menudo, y aun procurar saber de memoria la *tabla de materias, ó índice*, puesto al frente de esta obra, á fin de tener siempre presente el *orden* de las diversas proposiciones y el *enlace* de las diversas partes de una misma proposicion; pues olvidando ó el orden ó el enlace, es como nos esponemos á cometer en el primer caso círculos viciosos, y en el segundo peticiones de principio.

Division general de esta obra.

N.º 23. Siendo las figuras planas las que mas facilmente se representa el espíritu, y reduciéndose ademas las propiedades de todas las figuras á las de las figuras planas, han convenido todos los autores en dividir la Geometría en *dos* PARTES *principales*:

1.ª La GEOMETRÍA PLANA, que tiene por objeto el estudio de las *propiedades* de las *figuras planas* (n.º 11.), y la medida de las *dos* clases de estension que presentan (n.º 3.);

2.ª La GEOMETRÍA EN EL ESPACIO, que comprende las *propiedades* de las *figuras* cuyos *puntos no estan todos en un mismo plano*, y la medicion de las *diversas* clases de *estension* que tienen.

Cada una de estas partes principales se subdivide luego en esta obra en otras *dos secundarias* ó LIBROS, segun se estudian las *figuras en sí mismas*, ó bajo el punto de vista de las *relaciones numéricas* á que dan lugar las porciones de líneas, superficies, &c., de que constan.—Cada libro se divide en tres *capítulos*, de modo que en resúmen la obra tiene *doce* capítulos repartidos entre *cuatro* libros.

Cada capítulo á su vez tiene varios *párrafos*, y cada párrafo, *uno ó mas* grupos de *proposiciones* ó de *cuestiones*.

El *primer libro* trata de las propiedades de la línea recta y del *círculo*, haciendo abstraccion de su estension y de toda *relacion numérica*, fuera de las relativas á la igualdad de las figuras; el *segundo* contiene la esplicacion de las propiedades de las figuras planas, que dependen mas particularmente del *cálculo numérico*.

El *primer capítulo* del *libro primero* comprende las propiedades de las **FIGURAS RECTILÍNEAS**; el *segundo capítulo*, las del **CÍRCULO** y las de las figuras que de él dependen; y el *tercer capítulo*, bajo el título de **PROBLEMAS**, contiene las *aplicaciones* de las teorías esplicadas en los dos primeros.

El *primer capítulo* del *libro segundo* trata de las **LÍNEAS PROPORCIONALES**, de las **FIGURAS SEMEJANTES** y de la determinacion de las **ÁREAS** de las *figuras rectilíneas*; el *segundo capítulo* de las *líneas proporcionales* consideradas en el **CÍRCULO**, y de la determinacion de las **ÁREAS** de los **POLÍGONOS REGULARES** y del **CÍRCULO**; en fin, el *tercer capítulo* contiene **PROBLEMAS** ó *aplicaciones* de las teorías espuestas en los otros dos.

Sigue á estos dos libros un **APÉNDICE** comprensivo de varias teorías que, sin constituir parte esencial de los *Elementos* propiamente dichos, son sin embargo muy importantes: contiene tambien algunas consideraciones generales sobre las *curvas*, y la esposicion de las propiedades elementales de las curvas mas sencillas é importantes despues del círculo.

En los otros dos libros hemos seguido un orden enteramente análogo.

Asi, los *dos primeros capítulos* del *tercer libro* tratan de las propiedades del **PLANO** y de la **LÍNEA RECTA** considerados en el **ESPACIO**, y luego de algunas de las **SUPERFICIES** mas sencillas despues de la plana, como tambien de los **CUERPOS** terminados por ellas, haciendo sin embargo abstraccion de toda especie de estension. El *tercer capítulo* se compone de **PROBLEMAS** de Geometría en el espacio, resueltos *gráficamente.*

Los *dos primeros capítulos* del *libro cuarto* contienen las teorías de la **SEMEJANZA** de las figuras terminadas por superficies planas y por otras superficies, como tambien la determinacion de sus **ÁREAS** y sus **VOLÚMENES**. El *tercer capítulo* ofrece *aplicaciones* de esas teorías, principalmente bajo el punto de vista *numérico.*

Finalmente, sigue á estos dos últimos libros un **APÉNDICE**, que contiene consideraciones generales sobre ciertas *superficies*; con lo cual se da fin á la obra.

(Puede consultarse para mas pormenores la *tabla ó índice general*, cuya importancia queda indicada en el n.º 22.).

PARTE PRIMERA.

GEOMETRÍA PLANA.

Advertencia. En esta parte primera todas las figuras se suponen existir en un solo y mismo plano.

LIBRO PRIMERO.

DE LAS FIGURAS CONSIDERADAS EN UN PLANO.

PRELIMINARES.

NUEVAS DEFINICIONES NECESARIAS PARA LA INTELIGENCIA DE ESTE PRIMER LIBRO. — CONSECUENCIAS QUE INMEDIATAMENTE SE DEDUCEN DE ELLAS.

De los ángulos en general.

N.º 24. Llámase (n.º 10.) ÁNGULO cada *porcion indefinida de plano comprendida entre dos rectas*, BD, CE (*fig.* 3), Fig. 3.
que se cortan en un punto A; cuyo punto se llama entonces *vértice* de cada uno de los cuatro ángulos BAC, BAE, DAE, DAC, que resultan de la *interseccion*.

Un ángulo se designa ordinariamente por tres letras, y siempre se cuida de poner en *medio* la del *vértice*; pero cuando el ángulo está aislado (*fig.* 10), puede designarse indiferente- Fig. 10.
mente por medio de las tres letras ó solo por la del vértice: asi se dice igualmente *el ángulo* BAC, ó solo *el ángulo* A.

En la *figura* 3, los ángulos BAC, DAE, cada uno de los cuales está formado por la prolongacion de los lados del otro, se llaman ÁNGULOS OPUESTOS *al vértice*; tambien lo son los ángulos BAE, DAC. Por el contrario, dos ángulos BAC, BAE, que tienen un lado comun AB, siendo los otros dos lados, AC, AE, *mutua* prolongacion el uno del otro, se llaman ÁNGULOS ADYACENTES: tales son tambien los ángulos BAE y EAD, EAD y DAC, DAC y CAB, asi tomados de dos en dos.

Del ángulo en el centro.

N.º 25. Siendo los ángulos, en virtud de su definicion, esencialmente *indefinidos*, se puede al pronto encontrar alguna dificultad en formarse idea clara de esta especie de magnitud; pero es facil referir la consideracion de los ángulos á la de otras magnitudes *finitas* por su naturaleza, y por consiguiente mas fáciles de comprenderse con claridad.

Fig. 11. Para esto, sean los dos ángulos AOB, A′O′B′ (*fig.* 11). Concibamos que desde sus vértices O, O′, como centros, y con un mismo radio, se hayan descrito (n.º 15.) dos arcos de círculo, AB, A′B′: cada uno de los ángulos se llama entonces ÁNGULO EN EL CENTRO.—Esto supuesto,

Es claro desde luego, que cuando los *ángulos* en el centro, AOB, A′O′B′, son *iguales*, deben tambien ser *iguales* los *arcos* interceptados, AB, A′B′; porque si empleando la superposicion *directa* (n.º 18.), se aplica el radio O′A′ sobre su igual OA, siendo por hipótesis el ángulo A′O′B′ igual al ángulo AOB, el lado O′B′ deberá caer sobre el lado OB; y, como O′B′=OB, el punto B′ caerá sobre el punto B: asi los dos arcos A′B′, AB, que se confunden en sus estremos, deberán confundirse en su totalidad, y serán iguales (n.º 14.).

No es menos facil probar (siempre por la superposicion) que cuando un ángulo AOB es mayor que otro A′O′C′, el arco AB, correspondiente al primero, es mayor que el arco A′C′, correspondiente al segundo; porque, hecha la superposicion de los radios iguales O′A′ y OA, el lado O′C′ deberia tomar una posicion OC interior á BOA, y el punto C′ caeria en C sobre AB; lo cual da AC ó A′C′ menor que AB.

De esto, en virtud del principio sentado en el n.º 21, se deduce que *recíprocamente*, si los arcos, AB, A′B′, son iguales, lo son tambien los ángulos en el centro, AOB, A′O′B′; y si el arco AB es mayor que el arco A′C′, el ángulo en el centro AOB es mayor que el ángulo en el centro A′O′C′.

Siendo aplicables evidentemente estos raciocinios al caso de tener los ángulos considerados el vértice comun, y situado por consiguiente en el *centro* de una misma circunferencia, podremos con razon concluir de todo lo dicho,

1.º que —*En un mismo círculo* ó *en círculos iguales*, *á ángulos en el centro iguales entre sí corresponden arcos iguales*; — y recíprocamente, 2.° que — *A mayor ángulo en el centro corresponde mayor arco*; — y recíprocamente.

Volveremos mas adelante á repetir estas proposiciones para generalizarlas: por ahora basta con lo dicho para la buena inteligencia de lo subsiguiente.

Del ángulo recto y de la perpendicular.

N.° 26. Cuando una *recta* AB (*fig.* 12) se encuentra con otra recta CD que forma con ella dos *ángulos adyacentes*, AOC, BOC, *iguales* entre sí, cada uno de estos ángulos se llama **ÁNGULO RECTO**; y la recta OC ó CD se llama **PERPENDICULAR** á la primera AB. El punto O en que se encuentran ambas rectas, se llama *pie* de la perpendicular. Fig. 12.

Es facil probar por medio de las proposiciones del n.° 25, que

Si una recta CD *es perpendicular á otra recta* AB, *esta es* recíprocamente *perpendicular á aquella.*

En efecto, supongamos que desde el punto O como centro, y con un radio arbitrario OE, se describe una circunferencia: como cada una de las rectas GE, FH, es un diámetro (n.° 13.), resulta que GFE y GHE, FEH y FGH, son *semicircunferencias.* Ahora bien, por hipótesis, los ángulos AOC, COB, son iguales; luego (n.° 25.) los arcos GF, FE, son iguales entre sí, y valen cada cual un *cuadrante* (n.° 14.). Pero puesto que FEH es una semi-circunferencia, y que FE vale un cuadrante, el arco EH deberá tambien valer otro cuadrante, y por consiguiente tendremos FE = EH; de donde deducimos FOE ó COB igual á EOH ó BOD.

Del mismo modo se probaria que los ángulos BOD y DOA, DOA y AOC, son iguales. Luego finalmente AB es perpendicular á CD, lo mismo que CD lo es á AB.

Esto demuestra al mismo tiempo que los cuatro ángulos rectos formados al rededor del punto O, son iguales entre sí.

Ademas, si se consideran otras dos rectas A′B′, C′D′ (*fig.* 13), perpendiculares entre sí, y se supone que desde el punto O′ como centro, con un radio O′E′ = OE, se trace una circunferencia de círculos, los *cuatro* cuadrantes formados en O′ son necesariamente iguales á los *cuatro* cuadrantes formados en O; luego los cuatro ángulos en O son iguales á los cuatro ángulos en O′. Asi pues, Fig. 13.

Todos los ángulos rectos son iguales.

N.° 27. Tambien es facil demostrar desde ahora que,

1.° *Por un punto tomado en una recta, solo se puede* **LEVANTAR** *á esta una perpendicular.*

2.° *Por un punto tomado fuera de una recta, solo se le puede* **BAJAR** *una perpendicular.*

La primer proposicion aparece evidentemente con solo mirar la figura 12; porque sean, si es posible, las dos rectas OC, OL, perpendiculares á la recta AB, en un mismo punto O; puesto que AOC, COB, son ángulos rectos, los arcos GF, FE, son *cuadrantes.* Por la misma razon son tambien cuadrantes los arcos GI, IE. Por consiguiente los dos puntos I y F serian á la vez el punto medio de la semi-circunferencia GIFE, lo cual es un *absurdo.*

Fig. 14. Supongamos en segundo lugar, que CE, CF (*fig.* 14), son dos perpendiculares bajadas desde un mismo punto C sobre la línea AB. Hagamos girar la figura CEF al rededor de AB como charnela, de modo que recaïga en C′EF sobre su plano primitivo y al otro lado de AB. Esto supuesto, las dos porciones de recta EC, EC′, deben ser prolongacion una de otra, puesto que son perpendiculares á AB, y que segun se acaba de ver en un punto B de AB solo puede levantarse una perpendicular á esta recta. Por la misma razon, FC, FC′, deben formar parte de una recta sola. De donde resultaria, que por dos puntos dados, C, C′, podrian pasar dos rectas diferentes, lo cual es un *absurdo* (n.° 6.).

N.° 28. Llámase **ÁNGULO AGUDO** todo ángulo menor que un ángulo recto, y **ÁNGULO OBTUSO** todo ángulo mayor que Fig. 12. un recto. Asi, en la *fig.* 12, el ángulo AOL es agudo, y el ángulo LOB obtuso.

Dos ángulos, uno *agudo* y otro *obtuso*, cuya suma vale *dos* ángulos *rectos*, se llaman *suplementarios*; y dos ángulos cuya suma vale *un solo* ángulo *recto*, se llaman *complementarios.* De esto resulta que el ángulo recto se tiene á sí propio por *suplemento*, y que tiene á *cero* por *complemento.*

Puede tambien decirse (tercer axioma enunciado en el *número* 17.) que

Dos ángulos que sirven de suplemento ó de complemento á un tercero, son iguales entre sí.

Propiedades de los ángulos adyacentes y de los ángulos opuestos.

N.° 29. Daremos fin á las consideraciones preliminares sobre los ángulos, con algunas proposiciones de frecuentísimo uso, inmediatamente dimanadas de los principios precedentes.

1°. *Cuando una recta* OC (*fig.* 15) *cae sobre otra* AB, *formando con ella dos ángulos adyacentes desiguales*, AOC, COB [en cuyo caso la OC se llama OBLICUA], *dichos ángulos son el uno suplemento del otro.* Fig. 15.

Porque si, en el punto O, levantamos la perpendicular OD, la suma de los ángulos AOC, COB, equivaldrá á la suma de los dos ángulos rectos AOD, DOB.

Observemos, al paso, que de dichos dos ángulos, el uno, AOC, es *obtuso*, y escede en DOC al ángulo recto; el otro, COB, es *agudo*, y tiene por *complemento* (n.° 28.) al mismo ángulo DOC.

2.° *Los ángulos opuestos al vértice*, BAC, DAE (*fig.* 3), ó DAC, BAE, *son iguales entre sí.* Fig. 3.

En efecto, los dos ángulos BAC, DAE, por ejemplo, son á la vez, en virtud de lo acabado de decir, *suplementos* del mismo ángulo BAE.

N.° 30. Estas dos proposiciones tienen tambien sus recíprocas, que no son menos importantes.

1.° *Cuando dos ángulos consecutivos*, AOC, COB (*fig.* 15), *son suplementarios*, *los lados estremos*, OA, OB, *son mutua prolongacion uno de otro en línea recta*;—*y los ángulos son adyacentes* (n.° 24.). Fig. 15.

Porque si OB no fuere prolongacion de OA en línea recta, podrá serlo OE; entonces, en virtud de la proposicion directa, COE sería suplemento de AOC; pero COB es, por el supuesto, suplemento de AOC; luego (n.° 28.) deberia ser COE = COB, *ó la parte igual al todo*, lo cual es un *absurdo*.

2.° *Si dos ángulos iguales*, BAC, DAE (*fig.* 3), *situados cada cual á un lado de la recta* BD, *tienen dos de sus lados*, AB, AD, *colocados sobre esta misma recta, y dirigidos en sentido contrario partiendo de un vértice comun* A, *los otros dos lados estan tambien en línea recta*; — *y los ángulos son opuestos al vértice* (n.° 24.). Fig. 3.

En efecto, siendo BAD una línea recta, el ángulo BAE es suplemento de DAE; y como por hipótesis tenemos DAE = BAC, resulta que BAE es tambien suplemento de BAC; luego, en virtud de la recíproca precedente, CAE es una línea recta.

N.° 31. En general:

1.° *La suma de todos los ángulos formados al rededor de un punto O, es igual á cuatro ángulos rectos*;

2.º *La suma de todos los ángulos consecutivos* AOC,
Fig. 16. COD, DOE, EOB (*fig.* 16), *formados á un mismo lado de una recta* AB, *vale dos ángulos rectos.*

Para probarlo basta levantar sobre AB la perpendicular LOL′; y entonces las dos proposiciones son evidentes.

De las paralelas.

N.º 32. Se llaman PARALELAS dos *rectas que, hallándose en el mismo plano, no se pueden encontrar, por mas que se prolonguen en los dos sentidos de su direccion.*

Es facil probar la existencia de rectas que cumplan las condiciones de esta definicion. En efecto, supónganse *en un mis-*
Fig. 17. *mo plano* dos rectas distintas AB, CD (*fig.* 17), perpendiculares á una tercera EF, en los puntos respectivos M y N; es claro que dichas perpendiculares *no podrán encontrarse*, por mucho que se prolonguen; pues si tuvieran un punto comun, resultarian bajadas desde él dos perpendiculares á una misma recta EF, lo cual es un *absurdo* (n.º 27.).—Las dos rectas AB, CD, son por consiguiente *dos rectas paralelas.*

N.º 33. Asi pues, dos rectas paralelas estan necesariamente en un plano mismo, segun su definicion; y *le determinan*, por que tomando dos puntos arbitrarios en una de ella, y otro punto en la otra, se tienen *tres puntos no situados en línea recta*, que son los necesarios para determinar un plano (n.º 8.).

El plano único determinado por dos paralelas, se llama *plano de dichas paralelas.*

N.º 34. Admitiremos como *postulado* (n.º 17.), es decir, que espondremos sin demostracion la proposicion siguiente:

Fig. 18. *Una perpendicular*, OC (*fig.* 18), *y una oblicua*, EF, *á una misma recta* AB, en un mismo plano, *se encuentran siempre*, en siendo suficientemente prolongadas.—El encuentro se verifica por el lado de la recta AB en que es *agudo* el ángulo *interior* OEF (*).

(*) Creemos deber dar aqui, aunque solo por via de *nota*, la demostracion debida en sustancia á Bertrand de Genève, y apoyada en los dos *lemas* siguientes:

1.er LEMA.—*Toda faja comprendida entre dos paralelas* AB,
Fig. 19. CD (*fig.* 19), cualquiera que sea su anchura, *está contenida en un plano un número de veces necesariamente infinito.*

Admitida esta proposicion, que no es otra cosa mas que el POSTULADO de EUCLIDES, podemos sentar desde luego las consecuencias siguientes:

1.° *Por un punto* M (*fig.* 17) *tomado fuera de una recta* AB, *no se le puede tirar mas que una paralela*; Fig. 17.

Bajemos desde el punto M á la AB la perpendicular MN, y luego por el mismo punto M levantemos sobre MN la perpendicular CMD. Ya sabemos (n.° 32.) que CD es paralela á AB: pues ahora añadimos que es la única que se le puede tirar por el punto M; porque en efecto toda otra recta que pase por dicho punto ha de ser necesariamente *oblicua* respecto de MN, y debe por consiguiente, en virtud del *postulado*, encontrar á la recta AB perpendicular á MN.

2.° *Si dos rectas*, AB, CD (*fig.* 17), *son paralelas, toda recta* GH *que encuentre á una de ellas* CD, en un punto I, *ha de encontrar forzosamente á la otra*; Fig. 17.

Porque si asi no fuera, resultaria que por el mismo punto I se podrian tirar *dos* paralelas á AB.

3.° *Dos rectas*, AB, CD (*fig.* 21), *paralelas á una tercera* EF, *son paralelas entre sí*; Fig. 21.

En efecto, hagamos girar la faja ABCD al rededor de CD como charnela, de modo que vuelva á caer sobre su plano en CDA'B'. Hagamos igualmente girar á CDA'D' al rededor de A'B' de modo que forme una tercer faja A'B'C'D' igual á las dos primeras; y asi sucesivamente.

Volvamos ahora á la faja ABCD, y hagámosla girar de un modo análogo aunque contrario, al rededor de AB, y tendremos otras fajas iguales á las primeras, AB*cd*, *cdab*, *abc'd'*,... Ahora bien, por muchas veces que repitamos esta operacion, es claro que nunca lograremos cubrir *enteramente* de fajas el plano en que estas se encuentran, porque siempre quedará á la derecha y la izquierda de las dos últimas formadas, un espacio todavía *infinito*.

De esto podemos pues concluir que la faja ABCD está contenida en su plano un número ilimitado de veces.

2.° LEMA. — *Un ángulo cualquiera* AOB (*fig.* 20), por pequeño que sea con relacion al ángulo recto AOC, *está contenido en su plano un número de veces esencialmente limitado.* Fig. 20.

En efecto, repitiendo el ángulo, como manifiesta la figura, un número suficiente de veces, número esencialmente *finito* (que siempre puede asignarse y que es tanto menor cuanto mayor es el ángulo AOB respecto del ángulo recto), se obtendrá evidentemente bien pronto una suma de ángulos bastante grande para cubrir totalmente, primero el *ángulo recto*, luego *dos ángulos rectos*, despues *tres* y al fin *cuatro*, y por consiguiente la superficie entera. — Lo cual demuestra el lema enunciado.

Otra demostracion. Si del vértice O como centro, y con un radio cualquiera OD, describimos una circunferencia, el arco total correspondiente á la suma de los ángulos llegará á igualar á la circunferencia

Porque, si no lo fueran, resultaria tambien que por su punto de concurso, podrian tirarse dos paralelas á la EF.

Fig. 17. 4.° En fin, *si dos rectas*, AB, CD (*fig.* 17), *son paralelas, toda otra recta* MN *perpendicular á una de ellas* AB, *lo es tambien á la otra* CD; — *y recíprocamente.*

Esto se deduce inmediatamente del *postulado.*—En consecuencia de esto, se dice que

Dos paralelas tienen comunes sus perpendiculares.

De los polígonos.

N.° 35. Se llama en general POLÍGONO *una porcion de* Fig. 22 y 22 bis. *plano*, ABCDEA, ABCDEFGA (*fig.* 22 y *fig.* 22 *bis*), *circunscripta por un sistema de rectas que se cortan de dos en dos.*

Para formarse idea clara de esta clase de estension, conviene imaginar que un punto movible [por ejemplo, la punta de un lápiz ó de una pluma], saliendo de A, describe primero una parte de recta AB; luego, cambiando de direccion, describe otra parte BC, despues otro pedazo CD, y asi sucesiva-

---

cuando el arco parcial correspondiente al ángulo AOB sea parte alícuota de ella, y en caso de no serlo, llegará á ser mayor que ella. Y como la suma de los ángulos iguales correspondiente á la circunferencia, cubre totalmente el plano, podemos sacar la misma consecuencia que antes.

De todo esto podemos concluir, en general, — que *Un ángulo*, por pequeño que sea (con relacion al ángulo recto), *es mayor que toda figura capaz de caber en un plano un número ilimitado de veces*, — esté dicha figura ó no esté limitada por todas partes; — y ademas el *ángulo* mismo *contiene á la figura un número ilimitado de veces.*

Fig. 18. Admitido todo esto, volvamos á la figura 18, y despues de levantar en el punto E la recta EG perpendicular á AB, observemos que en virtud de lo dicho, el ángulo FEG es mayor que el espacio indefinido COEG (mitad de la faja CDGH). Ahora bien, los dos espacios FEG, COEG tienen un límite comun EG; luego es forzoso que EF suficientemente prolongada, encuentre en algun punto á la recta OC; pues de lo contrario el ángulo quedaria encerrado totalmente en la semi-faja, y sería menor que ella, lo cual envuelve contradiccion. Luego finalmente, EF debe encontrar á OC.

Si se trata de la recta EF' que forma el ángulo obtuso OEF', como entonces el ángulo OEH' es agudo, el encuentro de EF' con OC se verifica por el otro lado de AB: por consiguiente queda demostrada la proposicion presentada como *postulado.*

Aunque la demostracion espuesta se apoya en consideraciones bastante delicadas sobre el infinito, no puede disimularse que admitida la definicion de paralelas, dada en el n.° 32, es dificil, por no decir imposible, esponer su teoría sin rozarse con la nocion del infinito.

mente, hasta volver finalmente al punto A de partida.—El conjunto de las rectas trazadas asi, circunscribirá por todas partes una porcion de superficie plana, que es lo que se llama *polígono.*

Los pedazos de recta, AB, BC, CD,... se llaman *lados* del polígono; el conjunto de los lados constituye el *contorno* ó *perímetro* del polígono; los puntos A, B, C,... se llaman *vértices*; y finalmente, se llaman *diagonales* las rectas, que como las AC, BE, CG,... juntan de dos en dos los vértices de los ángulos no consecutivos.

Del modo de formacion indicado arriba pueden resultar dos clases de polígonos; á saber: polígonos con todos los ángulos *salientes* (*fig.* 22), y polígonos con algunos ángulos *entrantes* (*fig.* 22 *bis.*). Los primeros se llaman POLÍGONOS CONVEXOS, y los otros POLÍGONOS CÓNCAVOS. Fig. 22. Fig. 22. *bis.*

N.° 36. Los *polígonos convexos* son los únicos de que se ocupa la *Geometría elemental*; y sus principales caractéres son los siguientes:

1.° *Una recta*, trazada en su plano, *no puede encontrar á su perímetro mas que en dos puntos*;

2.° Si suponemos un lado cualquiera prolongado indefinidamente, — *Todos los vértices, escepto los que le terminan, estan colocados, respecto de él, en la misma region* (n.° 11.).

3.° *Todas las diagonales son interiores*;—y ademas cada una de ellas es tal, *que los vértices*, escepto los que la terminan, *estan, respecto de ella, colocados unos en una region y otros en otra*; — en los polígonos cóncavos hay siempre una diagonal lo menos, respecto de la cual todos los vértices ocupan la misma region. — Tal es la diagonal AD (*fig.* 22 *bis.*). Fig. 22. *bis.*

N.° 37. Evidentemente se necesitan *tres rectas lo menos* para *circunscribir* una porcion de plano. Asi, el polígono mas simple en cuanto al número de lados es el de *tres* lados, que se llama TRIÁNGULO.

Todo triángulo es necesariamente *convexo*; y es figura que no puede tener diagonales.

Vienen en seguida:

EL CUADRILÁTERO ó polígono de. . *cuatro* lados,
EL PENTÁGONO. . . . . *cinco*,
EL EXÁGONO. . . . . *seis*,
EL EPTÁGONO. . . . . *siete*,
EL OCTÓGONO. . . . . *ocho*,

EL ENEÁGONO.	*nueve*,
EL DECÁGONO.	*diez*,
EL ENDECÁGONO.	*once*,
EL DODECÁGONO.	*doce*.

Pasado este, los polígonos no toman ya denominaciones especiales, escepto el de *quince* lados, que suele llamarse **PENTADECÁGONO.**

Del triángulo en particular.

N.º 38. Daremos aqui, respecto del triángulo, algunas proposiciones de frecuente uso para en adelante.

Fig. 23. 1.º *En todo triángulo* ABC (*fig.* 23), *un lado cualquiera*, AB, *es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

La parte primera es evidente en virtud de la definicion misma de la línea recta (n.º 5); es decir que evidentemente se tiene

$$AB < AC + CB.$$

Respecto de la segunda parte, supuesto que en virtud de la primera tenemos

$$AC < AB + CB,$$

resulta necesariamente

$$AC - CB < AB, \quad ó \quad AB > AC - CB.$$

Luego finalmente

$$AB < AC + CB, \quad y \quad AB > AC - CB.$$

L. C. D. D.

Fig. 24. 2.º *La suma de dos rectas*, AB, CD (*fig.* 24), *que se cortan en un punto* O *colocado entre sus estremidades, es siempre mayor que la suma de las rectas opuestas*, AC, BD, *que juntan de dos en dos las estremidades de las primeras.*

En efecto, tenemos las dos desigualdades

$$CO + OA > AC, \quad y \quad OD + OB > BD,$$

que, sumadas miembro á miembro, dan

$$CO + OA + OD + OB > AC + BD,$$

ó, reduciendo,

$$CD + AB > AC + BD.$$

Del mismo modo se probaria que

$$CD + AB > AD + CB.$$

3.º *En todo triángulo* ABC (*fig.* 25), *si se juntan por medio de rectas las estremidades de un mismo lado con un punto interior* O, *la suma de estas rectas es menor que la suma de los otros dos lados* [es decir que $AO + OB < AC + CB$]. Fig. 25.

Prolongaremos la línea AO hasta encontrar en D á CB: tendremos con esto en el triángulo ACD,

$$AD < AC + CD;$$

de donde, añadiendo DB á los dos miembros, resulta

$$AD + DB < AC + CB.$$

Ahora, el triángulo ODB da tambien

$$OB < OD + DB;$$

de donde, añadiendo AO á los dos miembros, sale

$$AO + OB < AD + DB.$$

De aqui resulta, con mayor razon,

$$AO + OB < AC + CB.$$

L. C. D. D.

CAPITULO PRIMERO.

DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

Dividiremos este capítulo en *cinco* párrafos, que tratarán: el primero, de las *perpendiculares* y de las *oblicuas*; el segundo, de las *paralelas*; el tercero, de los *triángulos* y de su *igualdad*; el cuarto, del *cuadrilátero* y de sus *diversas especies*; y el quinto, de los *polígonos* y de sus *propiedades principales*.

§. 1.° *Teoría de las perpendiculares y de las oblicuas.*

Fig. 26. **TEOREMA I.** (*Fig.* 26.)

N.° 39. *La perpendicular* OC *bajada sobre una recta* AB, *desde un punto esterior* O, *es la distancia mas corta que hay entre el punto y la recta* (*).

Basta probar que la perpendicular OC es mas corta que cualquier oblicua OD. Para esto, doblemos la figura OCD por AB, haciéndola caer en O′CD; tendremos

$$O'C = OC, \quad O'D = OD;$$

siendo ademas OCO′ una línea recta (n.° 27.), resulta (n.° 38.)

$$OCO' < OD + O'D, \quad ó \quad 2OC < 2OD;$$

y por consiguiente, $OC < OD$; *L. C. D. D.*

ESCOLIO. *Esta perpendicular mide* por lo tanto *la verdadera distancia del punto á la recta.*

Fig 26. **TEOREMA II.** (*Fig.* 26.)

N.° 40. Si desde un punto O esterior á una recta AB, se bajan la perpendicular OC á esta recta, y diferentes oblicuas OD, OD′ OE:

1.° *Las oblicuas*, OD, OD′, *equidistantes del pie de la perpendicular* (es decir que tienen CD = CD′) *son iguales*;

2.° *De dos oblicuas*, OD, OE, *que distan desigualmente de la perpendicular*, *la que*, *como* OE, *dista mas*, *es la mas larga.*

1.° Doblemos la figura por OC; los puntos D y D′ se confundirán, porque, segun el supuesto, CD = CD′; luego

$$OD = OD'.$$

(*) Advertimos ahora para siempre que los enunciados de los teoremas deben leerse *dos veces*: una *sin las letras* de la figura, y otra despues con ellas. Este es el único medio de conservarlos en la memoria.

Asi pues, el teorema presente deberá primero enunciarse como sigue:

—*La perpendicular bajada desde un punto esterior, sobre una recta, es la distancia mas corta que hay entre el punto y la recta.*

2.° Doblemos la figura por AB; tendremos

$$OD = O'D, \quad OE = O'E;$$

y como, en virtud de la tercera proposicion demostrada en el número 38,

$$OD + O'D < OE + O'E, \text{ ó } 2OD < 2OE,$$

resulta $OD < OE$; *L. C. D. D.*

Advert. Si se tratara de dos oblicuas OD′, OE, colocadas á distinto lado de la perpendicular, se tomaria primero una distancia $CD = CD'$, lo cual daria $OD = OD'$; y despues, de $OD < OE$, se duciria $OD' < OE$.

Corolario. *Entre una recta indefinida y un punto fuera de ella no se pueden tirar tres rectas iguales:*

Porque de lo contrario habria ó dos oblicuas iguales á un mismo lado de la perpendicular, ó una oblicua igual á la perpendicular; y ambas cosas son imposibles.

Escolio. Las *recíprocas* de las dos partes del *teorema* II son *verdaderas*, y resultan evidentemente del principio establecido en el *número* 21.

Asi pues,—1.°—*Dos oblicuas iguales se hallan á igual distancia de la perpendicular*;

2.° *De dos oblicuas desiguales, la mas larga dista mas de la perpendicular.*

Teorema III. (*Fig.* 27.) Fig. 27.

N.° 41.—1.°—*Todo punto* È *de la perpendicular* CD, *levantada sobre una recta* AB *en un punto medio* C, *está á igual distancia de las estremidades de la recta*;

2.° *Todo punto* F *esterior á la perpendicular dista desigualmente de las mismas estremidades.*

En efecto,—1.°—tiremos las rectas AE, BE;—puesto que, por hipótesis, tenemos $CA = CB$, resulta (n.° 40.)

$$EA = EB.$$

2.° Tiremos FA, FB; y por el punto E en que FA corta á CD, tiremos la recta EB.—Tendremos (n.° 38, 1.°)

$$BF < BE + EF,$$

ó, por ser $EB = EA$,

$$BF < EA + EF,$$

y por consiguiente $\quad BF < AF.$

Advert. La estremidad mas distante del punto esterior F, es siempre la que, como A, está respecto de la perpendicular en distinto lado que el punto; y *vice-versa.*

Escolio 1.° Las *recíprocas* de las dos proposiciones del *teorema* III son *verdaderas*, y resultan tambien evidentemente del principio sentado en el n.° 21.

Escolio 2.° *La perpendicular* CD debe pasar por todos los *puntos equidistantes* de las estremidades A y B de la recta AB, por cuya razon se llama el **lugar geométrico** de dichos puntos.

N.° 42. Corolario.—Siendo una línea recta este lugar geométrico, y quedando una recta determinada, en determinándose dos de sus puntos (n.° 6.) resulta necesariamente que

Fig. 27. *Si dos puntos* [D, E, ó D, D′ (*fig.* 27)], *estan esquidistantes de otros dos puntos* [A y B], *la recta* [DE ó DD′], *que pasa por los dos primeros, es perpendicular á la recta que junta los otros dos, en su punto medio.*

N.° 43. Llámase **bisectriz** de un ángulo BAC, la recta AD que le divide en dos partes iguales: un ángulo solo puede tener evidentemente *una* bisectriz.—Esto supuesto,

Fig. 28. Teorema IV. (*Fig.* 28.)

1.° *Todo punto* E *de la bisectriz* AD *de un ángulo* BAC *está á igual dictancia de los dos lados del ángulo;*

2.° *Todo punto* F *situado en el ángulo y esterior á la bisectriz, dista desigualmente de los dos lados.*

1.° Bájense sobre AB y sobre AC las perpendiculares EG, EH; y dóblese la figura por AD. Las rectas AB, AC, se confundirán, y por consiguiente tambien se habrán de confundir (n.° 27.) las perpendiculares EG, EH.

Luego $\quad EG = EH.$

2.° Bájense sobre AB, AC, las perpendiculares FG, FI; despues desde el punto E en que FG encuentra á AD, tírese la perpendicular EH á AC, y trácese ademas la oblicua FH.

Tendremos con esto evidentemente

$$FI < FH, \text{ y } FH < FE + EH < FE + EG;$$

de donde, con mayor razon,

$$FI < FE + EG < FG.$$

Luego $$FI < FG.$$

Advert. Aqui puede hacerse una advertencia análoga á la del n.º 41.

ESCOLIO 1.º Las *recíprocas* de las dos proposiciones son *verdaderas.*

ESCOLIO 2.º La *bisectriz* de un ángulo es el *lugar geométrico* de todos los *puntos* situados en el ángulo *á igual distancia de sus lados.*

ESCOLIO 3.º Las *bisectrices* AD, AD′, *de dos ángulos adyacentes*, BAC, CAB′, *son perpendiculares entre sí.*

Porque, siendo los ángulos DAC, CAD′, mitades respectivas de los ángulos BAC, CAB′, cuya suma vale *dos rectos* (n.º 29.), resulta que DAC + CAD′ ha de valer *un recto.* — Luego, &c.

Los dos ángulos BAD, B′AD′, valen tambien juntos *un* ángulo *recto.*

§. II. *Teoría de las paralelas.*

TEOREMA I. (*Fig.* 29.) Fig. 29.

N.º 44. *Dos paralelas*, AB, CD, *estan siempre una de otra á igual distancia.*

De dos puntos E, F, tomados á arbitrio en CD, bájense á AB las perpendiculares EG, FH; que á la vez serán perpendiculares á CD (n.º 34, 4.º); y serán ademas las rectas mas cortas que se pueden tirar á la AB desde los puntos E, F, ó á la CD desde los puntos G, H. — Bastará pues probar que EG = FH.

A este fin, por el punto M, medio de GH, levantemos sobre AB la perpendicular MN; despues doblemos á ENMG sobre FNMH. Siendo rectos todos los ángulos de la figura, MG tomará la direccion MH; y como MG = MH, el punto G caerá sobre el punto H. En seguida EG tomará la direccion HF, y NE la direccion NF; luego el punto E caerá en F, y se tendrá EG = FH. *L. C. D. D.*

RECÍPROCAMENTE: — *Dos rectas que siempre estan á igual distancia una de otra, son paralelas;* — porque entonces nunca podrán encontrarse.

N.º 45. Antes de demostrar otros teoremas, hay que dar algunas definiciones nuevas.

Fig. 30 y 31. Cuando dos rectas, AB, CD (*fig.* 30 y 31), paralelas ó concurrentes, se cortan respectivamente en dos puntos M, N, con una tercer recta EF, esta recta, que se llama **SECANTE** ó **TRANSVERSAL**, forma, con las otras dos, *ocho* ángulos que, considerados aisladamente, ó comparados de dos en dos, toman las siguientes denominaciones.

Considerados *aisladamente*:

1.º Los cuatro ángulos AMF, BMF, CNE, DNE, cuya abertura está *dentro* de las paralelas, se llaman *internos*;

2.º Los cuatro ángulos AME, BME, CNF, DNF, cuya abertura está hácia *afuera*, se llaman *esternos*.

Comparados *de dos en dos*.

1.º Los ángulos AMF y CNE, ó bien BMF y DNE, se llaman ángulos **INTERNOS DE UN MISMO LADO** (sobre-entendiéndose, *de la secante*);

2.º Los ángulos AME y CNF, ó bien BME y DNF, se llaman **ESTERNOS DE UN MISMO LADO**;

3.º Los ángulos internos AMF y DNE, ó bien CNE y BMF, situados en distinto lado respecto de la secante, se llaman ángulos **ALTERNOS-INTERNOS**;

4.º Los ángulos esternos AME y DNF, ó BME y CNF, se llaman **ALTERNOS-ESTERNOS**.

Hay *dos pares* de ángulos de cada una de las *cuatro especies* precedentes.

5.º En fin, se llaman ángulos **CORRESPONDIENTES** los cuatro pares de ángulos AME y CNE, AMF y CNF, BME y DNE, BMF y DNF, que atendida su posicion respectiva, deberian mas bien llamarse ángulos *interno-esternos de un mismo lado*; pero por abreviar se prefiere la primera denominacion.

Fig. 30. **TEOREMA II.** (*Fig.* 30.)

N.º 46. *Dos rectas*, AB, CD, *son paralelas cuando forman con una secante*, EF, *dos ángulos alternos-internos* [AMN y DNM, ó BMN y CNM] *iguales entre sí.*

En efecto, admitamos por un momento que los segmentos MA, NC, por ejemplo, puedan encontrarse; y, en esta hipótesis, hagamos girar (n.º 19.) la porcion de plano AMNC alrededor del punto O medio de MN, de modo que OM venga á tomar la posicion primitiva de ON, y ON la de OM: entonces el segmento MA tomará la posicion ND, y NC la posicion MB, á causa de ser el ángulo AMN igual al de DNM, y el ángulo BMN igual al CNM, en virtud del enunciado. Ahora bien, los segmentos MA, NC, no dejarán de encontrarse en su nueva posicion, y por consiguiente habrán tambien de encontrarse los segmentos MB, ND, con los cuales coinciden aquellos ahora; de donde resultaria que las dos rectas AB, CD, tendrian dos puntos comunes sin confundirse, *lo cual es un absurdo.*

Luego finalmente las rectas AB, CD, deben ser paralelas. *L. C. D. D.*

N.° 47. COROLARIO.—*Dos rectas son* tambien *paralelas* en los *cuatro casos* siguientes:

1.° *Cuando son iguales los ángulos correspondientes;*

2.° *Cuando los ángulos internos de un mismo lado son el uno suplemento del otro;*

3.° *Cuando son iguales los ángulos alternos-esternos;*

4.° *Cuando los ángulos esternos de un mismo lado son el uno suplemento del otro.*

En efecto, en el *primer caso*, sea, por ejemplo,

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{AMN} = \textit{angulo}\ \mathrm{CNF};$$

como tenemos tambien (n.° 29.)

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{CNF} = \textit{ángulo}\ \mathrm{MND},$$

resulta AMN = MND; y la proposicion se refiere al caso del teorema principal.

En cuanto al *segundo caso*, sea AMN suplemento de MNC; como MND es tambien suplemento de MNC, resulta (n.° 28.) AMN = MND; y la proposicion se reduce tambien al *teorema* principal.

Los *otros dos casos*, que carecen enteramente de aplicacion, se demostrarian de un modo análogo.

TEOREMA III. (*Fig.* 31.) Fig. 31.

N.° 48. *Dos rectas*, AB, CD, *concurren, cuando forman con una secante*, EF, *ángulos alternos-internos desiguales.*

Sea, para fijar las ideas,

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{MND} > \textit{ángulo}\ \mathrm{AMN}.$$

Tiremos por el punto N la recta C′ND′, de modo que tengamos

$$\text{ángulo } D'NM = \text{ángulo } AMN;$$

las dos rectas AB, C′D′, serán paralelas, en virtud del *teorema* precedente.

Asi pues, AB, CD, deben encontrarse; pues de lo contrario se podrian tirar por el mismo punto N dos paralelas á la AB, *lo cual es un absurdo* (n.° 34.)

N.° 49. Corolario.— La consideracion de los ángulos *correspondientes*, *internos de un mismo lado*, &c., conduce, como en el *teorema* precedente, á *cuatro* proposiciones; pero nos reduciremos á demostrar la siguiente, que es la única que usaremos con frecuencia.

Fig. 31. *Dos rectas*, AB, CD (*fig.* 31), *concurren cuando forman con una tercera* EF, *dos ángulos internos de un mismo lado*, AMN, MNC, *cuya suma vale menos ó mas de* dos rectos.

En efecto, sea, por ejemplo,

$$AMN + MNC < 2 \text{ rectos};$$

como tenemos (n.° 28.)

$$MNC + MND = 2 \text{ rectos},$$

resulta AMN < MND; y la proposicion se reduce al teorema principal.

Advert. Es importante observar que

El encuentro de las dos rectas se verifica por el lado en que la suma de los ángulos internos vale menos de dos rectos.

Escolio 1.° La proposicion del n.° 34, ó el *postulado* de Euclides, no es, segun se ve, mas que un caso particular de este corolario.

Fig. 32. N.° 50. Escolio 2.° — *Cuando dos rectas*, AB, CD (*fig.* 32), *se cortan, sus respectivas perpendiculares se cortan tambien.*

En efecto, si MN y PQ fueran paralelas, siendo las dos AB y CD perpendiculares entonces á un mismo tiempo á cada una de las otras dos (n.° 34, 4.°), serian tambien paralelas (n.° 32.), *lo cual es contra el supuesto.* — Luego &c.

N.° 51. Recíprocas *de los dos teoremas precedentes.*

Hallándose los teoremas II y III en el caso de la observacion general del n.º 21, resulta que sus recíprocas son *verdaderas.*

Asi pues, — *Cuando dos rectas son cortadas por una secante, segun son ó no son paralelas*, asi tambien

1.º *Los ángulos alternos-internos, ó alternos-esternos, ó correspondientes, son iguales ó desiguales;*

2.º *Los ángulos esternos ó internos de un mismo lado, son ó no son suplementarios.*

TEOREMA IV. (*Fig.* 33.) Fig. 33.

N.º 52. *Dos ángulos*, BAC, EDF, *son iguales cuando tienen sus lados paralelos* cada uno á su homólogo, *y dirigidos en un mismo sentido.*

Prolonguemos, si es necesario, á FD hasta encontrar en I á AB. Los dos ángulos CAB, FIB, son iguales por correspondientes (n.º 51.); lo mismo sucede con los ángulos FIB, FDE; luego tambien CAB = FDE.

COROLARIO 1.º *Dos ángulos*, BAC, EDF (*fig.* 34), *son tambien iguales cuando tienen sus lados paralelos* homólogamente, *y dirigidos en sentido contrario.* Fig. 34.

Prolónguense DE, DF, respetivamente hasta E′, F′; los ángulos EDF, E′DF′, son iguales por opuestos al vértice (número 29.); pero los ángulos E′DF′, BAC, lo son tambien por el teorema principal; luego

$$BAC = EDF.$$

COROLARIO 2.º *Dos ángulos*, BAC, EDF (*fig.* 35), *son suplementarios cuando tienen sus lados paralelos, pero no dirigidos los dos á la vez en el mismo sentido ni en sentido contrario.* Fig. 35.

Porque, prolongando á DF hasta F′, tenemos (n.º 51.)

$$FDE + EDF' = 2 \text{ RECTOS};$$

pero BAC = EDF′, en virtud del teorema principal; luego

$$FDE + BAC = 2 \text{ RECTOS}.$$

Recíprocamente: — Si las rectas AB, DE, son paralelas, y se tiene, ó bien que ABC = DEF, ó bien que ABC = D′EF′, ó bien que ABC es *suplemento* de DEF′ ó de D′EF, las rectas BC, EF, son tambien paralelas.

La demostracion *ad absurdum*, semejante en un todo á la del n.° 48, es demasiado facil para que nos detengamos á darla.

N.° 53. ESCOLIO.—Cuando dos ángulos tienen sus lados paralelos, su posicion relativa es evidentemente una de las que acaban de indicarse.—Luego, en general,

Dos ángulos son iguales ó suplementarios cuando tienen sus lados paralelos cada cual á su homólogo.

OBSERVACION GENERAL SOBRE LAS PARALELAS.

Fig. 36. N.° 54. Sean AB, CD (*fig.* 36), dos paralelas; y supongamos que desde un punto cualquiera tomado en CD, se tira á AB la perpendicular OP y una serie de oblicuas OR, OR′, OR″,.... Los pies de estas oblicuas estarán tanto mas apartados del pie de la perpendicular P, cuanto mas pequeños sean los ángulos DOR, DOR′, DOR″,..., ó sus alternos-internos respectivos, ORP, OR′P, OR″P,...; y *recíprocamente.* Asi pues, pudiendo por una parte los ángulos DOR ó PRO, DOR′ ó PR′O,..., hacerse menores que cualquier ángulo dado; y, por otra parte, pudiendo las distancias OR, OR′,..., ó PR, PR′,..., hacerse mayores que cualquiera línea dada, resulta que la línea CD puede considerarse como el *límite* á que se acercan sin cesar las rectas OR, OR′,..., á medida que los puntos de encuentro R, R′, R″,..., se alejan mas del punto F, y á medida que disminuyen los ángulos DOR ó PRO,...

Esto es lo que se espresa abreviadamente cuando se dice que

Dos paralelas son dos rectas que se encuentran en el infinito, formando entre sí un ángulo nulo.

§. III. *Propiedades principales de los triángulos.—Teoría de su igualdad.*

[*Véase* en los n.os 35, 37 y 38, la definicion del triángulo y sus primeras nociones.]

Fig. 37. TEOREMA I. (*Fig.* 37.)

N.° 55. *En todo triángulo* ABC, *la suma de los tres ángulos es igual á* DOS RECTOS.

Prolónguese uno de los lados, AB por ejemplo, para formar el ángulo *esterno* CBD; despues, por el punto B, tírese la BE paralela á la AC. Los ángulos EBD, CAB, son iguales por correspondientes, y los ángulos EBC, BCA, iguales tambien por alternos-internos (n.º 51.); luego la suma de los tres ángulos del triángulo es igual á la suma de los tres ángulos formados en el punto B; pero esta vale *dos rectos* (n.º 29.); luego tambien

$$ABC + CAB + ACB = 2 \text{ RECTOS}.$$

Advert. El ángulo esterno CBD equivale evidentemente á la suma de los dos ángulos CAB, ACB, y por consiguiente es mayor que cada uno de ellos.—Asi pues,

Todo ángulo esterno de un triángulo es mayor que cualquiera de los internos opuestos.

COROLARIO 1.º *Uno* cualquiera de los tres ángulos de un triángulo es *suplementario* de la *suma de los otros dos* (número 28.); de donde se infiere que

Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales á dos ángulos de otro, el tercer ángulo del primero es igual al tercer ángulo del segundo:

Porque ambos son suplementos de la misma suma.

COROLARIO 2.º *Si desde un punto* O *interior á un triángulo* CAB (*fig.* 25), *se tiran dos rectas á los estremos de uno de los lados*, AB, *el ángulo* AOB *formado por las dos rectas es mayor que el ángulo* ACB *del triángulo, opuesto á dicho lado*: Fig. 25.

En efecto, siendo la suma de los ángulos OAB + OBA evidentemente menor que CAB + CBA, es necesario, para que haya compensacion, que el suplemento O de la primera sea mayor que el suplemento C de la segunda.

N.º 56. ESCOLIO.—*Un triángulo nunca puede tener á la vez dos ángulos rectos, ni un ángulo recto y uno obtuso, ni dos ángulos obtusos*;

Porque de lo contrario resultaria que la suma de sus tres ángulos valdria mas de dos rectos.

Esto supuesto, se llama TRIÁNGULO RECTÁNGULO el triángulo que tiene un ángulo *recto*; el lado opuesto á este ángulo se llama *hipotenusa*; y los otros dos lados *catetos*.

TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO es el que tiene un ángulo *obtuso*;—TRIÁNGULO ACUTÁNGULO el que tiene *agudos* todos sus ángulos.—Estas dos especies de triángulos llevan el nombre comun de TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

En todo triángulo rectángulo los ángulos son mutuamente el uno complemento del otro (n.º 28.).

Asi, de ser uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo igual á uno de los ángulos agudos de otro triángulo rectángulo, se puede deducir que el segundo ángulo agudo del primero es igual al segundo ángulo agudo del segundo.

Fig. 38. **Teorema II.** (*Fig.* 38.)

N.º 57. *Si de un punto* D *tomado en uno de los lados* AC *de un ángulo cualquiera* BAC, *se baja una perpendicular al otro lado* AB, *esta perpendicular caerá dentro ó fuera del ángulo, segun que este sea* AGUDO *ú* OBTUSO.

Desde luego en ningun caso puede caer en A, puesto que AC es oblicua.

Ahora, cuando el ángulo es *agudo*, la perpendicular no puede caer en la prolongacion de AB hácia E′, porque si cayera, tendriamos un triángulo DAE′ con un ángulo obtuso y otro recto, *lo cual es un absurdo.*

—Luego debe caer hácia el lado AB.

Si, por el contrario, el ángulo es obtuso, la perpendicular no puede caer sobre AB en E″, porque tendriamos tambien un triángulo con un ángulo obtuso y otro recto.

—Luego debe caer en la prolongacion de AB, por ejemplo en E.

Corolario 1.º La perpendicular bajada desde uno de los
Fig. 39. vértices de un triángulo cualquiera ABC (*fig.* 39), sobre el lado opuesto, cae *dentro* ó *fuera* de dicho triángulo, segun son los ángulos adyacentes á dicho lado, *ambos agudos*, ó *uno agudo* y *otro obtuso.*

Corolario 2.º Por consiguiente, la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto ú obtuso de un triángulo *rectángulo* ú *obtusángulo*, al lado opuesto, cae siempre por dentro del triángulo, porque entonces son necesariamente agudos los dos ángulos adyacentes al lado elegido.

Del triángulo isósceles y del triángulo equilátero.

El TRIÁNGULO se llama ESCALENO, ISÓSCELES ó EQUILÁTERO, segun tiene ó sus *tres lados desiguales*, ó *dos iguales* solamente, ó los *tres iguales.*

Cuando el triángulo es isósceles, se llama BASE el lado diferente de los otros dos, y VÉRTICE ó CÚSPIDE el punto comun á los dos lados iguales.

TEOREMA III. (*Fig.* 40.) Fig. 40.

N.° 58. *En todo triángulo isósceles*, CAB, *los ángulos* A, B, *opuestos á los lados* iguales, CB, CA, *son iguales.*

Levántese sobre el punto D, medio de la base AB, la perpendicular DE. Puesto que, por hipótesis, tenemos CA = CB, resulta (n.° 41, *escolio* 2.°) que el punto C se halla en la recta DE.—Esto supuesto, doblemos la figura por DC; las dos partes CDB, CDA, se ajustarán exactamente una sobre otra. Luego, el ángulo CBD ó CBA es igual al ángulo CAD ó CAB; ó simplemente B = A.

COROLARIO. *Todo triángulo equilátero* es necesariamente *equiángulo*,—porque, siendo sus *tres lados* iguales de *dos en dos*, los tres *ángulos* habrán tambien de ser *iguales de dos en dos.*

TEOREMA IV. (*Fig.* 41.) Fig. 41.

N.° 59. *Si dos lados de un triángulo*, CAB, *son desiguales, al mayor de ellos se opone mayor ángulo*,—[es decir que si, por ejemplo, se tiene CA > CB, se tendrá tambien B > A].

Levantemos en D, punto medio de AB, la DE perpendicular á la AB.—Puesto que, por hipótesis, tenemos CA > CB, resulta (n.° 41, *advert.*) que el punto C está colocado respecto de la perpendicular DE en el mismo lado que el punto B; y si juntamos el punto B con el punto I en que AC encuentra á DE, tendremos (n.° 41.) AI = IB; de donde, en virtud del teorema precedente,

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{IBA} = \textit{ángulo}\ \mathrm{IAB},$$

y por consiguiente

$$\mathrm{CBI} + \mathrm{IBA} > \mathrm{IAB}, \quad \text{ó} \quad \textit{ángulo}\ \mathrm{B} > \textit{ángulo}\ \mathrm{A}.$$

TEOREMA V.

N.° 60. RECÍPROCAMENTE:—1.°—*Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos son tambien iguales* [y el triángulo es *isósceles*];

2.° *Si dos ángulos de un triángulo son desiguales, al mayor de ellos se opone mayor lado.*

Esta doble proposicion es consecuencia forzosa del principio sentado en el n.º 21, y se demostraria facilmente *ad absurdum* por medio de los dos *teoremas* precedentes.

N.º 61. **Escolio importante** *sobre el triángulo isósceles.*

Fig. 40. La recta DE (*fig.* 40) tirada perpendicular á la base por su punto medio, debe pasar por el vértice C, y dividir á la vez al ángulo C en dos partes iguales [segun resulta de la superposicion de las figuras CDB, CDA]; por consiguiente cumple *cuatro* condiciones esencialmente diversas, á saber:—1.ª—pasar por el *medio* de la base;—2.ª—ser perpendicular á ella;—3.ª—pasar por el *vértice* del triángulo;—4.ª—dividir el ángulo del vértice en *dos partes iguales.*

Ahora bien, sabemos (n.ºs 6, 27, 43.) que *bastan dos condiciones para determinar una recta*: asi, la recta que cumpla dos condiciones de estas, satisfará necesariamente á las *otras dos.*

De aqui resultan otros muchos teoremas, entre los cuales nos reduciremos á enunciar los siguientes:

1.º *La recta que junta el vértice de un triángulo isósceles con el medio de la base, es á la vez perpendicular á esta base, y bisectriz del ángulo del vértice;*

2.º *La bisectriz del ángulo en el vértice del triángulo isósceles pasa por medio de la base, y le es perpendicular.*

Todas estas proposiciones se demuestran *ad absurdum* por medio del *teorema* III.

De la igualdad de los triángulos.

LEMA FUNDAMENTAL *sobre la igualdad de las figuras.*

Fig. 42. N.º 62. *Toda figura rectilínea convexa*, ABCDE (*fig.* 42), *que se halle colocada en un plano, puede disponerse en dicho plano de modo,—1.º—que uno de sus lados*, AB, *tome una posicion determinada*, AB′, *sobre una recta* AX *tirada indefinidamente desde uno de los estremos del mismo lado*, y — 2.º — *que la figura se encuentre en la region que queramos de las dos del plano* (n.º 11.) *respecto de dicha recta.*

En efecto, podemos desde luego, haciendo girar al polígono en torno del punto A, darle una posicion AB′C′D′E′, tal que AB′ = AB esté dirigido en el sentido de AX.

En seguida podemos, *si lo necesitamos*, *rebatir* la nueva figura al otro lado de AB′ tomado por *charnela* (n.° 19.); dándole así [si no lo habia adquirido por el primer movimiento] la posicion AB′C″D″E″.

Con esto quedan completamente satisfechas las condiciones del enunciado.

Escolio. Supongamos ademas que se transporta el tercer polígono de modo que el vértice A venga á tomar posicion en un punto arbitrario O, y el punto B′ en otro punto de la recta OZ tirada paralelamente á AX, y en su mismo sentido;— de este modo, el tercer polígono vendrá á encontrarse representado por OPQRS, situado respecto de OZ lo mismo que AB′C″D″E″ lo estaba respecto de AX.

Esto supuesto, las dos figuras OPQRS, AB′C″D″E″, tendrán necesariamente *todos sus lados paralelos de dos en dos y en el mismo sentido.*

En efecto, puesto que OP y AB′ son paralelas y tienen la misma direccion, y puesto que ademas tenemos

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{OPQ} = \textit{ángulo}\ \mathrm{AB'C''},$$

resulta (n.° 52, *recíproca*), que PQ, B′C″, son tambien paralelas y llevan la misma direccion.— Igual raciocinio hariamos respecto de los otros lados.

Se espresa esta última propiedad diciendo, abreviadamente, que la figura AB′C″D″E″, para ir á OPQRS, *se ha trasladado paralelamente á sí misma*; y en esta situacion relativa de los polígonos OPQRS y AB′C″D″E″, es como se acostumbra considerar las figuras al establecer sus condiciones de igualdad.

Teorema VI. (*Fig.* 44). Fig. 44.

N.° 63. *Dos triángulos son iguales,*—1.°—*cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales;*—2.°—*cuando tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales;*—3.°—*cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.*

Primer caso. Sean los dos ángulos ABC, A′B′C′, en los cuales suponemos AB = A′B′, y los ángulos A, B, respectivamente iguales á los ángulos A′, B′.

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el ABC, de modo que coincida el lado A′B′ con su igual AB.— En virtud de la igualdad de los ángulos A′ y A, B′ y B, los lados A′C′, B′C′, tomarán respectivamente las direcciones de AC, BC; y el punto C′, encuentro de A′C′, B′C′, coincidirá con el punto C, encuentro de AC, BC; con lo cual los triángulos se habrán confundido exactamente y serán iguales.

Segundo caso. Sean AB = A′B′, AC = A′C′, y el *ángulo* A = *ángulo* A′.

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el triángulo ABC, de modo que el lado A′B′ coincida con su igual AB.—Como tenemos

$$\textit{ángulo } A' = \textit{ángulo } A,$$

la recta A′C′ tomará la direccion AC; y, á causa de ser A′C′ = AC, el punto C′ caerá sobre el punto C; luego el lado B′C′ coincidirá con el lado BC; y los triángulos se confundirán exactamente.

Tercer caso. La igualdad de los dos triángulos quedaria demostrada con solo probar que el ángulo A′ es igual al ángulo A, porque con esto se reducia este caso al precedente. Digo pues, que efectivamente el ángulo A no puede ser mayor que el ángulo A′.

Fig. 44. Coloquemos como antes el triángulo A′B′C′ (*fig.* 44), sobre el ABC, de modo que A′B′ coincida con AB.—Si suponemos que el ángulo A′ sea menor que el ángulo A, el lado A′C′ tomará una posicion AC″ interior al ángulo BAC, cayendo C′ en C″, por ejemplo [fuera de ABC]: de modo que el triángulo A′B′C′ se hallará representado por ABC″.

Esto supuesto, sea AL la bisectriz del ángulo CAC″, y L su punto de interseccion con BC; tiremos la recta LC″.—Los dos triángulos que resultan, ALC″, ALC, son iguales porque tienen un ángulo igual en A, formado por dos lados respectivamente iguales, que son AL comun, y AC″ = AC; de donde resulta LC″ = LC.

Pero en el triángulo BLC″ tenemos

$$BC'' < BL + LC'',$$

ó $\quad BC'' < BL + LC$, ó finalmente $B'C' < BC$,

lo cual es *contra la hipótesis*;

luego $\quad \textit{ángulo } A' = \textit{ángulo } A;$

Luego, &c.

Advert. La demostracion es absolutamente igual, bien caiga el punto C′ fuera del triángulo como en la presente figura, bien caiga dentro de él. En caso de caer sobre el lado BC, el absurdo del resultado B′C′ < BC [del cual hemos inferido la *falsedad* de la hipótesis A′ < A] se conoce inmediata y evidentemente.

N.° 64. Escolio. — El medio de demostracion que acabamos de emplear en el tercer caso de igualdad, nos conduce á la siguiente proposicion que usaremos con frecuencia en lo sucesivo.

Cuando dos lados, AB, AC (*fig.* 44), *de un triángulo* ABC, *son respectivamente iguales á dos lados*, A′B′, A′C′, *de otro triángulo* A′B′C′, *segun sea el ángulo* A *formado por aquellos mayor ó menor que el ángulo* A′ *formado por estos, asi tambien será el tercer lado del primer triángulo mayor ó menor que el tercer lado del segundo.* Fig. 44.

Creemos inútil dar la demostracion de esta proposicion, porque, escepto la consecuencia, debia ser completamente igual á la inmediata anterior.

Recíprocamente: — *Cuando dos lados de un triángulo son respectivamente iguales á dos de otro, el ángulo formado por aquellos es mayor ó menor que el formado por estos, segun sea el tercer lado del primer triángulo mayor ó menor que el tercer lado del segundo.*

Esta *recíproca*, en virtud del n.° 21, es consecuencia necesaria de la *directa* y del *tercer caso* del *teorema* precedente.

Teorema VII. (*Fig.* 45.)

Fig. 45.

N.° 65. *Dos triángulos*, ABC, A′B′C′, *rectángulos* [en A′ y A] *son iguales*:

1.° *Si tienen igual la hipotenusa y un áugulo agudo* B = B′;

2.° *Si tienen igual la hipotenusa y uno de los catetos* AB = A′B′.

1.° Los dos ángulos agudos C, C′, son respectivamente complemento de los ángulos iguales B, B′ (n.° 56.), por consiguiente son tambien iguales: con esto, los dos triángulos tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; y la proposicion se reduce al primer caso del n.° 63.

2.° Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el ABC, de modo que A′B′ coincida con su igual AB. — Como los ángulos A, A′, son *rectos*, el lado A′C′ tomará la direccion de AC; y digo que á la vez tomará B′C′ la direccion de BC. Porque supongamos, por un momento, que B′C′ toma una direccion distinta de BC, y tal como BD: el triángulo A′B′C′ estará entonces representado por el triángulo ABD, y se tendria B′C′ = BD; de donde, á causa de ser B′C′ = BC, deduciriamos BC = BD; *resultado absurdo* (n.° 40.).

Asi pues B′C′ debe caer necesariamente sobre BC; luego los dos triángulos A′B′C′, ABC, se confunden exactamente, y son iguales.

Observaciones importantes sobre la igualdad de los triángulos y sobre el uso de esta teoría.

N.° 66. Escolio 1.°—En los diferentes casos de igualdad acabados de demostrar, hemos supuesto, *à priori*, situados los dos triángulos en un mismo plano y dispuestos *de la misma manera*, cuya suposicion nos es lícita en virtud del LEMA espuesto en el n.° 62. En efecto, despues de haber (n.° 8.) reducido el triángulo A′B′C′ al mismo plano que el ABC, si de antemano no lo estaba, podemos siempre hacerle *girar*, *revolverle* si es necesario, y aun *aproximarle* al otro (*escolio* del mismo *número*), de modo que dos de los lados supuestos iguales en ambos triángulos se hagan paralelos y se hallen en la misma direccion ó sentido.

N.° 67. Escolio 2.°—Aunque, en la composicion de un triángulo, entran siempre *seis elementos*, á saber; *tres lados y tres ángulos*; no por eso debe creerse que, para tener seguridad de que dos triángulos son iguales, necesitamos saber *à priori* que los seis elementos del uno son respectivamente iguales á los seis elementos del otro. Basta en general saber que lo son *tres*.

Debe, sin embargo, observarse que entre los elementos supuestos iguales debe *á lo menos* dársenos *un lado*. Porque,
Fig. 46. sea el triángulo ABC (*fig.* 46) en el cual tiramos la recta B′C′ paralela á la BC; los dos triángulos ABC, A′B′C′, tienen sus tres ángulos respectivamente iguales, á saber; el ángulo A comun, y los ángulos B y B′, C y C′, respectivamente iguales por correspondientes (n.° 51.); y bien se ve, sin embargo, que dichos triángulos son *desiguales*.

Ademas, como entendemos (n.° 18.) por figuras *iguales* las que pueden *superponerse*, es claro que efectuada la superposicion de dos triángulos,

Á lados iguales se oponen ángulos iguales; — *y recíprocamente*. — Asi pues, la segunda condicion necesaria para que exista igualdad entre dos triángulos con *tres* elementos dados como iguales, es que cada *ángulo* ó cada *lado* dado como igual esté *opuesto* á un *lado* ó á un *ángulo* igual tambien en ambos triángulos.

Esta doble restriccion reduce mucho el número de casos de igualdad, los cuales, como facilmente pueden probarse, son, respecto de los triángulos oblicuángulos, solo *cuatro* esencialmente *diversos*: los *tres* principales, únicos de que haremos uso en lo sucesivo, han sido el objeto del n.° 63.

El caso de darse *dos ángulos respectivamente iguales y el lado opuesto á uno de ellos* en cada triángulo, se reduce al caso primero del n.° 63, porque (n.° 55.) el tercer ángulo debe tambien ser igual en ambos triángulos.

El cuarto caso, realmente diverso de los precedentes, lo esplicaremos mas adelante.

N.° 68. Escolio 3.° — El uso principal de la teoría de los triángulos iguales es simplificar muchas demostraciones, ahorrando superposiciones de figuras que, sin este socorro, habriamos de efectuar muchas veces para probar la igualdad de algunas rectas ó de algunos ángulos que entran en ellas.

§. IV. *Del cuadrilátero y de sus diferentes especies.*

Teorema I. (*Fig.* 47.) Fig. 47.

N.° 69. *En todo cuadrilátero* ABCD, *la suma de los ángulos es igual á* CUATRO RECTOS.

Tírese la diagonal AC; la suma de los ángulos del cuadrilátero es evidentemente igual á la de los ángulos de los triángulos ABC, ADC; pero en cada triángulo la suma de los ángulos vale *dos rectos* (n.° 55.); *luego*, &c.

Corolario. Si *dos ángulos* de un cuadrilátero son *rectos*, los otros dos son el uno *suplemento* del otro (n.° 28.).

N.° 70. Escolio. — *Dos ángulos que tienen sus lados recíprocamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios*; — [es decir, *iguales* si son de la misma especie, y *suplementarios* si son de especie distinta].

En efecto, observemos primero que, en todo ángulo dado

Fig. 48. BAC (*fig.* 48), podemos hallar un punto *interior* O, tal que las perpendiculares tiradas desde él á AB, AC, determinen con estos lados un cuadrilátero convexo ADOE. [Basta para esto que los dos ángulos OAB, OAC, sean agudos (n.° 57.); de modo, que si el ángulo BAC es agudo, todo punto interior goza de esa propiedad; y si es obtuso, puede tomarse un punto cualquiera de la *bisectriz* AL.]

Esto supuesto, sea la que quiera la posicion del ángulo B′A′C′ [que no está representado en la figura por ser muy variable] respecto del ángulo BAC, se puede al menos asegurar que los lados de aquel son (n.° 32.) respectivamente paralelos á los del ángulo DOE del cuadrilátero ADOE, y por consiguiente (n.° 53.), que los ángulos B′A′C′, DOE, son *iguales ó suplementarios.* Ahora bien, en el cuadrilátero ADOE, los ángulos en A y en O son *suplementarios* (n.° 69, *corol.*); luego los dos ángulos BAC, B′A′C′, son *suplementarios ó iguales*; *lo cual debiamos demostrar.*

Del paralelógramo y sus variedades.

N.° 71. Llámase PARALELÓGRAMO *un cuadrilátero* ABCD
Fig. 49. (*fig.* 49) *cuyos lados son paralelos de dos en dos.* — De donde resulta necesariamente,

1.° que — *Los paralelógramos* ABCD, A′B′C′D′, *son iguales cuando tienen un ángulo igual* [A = A′] *formado por dos lados respectivamente iguales.*

Porque si colocamos el ángulo A′ sobre el ángulo A, como ademas tenemos

$$A'B' = AB, \; A'C' = AC,$$

los puntos B′, C′, caerán respectivamente sobre los puntos B, C: por consiguiente las rectas B′D′, C′D′, deberán tomar las direcciones de BD y CD; pues de lo contrario resultaria que por un mismo punto, B ó C, se habian tirado dos paralelas á una misma recta, *lo cual es absurdo* (n.° 34.) — Asi pues las dos figuras se confundirán exactamente.

2.° que — *En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales* (n.° 52, *corolario* 1.°).

Y 3.° que RECÍPROCAMENTE: — *Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son iguales, la figura es un paralelógramo.*

En efecto, tenemos (n.° 69.)

$$A + B + D + C = 4 \text{ ángulos rectos};$$

pero, por hipótesis,

$$A = D,\ B = C;$$

luego aquella igualdad equivale á estas otras dos:

$$\left\{\begin{matrix} 2A + 2B = 4 \textit{ rectos} \\ 2D + 2C = 4 \textit{ rectos} \end{matrix}\right\}, \text{ de donde } \left\{\begin{matrix} A + B = 2 \textit{ rectos} \\ D + C = 2 \textit{ rectos} \end{matrix}\right\}.$$

Asi pues (n. °47.) los lados AC y BD, AB y CD, son paralelos de dos en dos. *L. C. D. D.*

Teorema II. (*Fig.* 49.) Fig. 49.

N.° 72. *En todo paralelógramo* ABCD, *los lados opuestos* [AB y CD, AC y BD] *son iguales de dos en dos.*

Tiremos la diagonal AD, y comparemos los dos triángulos ABD, ACD: desde luego tienen el lado AD comun; y ademas, los ángulos DAB, ADC, son iguales (n.° 51.) por alternos-internos, y los ángulos CAD, ADB, son tambien iguales por la misma razon. Asi pues, los dos triángulos son iguales por tener un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales. Luego los lados BD, AC, opuestos á los ángulos iguales DAB, ADC, son iguales, y lo mismo los lados CD, AB, opuestos á los ángulos iguales CAD, ADB (*véase* el *escolio* 2.° del n.° 67.). *L. C. D. D.*

Recíprocamente: — *Si los lados opuestos de un cuadrilátero* ABDC *son iguales de dos en dos, la figura es un paralelógramo*;

Porque entonces los dos triángulos ABD, ADC, tienen los tres lados respectivamente iguales; de donde se infiere (n.° 67, *escolio*):

ángulo BAD = *ángulo* ADC, y *ángulo* DAC = *ángulo* ADB; luego (n.° 46.) las rectas AB y DC, BD y AC, son paralelas de dos en dos.

N.° 73. Escolio. — El teorema anterior puede tambien enunciarse del modo siguiente:

Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales (*): — proposicion que comprende, como caso particular, al teorema 1.° del número 44.

(*) Puede demostrarse esta proposicion sin recurrir á la teoría

Fig. 49. **Teorema III.** (*Fig.* 49.)

N.° 74. ***Si dos lados opuestos*, AB, CD, *de un cuadrilátero* ABCD, *son iguales y paralelos, la figura es un paralelógramo.***

En efecto, tiremos la diagonal AD: los dos triángulos ABD, ACD, tienen el lado AD comun, y AB = CD por el supuesto; ademas, siendo AB paralela á CD, los ángulos DAB, ADC, son iguales (n.° 51.) por alternos-internos. Asi pues, los dos triángulos son iguales por tener un ángulo igual formado por dos lados respectivamente iguales; de donde resulta el ángulo ADB opuesto al lado AB, igual al ángulo CAD opuesto al lado CD; luego las rectas AC, BD, son paralelas (n.° 46.). — *Luego*, &c.

N.° 75. Corolario 1.°—*En todo paralelógramo* ABCD
Fig. 49. (*fig.* 49), *la recta* [EF ó GH] *que junta los puntos medios* [E, F, ó G, H] *de dos lados paralelos, es igual y paralela á los otros dos.*

Porque, de ser iguales las rectas AE, BF, como mitades de las líneas iguales AC, BD, y de ser AE paralela á BF, resulta (n.° 74.) que la figura ABFE es un paralelógramo; y que se tiene

$$EF = AB = CD.$$

Del mismo modo se demostraria que

$$GH = AC = BD.$$

Corolario 2.° *Juntando las estremidades* E, F, *de dos*
Fig. 29. *perpendiculares iguales*, GE, HF (*fig.* 29), *tiradas á una*

---

de la igualdad de los triángulos, por la superposicion de la figuras ACD, ABD:—Hágase girar, como en el n.° 46., el triángulo ACD al rededor de I, punto medio de AD, de modo que IA venga á colocarse sobre ID, é ID sobre IA. Supuesto que, en virtud del paralelismo, tenemos

ángulo CAD = *ángulo* ADB, y *ángulo* CDA = *ángulo* BAD,

las rectas AC, DC, tomarán las direcciones de las DB, AB, y recíprocamente: por consiguiente las dos figuras ABD, ACD, se confundirán del todo, y darán

$$AC = BD, \ AB = DC.$$

misma recta AB [en la misma region], *se obtiene una paralela á esta recta.*

Tambien es esta una consecuencia evidente del teorema principal.

Teorema IV. (*Fig.* 50.) Fig. 50.

N.° 76. *Las diagonales*, AD, BC, *de un paralelógramo se cortan mutuamente en dos partes iguales.*

Sea el punto O el de interseccion de dichas diagonales; los triángulos AOC, DOB, son iguales por tener un lado igual [$AC = BD$] adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, á saber;

$$CAO = ODB, \quad ACO = OBD;$$

luego (n.° 67.).

$$AO = OD, \quad BO = OC.$$

Advert. El punto O se llama *centro* del paralelógramo.

Recíprocamente: — *Si las diagonales de un cuadriláte-ro se cortan mutuamente en dos partes iguales, la figura es un paralelógramo.*

Porque, de $OA = OD$, y $BO = OC$, se deduce la igualdad de los triángulos AOC, DOB (n.° 63, 2.° *caso*); de donde, por consiguiente, se infiere

$$AB = CD, \quad AC = BD;$$

asi pues, la figura ABCD es un paralelógramo (n.° 74.).

Escolio. *La mayor diagonal*, AD, *de las dos de un paralelógramo* ABCD (*fig.* 50), *es la opuesta al mayor ángulo.* Fig. 50.

En efecto, los dos triángulos ACD, CAB, tienen comun el lado AC; y el lado CD igual al AB: ademas, el ángulo ACD es mayor que el CAB; luego, en virtud del *escolio* n.° 64, el lado AD, opuesto á ACD, debe ser mayor que el lado CB, opuesto á CAB.

Del rombo.

N.° 77. Llámase **rombo**, un *cuadrilátero* ABCD (*fig.* 51) *que tiene sus cuatro lados iguales.* Fig. 51.

Siendo el rombo, segun esta definicion (n.° 72, *recíp.*), una variedad del paralelógramo, goza necesariamente de todas las propiedades de este. — Asi, por ejemplo (n.° 71.), *Dos rombos son iguales cuando tienen igual un ángulo y un lado.*

Pero hay otra propiedad muy importante, particular del rombo, que vamos á demostrar.

Fig. 51. **Teorema V.** (*Fig.* 51.)

N.º 78. *Las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.*

Comparemos los dos triángulos AOB, AOC; y veremos que tienen comun el lado AO, el lado OC igual al lado OB, (n.º 76.), y el lado AC igual al AB, por la naturaleza del rombo. Luego estos dos triángulos son iguales (n.º 63, 3.er *caso*); y darán

$$\text{ángulo } AOC = \text{ángulo } AOB.$$

Por consiguiente los cuatro ángulos en O son rectos.

Recíprocamente:—*Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mutuamente en partes iguales y en ángulo recto, la figura es un rombo.*

Porque entonces los cuatro triángulos AOB, AOC, BOD, COD, son iguales (n.º 63, 3.er caso); y dan

$$AB = AC = BD = CD.$$

Escolio. Volviendo á la proposicion directa, se ve, en virtud de la igualdad de los triángulos AOB, AOC, que los ángulos CAO, OAB, opuestos á los lados iguales OC, OB, son iguales; de donde resulta que

En un rombo, cada diagonal divide en dos partes iguales los ángulos que le corresponden [es decir, los ángulos en cuyos vértices tiene sus estremos].

Estas tres proposiciones pueden tambien deducirse facilmente de la teoría de las perpendiculares (n.º 41.), ó de la de los triángulos isósceles (n.º 61.), haciendo abstraccion de la igualdad de los triángulos.

Del rectángulo.

N.º 79. El rectángulo es un cuadrilátero ABDC (*figura* 52) *cuyos cuatro ángulos son rectos.*—Tambien puede decirse que es un paralelógramo cuyos lados contiguos son

Fig. 52.

perpendiculares entre sí; de donde resulta, en virtud de la teoría de las paralelas, que sus cuatro ángulos son *rectos*.

Dos rectangulos son iguales cuando tienen dos lados contiguos respectivamente iguales.

La propiedad característica del rectángulo, que le distingue de los demas paralelógramos, consiste en que:

TEOREMA VI. (*Fig.* 52.) Fig. 52.

Las dos diagonales de un rectángulo son iguales.

En efecto, los dos triángulos BAC, ACD, son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales; á saber: el ángulo recto CAB = ACD, AC comun, y AB = CD; de donde se deduce BC = AD.

RECÍPROCAMENTE:—*Si las diagonales de un cuadilátero* ABDC *son iguales y se cortan en partes iguales, la figura es un rectángulo.*

Desde luego ya sabemos que ABDC es un paralelógramo (n.º 76, *recíproc.*); por consiguiente, solo nos falta probar que los ángulos en A y en C son iguales, puesto que su suma vale dos *rectos* (n.º 51.). En efecto, por hipótesis, y en virtud de las propiedades del paralelógramo, tenemos

$$AO = OC = OB;$$

de donde se infiere que los triángulos AOC, AOB, son isósceles, y dan (n.º 58.)

$$\text{ángulo } CAO = \text{ángulo } ACO,$$
$$\text{ángulo } OAB = \text{ángulo } OBA = \text{ángulo } OCD;$$

luego

$$CAO + OAB = ACO + OCD, \text{ ó } CAB = ACD.$$

L. C. D. D.

Del cuadrado. (*Fig.* 53.) Fig. 53.

N.º 80. El CUADRADO *es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos.*

Esta figura es por consiguiente á la vez un caso particular del rombo y del rectángulo. — [Lo que la distingue del rombo es el tener los cuatro ángulos rectos.]

Asi pues — *El cuadrado tiene iguales sus dos diagona-*

les, como el rectángulo; — y dichas diagonales se cortan *en ángulos rectos* como las del rombo.

Ademas, los cuatro triángulos AOB, AOC, COD, DOB, son *isósceles, rectángulos,* é *iguales* entre sí, es decir, superponibles; mientras que en el rombo (*fig.* 51.) son dichos triángulos rectángulos tambien, iguales y superponibles, pero no *isósceles*; y en el rectángulo son isósceles sin ser iguales.

Fig. 51.

En una palabra, el cuadrado, por su forma simétrica, puede ser considerado como el mas simple de los polígonos.

Del trapecio.

N.º 81. No podemos menos de dar á conocer aquí otra especie de cuadrilátero cuyas propiedades se enlazan naturalmente con las del paralelógramo.

Fig. 54. El TRAPECIO es un cuadrilátero ABDC (*fig.* 54) *que solo tiene dos lados*, AB, CD, *paralelos.*—Esos dos lados se llaman *bases* del trapecio; y la perpendicular IK comun á ambas, se llama *altura* del cuadrilátero.—Los lados no paralelos se llaman *laterales*.

Fig. 54.

TEOREMA VII. (*Fig.* 54.)

En todo trapecio ABCD, *la recta* EF *que junta los puntos medios de los lados no paralelos, es paralela á las bases.*

Tiremos, por el punto F, la recta GFH paralela á AC, y prolonguémosla hasta encontrar en H á la CD tambien prolongada: asi obtenemos dos triángulos GFB, DFH, iguales entre sí por tener un lado FB = FD, adyacente á ángulos iguales; á saber: los ángulos en F iguales entre sí (n.º 29.); y el ángulo FBG igual al ángulo FDH (n.º 51.). De aqui resulta necesariamente FG = FH. Ademas, por construccion, GH es paralela á AC; luego (n.º 75, *corol.* 1.º) EF es paralela á AB y á CD. *L. C. D. D.*

RECÍPROCAMENTE:—Si una recta pasa por el *punto medio* E de uno de los lados no paralelos, y es *paralela* á las bases, debe tambien pasar por el *punto medio* F del otro lado.—Porque si asi no fuera, resultaria que se podrian tirar por el punto E dos paralelas á AB.

N.º 82. *Escolio* 1.º—De la igualdad de los triángulos GFB, DFH, se deduce tambien GB = DH.—Esto supuesto, se tiene primero, á causa de los paralelógramos AGFE, CEFH,

$$EF = AG = CH;$$

pero la figura da tambien

$$AB = AG + GB, \quad CD = CH - DH;$$

de donde, sumando,

$$AB + CD = AG + GB + CH - DH;$$

ó, suprimiendo los términos iguales, $+GB$, $-DH$, que se destruyen,

$$AB + CD = AG + CH = 2AG = 2EF.$$

Luego finalmente

$$EF = \frac{AB + CD.}{2};$$

lo cual prueba que

La recta que junta los puntos medios de los lados no paralelos es igual á la semi-suma de las bases.

Escolio 2.° La misma recta está *á igual distancia* de las dos *bases.* — Porque tirando por el punto E la perpendicular MEN, podrá probarse como antes la igualdad de los triángulos AEM, NEC; de donde, por consiguiente, se deducirá $EM = EN$.

Escolio 3.° Las dos propiedades comprendidas en el *teorema* VII y el *primer escolio*, son aplicables al triángulo, que puede considerarse como un trapecio que tiene *nula* una de las bases. — Asi, puede decirse que

En todo triángulo, la recta que junta los puntos medios de dos lados cualesquiera, es paralela al tercer lado é igual á su mitad: — proposicion que podria tambien demostrarse directamente por la consideracion del triángulo CAB de la figura, tirando por el punto O, medio de CB, la recta ROS paralela á CA, y comparando como antes los triángulos OBR, OCS.

§. V. *De los polígonos convexos en general.*

[*Véase* lo dicho en los números 35 y *siguientes* sobre los polígonos en general, y sobre los convexos en particular.]

LEMA. (*Fig.* 55.) Fig. 55.

N.° 83. *Todo polígono*, ABCDEFG, *puede descompo-*

nerse en tantos triángulos como lados tiene, *menos* DOS.

Para esto, basta tirar por uno de los vértices, A, diagonales á todos los otros. Es evidente que cada uno de los triángulos *estremos*, ABC, AGF, se lleva *dos* lados del polígono, mientras á cada triángulo *intermedio* solo corresponde *uno*.

Luego, designando por n el número total de lados de un polígono, será $(n-2)$ la espresion del número total de triángulos en que puede dividirse.

ESCOLIO. Tambien se puede efectuar *la descomposicion de un polígono en triángulos*, juntando un punto interior cual-
Fig. 56. quiera O (*fig.* 56) con todos los vértices del polígono, en cuyo caso resultan evidentemente tantos triángulos como lados hay.

Fig. 55.

TEOREMA I. (*Fig.* 55.)

N.° 84. *La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual á tantas veces* DOS RECTOS, *como unidades tiene el número de sus lados*, *menos* DOS.

En efecto, si desde el punto A tiramos diagonales á todos los demas vértices, la suma de los ángulos del polígono equivaldrá evidentemente á la de todos los ángulos de los triángulos resultantes. Ahora bien, en cada triángulo, la suma de los tres ángulos es igual á *dos rectos* (n.° 55.); y como hay tantos triángulos como lados, *menos dos* (n.° 83.), resulta, &c.

N.° 85. ESCOLIO 1.°—Sea n el número de lados; la espresion abreviada de la suma de los ángulos del polígono, será

$$2\,(n-2),\ \text{ó}\ 2n-4$$

efectuando la multiplicacion por las reglas de la multiplicacion algebráica.

La última espresion nos ofrece este enunciado:

La suma de los ángulos de un polígono es igual á tantas veces un recto cuantas unidades tiene el duplo del número de lados, *menos cuatro*.

Se demuestra la proposicion enunciada de este modo, recurriendo al segundo modo de descomponer un polígono en
Fig. 56. triángulos indicado en el *núm.* 83. Es claro, en efecto (*fig.* 56), que la suma de los ángulos del polígono equivale á la suma de los ángulos de los triángulos que tienen un vértice en O, *disminuida* en la suma de los ángulos formados alrededor de dicho punto, los cuales equivalen á 4 rectos (n.° 31.); luego, &c.

Hagamos sucesivamente, en las dos espresiones precedentes,
$n=3$, $n=4$, $n=5$, $n=6$,...; y obtendremos,
de la primera,
2×1, 2×2, 2×3, 2×4,..., ó $2, 4, 6, 8$,...,
y de la segunda,
$6-4$, $8-4$, $10-4$, $12-4$,..., ó $2, 4, 6, 8$,...,
segun que los polígonos son de $3, 4, 5, 6$,..., lados,
resultado conforme con los teoremas de los n.os 55 y 69.

N.° 86. Escolio 2°.—Si el polígono dado es *equiángulo*, es decir, si todos sus ángulos son iguales, se tiene por valor de cada uno

$$\frac{2(n-2)}{n}, \text{ ó } \frac{2n-4}{n}.$$

Asi, en el triángulo *equilátero* (n.° 58.), cada uno de los ángulos vale $\frac{6-4}{3}$ ó $\frac{2}{3}$ de ángulo recto.

En el *cuadrado* (n.° 80.), cada ángulo vale $\frac{8-4}{4}$, ó lo que es lo mismo, *un* recto.

Asi se hallaria $\frac{6}{5}, \frac{8}{6}, \frac{10}{7}$,..., para valor del ángulo del *pentágono*, del *exágono*, del *eptágono*,..., supuesto que fueran equiángulos.

La espresion $\frac{2n-4}{n}$, que equivale á $2-\frac{4}{n}$, prueba que

En los polígonos equiángulos de mas de cuatro, los ángulos son siempre obtusos.

Teorema II. (*Figs.* 55 y 56.) Figs. 55 y 56.

N.° 87. *En todo polígono convexo* ABCDEFG, *si se prolongan todos los lados en el mismo sentido* (*), *la suma*

(*) Esta espresion, *en el mismo sentido*, significa que, dando *de los ángulos esteriores*, *a*BC, *b*CD, *c*DE,..., que resultan, es *igual á* 4 rectos.

En efecto, se ve, en la *figura* y en virtud del n.º 29, que los ángulos internos y esternos, formados en los puntos A, B, C,..., sumados equivalen *á tantas veces dos rectos como vértices* hay, ó *lados* tiene el polígono; por consiguiente, esta suma escede á la de los ángulos *internos* solos en 4 rectos; luego valdrán *cuatro* rectos la suma de los ángulos *esternos.*

Fig. 57. *De otro modo*:—Si desde un punto O (*fig.* 57) tomado arbitrariamente en el plano del polígono, se tiran las rectas O*a*′, O*b*′, O*c*′,..., respectivamente paralelas á A*a*, B*b*, C*c*,..., los ángulos *a*′O*b*′ y *a*B*b*, *b*′O*c*′ y *b*C*c*,..., son iguales de dos en dos (n.º 52.); luego la suma de los *a*′O*b*′, *b*′O*c*′,..., será igual á la de los *a*B*b*, *b*C*c*... Pero los primeros valen 4 ángulos rectos (n.º 31); luego tambien valdrán 4 rectos los segundos.

Escolio. *Un polígono convexo no puede tener mas de tres ángulos agudos;*

Porque con solo haber *cuatro*, resultaria que la suma sola de los cuatro ángulos esternos correspondientes valdria mas de *cuatro* rectos.

Condiciones de igualdad entre dos polígonos convexos.

Teorema III.

N.º 88. *Dos polígonos convexos se confunden necesariamente cuando tienen comunes los vértices.*

Desde luego, es claro que coinciden todas las rectas que (sean lados ó diagonales) juntan de dos en dos los dichos vértices.—Ademas, *no puede ser que un lado* del primer polígono *sea diagonal del segundo*; porque, si lo fuera, resultaria (n.º 36, 3.º) que los vértices del primero no estarian todos situados en la misma region respecto del tal lado; lo cual implica *contradiccion* con la naturaleza de los polígonos convexos (n.º 36.).

Luego, si todos los lados del uno coinciden con los del otro respectivamente, ambos polígonos se confunden y son iguales.

---

la vuelta al polígono desde A, por ejemplo, hácia B, C, D,..., sería necesario, antes de pasar del lado AB al siguiente BC, de este al CD,..., prolongar siempre *hácia adelante*, por ejemplo, el lado que se dejaba, AB*a*, BC*b*, CD*c*,...

TEOREMA IV. (*Fig.* 58.) Fig. 58.

N.º 89. *Dos polígonos* ABCDEF, A′B′C′D′E′F′, *son iguales cuando, ademas de tener igual un lado* [AF = A′F′], *tienen iguales respectivamente, y dispuestas en el mismo orden, las distancias de los estremos* [A y A′, F y F′] *de dicho lado á los demas vértices* B, C, D,.... B′, C′, D′,...

[Es decir, si tienen

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad AD = A'D',...,$$

y $$FB = F'B', \quad FC = F'C', \quad FD = F'D',....]$$

En efecto, movamos [como en el n.º 62.] al segundo polígono en su plano, de modo que el lado A′F′ venga á colocarse sobre su igual AF.—Supuesto que, por hipótesis, tenemos

$$AB = A'B', \quad FB = F'B',$$

los dos triángulos ABF A′B′F′, son iguales (n.º 63, 3.er caso), y se confundirán exactamente: luego el punto B′ caerá en B.—De la misma manera, siendo

$$AC = A'C', \quad FC = F'C',$$

el punto C′ caerá en C. Y asi iriamos viendo cómo deben coincidir todos los demas vértices D y D′, E y E′,... de los dos polígonos.—Luego estos (n.º 88.) se confundirán exactamente y serán iguales.

ESCOLIO 1.º Cuando decimos en el enunciado, que las distancias iguales, AB y A′B′, AC y A′C′,..., FB y F′B′, FC y F′C′,..., estan *dispuestas en el mismo orden*, queremos significar que las líneas A′B′, A′C′,..., F′B′, F′C′,..., siguen entre sí el mismo orden de posicion relativa, que sus iguales AB, AC,..., FB, FC,...; en otros términos, dichas líneas pueden siempre suponerse respectivamente *paralelas* de dos en dos y dirigidas en el mismo sentido.—(Véase el *escolio* del *lema* n.º 62.)

Debe sin embargo tenerse entendido, que el teorema precedente no falsearía aun cuando los dos polígonos no tuvieran la posicion indicada por la *fig.* 58. Fig. 58.

N.º 90. ESCOLIO 2.º—Si designamos por n el número de lados de cada polígono, el número de datos supuestos iguales en el teorema precedente, es evidentemente igual á $(2n-3)$. Porque el número de los vértices distintos de A, F, ó A′, F′, es $(n-2)$ en cada polígono, y por consiguiente habrá $2(n-2)$, ó $(2n-4)$, pares de distancias iguales

$$AB = A'B',\ AC = A'C', \ldots, \text{ y } FB = F'B',\ FC = F'C', \ldots$$

Pero al número $(2n-4)$ es preciso añadir 1, á causa de $AF = A'F'$: luego, el número total de datos resulta igual á

$$(2n-4+1) \text{ ó } (2n-3).$$

De esto se puede concluir, por induccion, que el número de datos iguales necesario para admitir la igualdad de dos polígonos, es $(2n-3)$, espresando n el número de lados.

Asi, en el triángulo el número de datos es $2 \times 3 - 3$, ó 3; en el cuadrilátero, $2 \times 4 - 3$, ó 5; &c.

Pero hay que poner ciertas restricciones, como hicimos respecto del triángulo (n.º 67.). Por ejemplo, si se toman en consideracion los ángulos, es necesario que *los ángulos* que se supongan iguales esten comprendidos, ó puedan considerarse como comprendidos entre *lados* respectivamente iguales, cuya condicion es consecuencia necesaria de la naturaleza de las figuras superponibles.

Ademas, nunca deben darse mas de $(n-1)$ ángulos iguales en las dos figuras, porque (n.º 84.) la *suma de los ángulos* debe ser la *misma* en ambas, teniendo un mismo número de lados; &c.

Hé aqui tres casos de igualdad que conviene conocer:

Fig. 58.

Teorema V. (*Fig.* 58.)

N.º 91. *Dos polígonos* [de n lados], ABCDEF, A'B'C'D'E'F', *son iguales*,

1.º *Cuando tienen* $(n-1)$ *lados consecutivos respectivamente iguales, é iguales tambien los* $(n-2)$ *ángulos formados por dichos lados*;

2.º *Cuando tienen iguales* $(n-2)$ *lados consecutivos, é iguales tambien los ángulos que dichos lados forman entre sí y con los dos restantes*:

3.º *Cuando constan del mismo número de triángulos respectivamente iguales y colocados del mismo modo* [ABC y A'B'C', ACD y A'C'D',...].

La demostracion de los dos casos primeros se hace por el método de superposicion indicado al fin del n.º 62. Unicamente observaremos que, en el primer caso, cuando se haya efectuado la superposicion del penúltimo lado $D'E'$ con su igual DE, como los puntos F y F', E y E' habrán coincidido, el último lado $E'F'$ será necesariamente igual á EF; y los dos ángulos $D'E'F'$, $E'F'A'$, serán tambien respectivamente iguales á los DEF, EFA, á causa de la superposicion. — Luego hay bastante con $(2n-3)$ elementos dados iguales.

El mismo raciocinio debe hacerse en el segundo caso.

En el tercero pueden superponerse directamente los triángulos supuestos iguales en los dos polígonos, quedando estos en consecuencia superpuestos; — *ó bien* puede decirse: — Los triángulos $A'B'C'$, ABC, son iguales, y darán iguales sus lados y sus ángulos respectivamente: lo mismo los triángulos $A'C'D'$, ACD, y los demas. — De esta consideracion es facil concluir, — 1.° que los lados de los dos polígonos son respectivamente iguales; — y 2.° que sus ángulos son tambien iguales por constar de ángulos iguales de los triángulos dados. — De este modo el tercer caso se comprende en los dos primeros.

N.° 92. Escolio. — Observaremos respecto del último caso, que, como tenemos (n.° 84.) en cada polígono, $(n-2)$ triángulos de los cuales el primero exige tres datos y los demas dos cada uno, resultan

$$3+2(n-3), \text{ ó } 3+2n-6, \text{ ó finalmente } (2n-3)$$

datos supuestos *iguales*, como arriba.

Advertimos ademas en este caso, que por la espresion *colocados del mismo modo*, debe entenderse que los triángulos iguales componentes de los polígonos, estan de tal modo dispuestos que sus ángulos iguales reunidos forman ángulos iguales respectivos en ambos polígonos. De lo contrario, los polígonos, aunque compuestos de partes respectivamente iguales y superponibles, no podrian uno á otro superponerse.

N.° 93. Escolio general *sobre todos los casos de igualdad precedentes.*

Las *recíprocas* de las proposiciones comprendidas en los enunciados de los teoremas IV y V son consecuencias necesarias y evidentes de la naturaleza de las *figuras iguales y superponibles.*

Llámanse *lados* y *ángulos homólogos*, los lados y los ángulos respectivamente superponibles en dos figuras declaradas iguales: *vértices homólogos*, los de ángulos homólogos: *diagonales homólogas*, las que juntan dos vértices homólogos. —

En general, llámanse *puntos homólogos*, dos puntos que, con las estremidades de dos lados homólogos, forman dos triángulos iguales y *dispuestos del mismo modo* en ambos polígonos.—Finalmente, *rectas homólogas* son dos rectas que juntan puntos homólogos; y las porciones de ellas terminadas en los puntos dichos necesariamente son *iguales*.

§. VI. *Teoremas varios.*

Concluiremos este capítulo con algunas proposiciones muy curiosas ó bastante útiles, aunque no forman parte esencial de la teoría.

Fig. 59. **Teorema I.** (*Fig.* 59.)

N.° 94. *En todo triángulo* ABC, *un ángulo cualquiera* C *es* RECTO, AGUDO, *ú* OBTUSO, *segun que la recta* CD *que junta su vértice con el punto medio* D *del lado opuesto* AB, *es* IGUAL, MAYOR, *ó* MENOR, *que la mitad* AD *de dicho lado.*

1.° Sea $CD = AD = DB$;

resulta (n.° 58.)

$$\textit{ángulo } CAD = \textit{ángulo } ACD,\quad \textit{ángulo } CBD = \textit{ángulo } BCD;$$

lo cual prueba que el ángulo total C es igual á $A + B$.

Pero tenemos (n.° 55.)

$$A + B + C = 2\ \textit{rectos};$$

luego el ángulo, mitad de esta suma, vale *un recto*.

2.° Sea $CD > AD$ ó $> DB$;

resulta (n.° 59.)

$$CAD > ACD,\quad CBD > BCD;$$

de donde *ángulo* A + *ángulo* $B > ACD + BCD$, ó $A + B > C$;

y como tenemos $A + B + C = 2$ *rectos*,

resulta que C debe ser necesariamente menor que *un recto*, es decir, *agudo*.

3.° Sea $CD < AD$ ó $< BD$;

será $CAD < ACD,\quad CBD < BCD$;

de donde $A + B < C$;

pero $A + B + C = 2$ *rectos*;

luego, $C > 1$ *recto*.

Escolio. Por medio de esta proposicion se puede conocer inmediatamente la especie de un ángulo cualquiera en un triángulo dado.

Teorema II. (*Fig.* 60.)

Fig. 60.

N.° 95. *Las bisectrices* AA′, BB′, CC′, *de los tres ángulos de un triángulo* ABC, *se cortan en un mismo punto* O.

En efecto, consideremos primero las dos bisectrices CC′ y AA′; hemos visto (n.° 43.) que cualquier punto de la primera está *equidistante* de los lados CA y CB, y que cualquier punto de la segunda está tambien equidistante de AC y de AB; luego el punto O en que ambas se encuentran, está á igual distancia de las tres rectas AC, CB, BA. Luego dicho punto (n.° 43, *escol.* 1.°) corresponde tambien á la bisectriz BB′.

Escolio. Si se prolongan los lados AC, AB, hasta L, I, y se consideran las bisectrices de los ángulos LCB, CBI [que, segun vimos en el número 43, *escol.* 3.°, forman ángulos rectos con CC′ y BB′], esas dos bisectrices *se cortan* en un punto O′ situado en la bisectriz del ángulo A.—Esto es evidente, porque el punto O′ está equidistante de AC y de AB.

Teorema III. (*Fig.* 61.)

Fig. 61.

N.° 96. *Las perpendiculares levantadas en los puntos medios* A′, B′, C′, *de los tres lados de un triángulo, se cortan en un mismo punto* O.

Desde luego, sabemos que las dos perpendiculares C′I, B′K, se encuentran siempre (n.° 50, *escol.* 2.°) en un punto O, que dista igualmente (n.° 41.) de A y de B, de A y de C, y por consiguiente de los dos puntos B, C. Luego ese mismo punto O pertenece (n.° 41, *escol* 1.°) á la perpendicular levantada en A′, medio de BC.

Escolio. El encuentro de las tres perpendiculares puède verificarse, unas veces *dentro* y otras *fuera* del triángulo.

Teorema IV. (*Fig.* 62.)

Fig. 62.

N.° 97. *Las perpendiculares* AA′, BB′, CC′, *bajadas des-*

de los vértices de un triángulo á los lados respectivamente opuestos, se cortan en un mismo punto.

Tiremos, por los puntos A, B, C, las rectas B″C″, A″C″, A″B″, respectivamente paralelas á BC, AC, AB.—Supuesto que, por construccion, es CB paralela á AB″, y AB paralela á CB″, resulta (n.º 71.) que ABCB″, ACBC″, son paralelógramos; por consiguiente, tendremos (n.º 72.)

$$CB = AB'' = AC'';$$

de donde se infiere que A es el punto medio de B″C″. Del mismo modo se probaria que los puntos B y C son los medios respectivos de A″C″, A″B″; luego las perpendiculares AA′, BB′, CC′, se hallan levantadas en los puntos medios de los lados A″B″, A″C″, B″C″, del triángulo A″B″C″; y la proposicion se reduce á la del teorema precedente.

Escolio. El encuentro de las tres perpendiculares puede tambien verificarse unas veces *dentro* y otras *fuera* del triángulo.

Fig. 63.

Teorema V. (*Fig.* 63.)

N.º 98. *Las rectas* AA′, BB′, CC′, *tiradas desde los vértices de un triángulo á los puntos medios de los lados respectivamente opuestos, se cortan en un mismo punto.*

Consideremos primero las dos rectas AA′, CC′; y sea O su punto de concurso. Tiremos la recta A′C′, y por los puntos A″, C″, medios de OA, OC, tiremos la A″C″. Pasando la recta A′C′ por los puntos medios de CB y AB, es paralela á AC (n.º 82, *escol.* 3.º); por la misma razon, la A″C″ es tambien paralela á AC; y ademas cada una de ellas es igual á la mitad de AC (n.º 82, *escol.* 3.º).

Esto supuesto, los triángulos OA′C′, OA″C″, son iguales por tener un lado igual [A′C′ = A″C″] adyacente á dos ángulos respectivamente iguales [C′A′O = C″A″O, A′C′O = A″C″O (n.º 51.)]; y de su igualdad puede concluirse que OC′ = OC″, OA′ = OA″. Pero ademas tenemos, por construccion, OC″ = C″C, OA″ = A″A; luego el punto O está situado en las rectas AA′ y CC′, al tercio de cada cual, partiendo desde CB y de AB.

Del mismo modo se demostraria, considerando las rectas AA′, BB′, que su punto de interseccion debe hallarse al tercio de AA′, partiendo desde CB: luego *necesariamente* las tres rectas AA′, BB′, CC′, se encuentran en un mismo punto *interior* O.

Escolio. Este punto se halla situado, respecto de cada *lado del triángulo*, en la recta que junta el *punto medio* del lado con el *vértice opuesto*, en el *tercio* de su longitud contando desde el lado, y, á los *dos tercios* contando desde el vértice. — Lo cual es consecuencia natural de la demostracion que acabamos de dar.

Teorema VI. (*Fig.* 64.) Fig. 64.

N.º 99. *Tírense en un paralelógramo cualquiera* ABDC, *las bisectrices de los cuatro ángulos:*

Si se junta el punto de encuentro E *de las bisectrices de dos ángulos adyacentes á un mismo lado* AC, *con el punto de encuentro* F *de las bisectrices de los ángulos adyacentes al lado* BD *opuesto al otro, la recta* EF *que resulta es* 1.º — *paralela á los otros dos lados;* 2.º — *igual á la diferencia de los lados contiguos* [AB — AC].

Prolonguemos primero las bisectrices opuestas, CE, BF, hasta sus encuentros respectivos en G y en K con AB y CD.

Por ser paralelas AB y CD, el ángulo AGC es igual al ángulo GCD, y por consiguiente al ACG, que, como GCD, es mitad de ACD. Ademas, los dos ángulos ACG, KBA, son tambien iguales por ser mitades de los ángulos iguales ACD, ABD; luego

ángulo CGA = *ángulo* KBA.

Luego las dos rectas CG, KB, son paralelas (n.º 52, *recíp.*); y la figura CGBK es un paralelógramo.

Ademas, el triángulo ACG es isósceles, á causa de la igualdad de los ángulos en C y en G; por consiguiente (n.º 61.) la bisectriz AE divide á CG en dos partes iguales; y será CE = EG. — Del mismo modo se demostraria, considerando el triángulo DKB, que KF = FB; luego

1.º EF es paralela á AB y á CD;
2.º EF = GB = AB — AG = AB — AC.

L. C. D. D.

Escolio. Los dos triángulos AEC, AEG, son rectángulos (n.º 21.), y tambien los DFK, DFB, de lo cual resulta que prolongando la DF hasta su encuentro en I con CG, y la AE hasta su encuentro en L con BK, se forma un paralelógramo *rectángulo* EIFL, que se transformaria en *cuadrado* si fuera rectangular la figura propuesta, porque entonces las diagonales EF, IL, respectivamente paralelas á AB, CD, y á AC, BD, se cortan en ángulos rectos (*véase* el n.º 80.). Finalmente, el rectángulo resultante *desaparece* ó se *reduce á un punto* cuando la figura propuesta es un rombo, porque entonces se confunden de dos en dos las bisectrices.

Fig. 47. TEOREMA VII. (*Fig.* 47.)

N.º 99 *bis.* *En todo cuadrilátero* ABCD, *las dos rectas* EF, GK, *que juntan los puntos medios respectivos de los lados opuestos, y la recta* IL, *que junta los puntos medios de las dos diagonales, concurren en un mismo punto, y se dividen mutuamente en dos partes iguales.*

Tírense las rectas IG, GL, LK, KI. Puesto que en el triángulo BAD, los puntos L y G son los medios de BD y AD, resulta (n.º 82.) que la recta LG es paralela á AB é igual á su mitad. Asimismo, en el triángulo ABC, la recta IK, que junta los puntos medios de CA y CB, es paralela á AB é igual á su mitad. Luego las rectas LG, IK, son iguales y paralelas; por consiguiente (n.º 74.) la figura IGLK es un paralelógramo que tiene por diagonales á IL y GK: luego, estas rectas deben cortarse en O, punto medio de cada una de ellas (n.º 76.).

Del mismo modo se probaria que la figura EIFL es un paralelógramo que tiene por diagonales á IL, EF. De donde resulta que la recta EF pasa por el mismo punto O, quedando alli dividida en dos partes iguales;—*lo cual demuestra el teorema enunciado.*

Advert. Cuando ABCD es un paralelógramo, los puntos I, L, se confunden con el punto O; y las figuras IGLK, EIFL, se reducen á las dos rectas GK, EF.

Fig. 65. TEOREMA VIII. (*Fig.* 65.)

N.º 100. *En un polígono convexo de* n *lados, el número total de diagonales está representado por* $\frac{(n-3)\,n}{2}$.

Concibamos que se junta un vértice A con todos los otros [escepto los inmediatos B, G]; es claro que resultarán $(n-3)$ diagonales.

Como podemos hacer el mismo raciocinio respecto de cada uno de los n vértices, resulta que el número total de rectas de union tirada, habria de ser $(n-3)\,n$.

Pero observemos que, obrando asi, trazábamos *dos veces* cada recta; luego el número verdadero de diagonales solo es la mitad del anteriormente hallado.

Luego finalmente $\dfrac{(n-3)\,n}{2}$ es la espresion del número total de diagonales diferentes.

Haciendo sucesivamente $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, \ldots,$

se hallará....... $\dfrac{(n-3)\,n}{2} = 0,\ 2,\ 5,\ 9,\ 14,\ 20, \ldots$

Así, en la figura presente, que es un *eptágono*, puede comprobarse que tiene *catorce* diagonales.

CAPITULO II.

DEL CÍRCULO Y DE SUS COMBINACIONES CON LA LÍNEA RECTA.

N.º 101. A las definiciones y proposiciones preliminares espuestas en los n.os 13, ..., 16, es necesario añadir algunas otras.

Observemos primero que

Una línea recta no puede encontrar á una circunferencia de círculo en mas de dos puntos:

Porque si pudiera encontrarla en tres puntos, tirando desde ellos rectas al centro, se tendrian (n.º 13.) tres rectas iguales desde un punto á una misma recta, lo cual es *un absurdo* (n.º 40, *corolar.*).—De aqui se infiere que

La circunferencia de círculo es una línea convexa (n.º 36.).

Esto supuesto, se llama **SECANTE** de un círculo, toda *recta* AB (*fig.* 66) que *le atraviesa* encontrando á su circunferencia en dos puntos C, D. La parte CD de la secante, *interior* al círculo, se llama *cuerda* (n.º 14.); y las *prolongaciones* CA, DB, *partes esternas* de la secante. Fig. 66.

N.° 102. Ordinariamente se define la TANGENTE *al círculo*, diciendo que es *una recta que solo tiene un punto comun con la circunferencia* (*): lo cual se logra tirando por un punto cualquiera I de la circunferencia, una *perpendicular* PQ al radio OI; porque si tiramos despues cualquier otra recta OH desde el centro á la perpendicular, tendremos OH > OI (n.° 39.); por consiguiente, todos los puntos de esta recta, menos el punto I, estan situados *fuera del círculo*.

Cuando una recta es *tangente* al *círculo*, se dice recíprocamente que el círculo es *tangente á la recta*; y el punto que les es comun se llama punto de *tangencia* ó de *contacto*.

La propiedad de la *tangente* de ser *perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto*, es característica de ella; porque si se concibe, *recíprocamente*, una recta que tenga un solo punto comun con la circunferencia, y todos los demas fuera del círculo, el radio desde el centro al punto comun es mas corto que todas las demas líneas que pueden tirarse desde el centro á la recta; por consiguiente (n.° 39.) dicho radio le será perpendicular.

De aquí se infiere evidentemente,

1.° que—*Por un punto dado en una circunferencia, solo se le puede tirar una tangente*;

2.° que—*Por un punto interior no se le puede tirar ninguna*;

3.° que—*Las perpendiculares*, MN, PQ, *tiradas á un diámetro* IL *en sus estremos, son tangentes paralelas entre sí*;

y 4.° en fin, que, RECÍPROCAMENTE,—*Dos tangentes paralelas tienen sus puntos de contacto en las estremidades de un mismo diámetro y le son perpendiculares*.

N.° 103. Se dice que un *polígono* está INSCRITO á un círculo cuando todos sus *vértices* se hallan en la *circunferencia*; en cuyo caso los lados del polígono son *cuerdas* del círculo.—Se dice que un polígono está CIRCUNSCRITO á un círculo cuando todos sus *lados* le son *tangentes*.

Los ángulos del primer polígono se llaman ángulos *inscritos* al círculo; y los del segundo, ángulos *circunscritos*.

(*) Adoptaremos por ahora esta definicion, de cuya exactitud hablaremos mas adelante, y especialmente en el *Apéndice* á los dos primeros libros, cuando tratemos de las curvas en general y de sus tangentes.

Observemos con este motivo, que si las dos tangentes QP, Q'P (*fig.* 66), se encuentran en un punto P, las partes PI, PI', *comprendidas entre el punto de concurso y los puntos respectivos de contacto, son iguales.* Fig. 66.

Porque tirando por el centro del círculo, y por el punto P, la recta POG, y doblando la figura QPG por PQ, se podrán hacer coincidir los puntos I', I (n.º 14.), y por consiguiente las dos partes de recta PI', PI.

Observemos tambien que esas dos tangentes determinan dos porciones distintas en la circunferencia, una I'KI que vuelve su *convexidad* hácia el punto P, y otra que presenta al mismo punto lo que se llama su *concavidad.*

Pronto nos será muy útil esta última observación.

Establecidas estas nociones, indiquemos la division del presente capítulo, que constará de *cuatro* párrafos. El primero tratará de las propiedades de las *cuerdas*, de las *secantes* y de las *tangentes*; el segundo, de la *medida de los ángulos*; el tercero, de los polígonos inscritos y circunscritos; el cuarto, en fin, de los *círculos secantes*, *tangentes*, *esteriores* ó *interiores* unos á otros.

§. I. — *De las cuerdas, secantes y tangentes.*

Teorema I. (*Fig.* 66). Fig. 66.

N.º 104. *El diámetro*, IL, *del círculo es la mayor de todas las cuerdas.*

Si se tiran á las estremidades de una cuerda cualquiera CD, los dos radios OC, OD, tendremos (n.º 38.),

$$OC + OD > CD;$$

y, por consiguiente,

$$OI + OL > CD, \quad \text{ó} \quad IL > CD.$$

Teorema II. (*Fig.* 67.) Fig. 67.

N.º 105. *La perpendicular* OI, *bajada desde el centro de un círculo á una cuerda* AB, *la divide en dos partes iguales, como tambien al arco que subtende dicha cuerda.*

Prolónguese la CO hasta D, y dóblese la figura por el diámetro CD. Desde luego, los dos semi-círculos DBC, DAC, se confundirán (n.° 13.). En seguida, siendo rectos los dos ángulos en I, deberán tomar la misma direccion las rectas IA, IB; y los puntos A, B, se confundirán igualmente; luego

1.° .... IA = IB;

2.° .... *arco* AC = *arco* CB,

y *arco* AD = *arco* DB. *L. C. D. D.*

N.° 106. Escolio. — La recta CD cumple evidentemente estas *cinco* condiciones diferentes: — 1.ª — pasar por el *centro* del círculo; — 2.ª — dividir en dos partes iguales á la cuerda AB; — 3.ª y 4.ª — pasar por C, D, puntos medios de los arcos ACB; ADB; — y 5.ª — ser *perpendicular* á AB. — Ahora bien, como verificándose *dos* de estas condiciones se verifican forzosamente las demas, resultan tantos teoremas distintos como combinaciones pueden hacerse con *cinco* cosas tomadas de dos en dos, es decir, con arreglo á la teoría de las combinaciones, $\frac{5\times4}{2}$, ó 10.

Podríamos pues establecer aquí *diez* proposiciones diversas (incluso el teorema precedente); pero nos limitaremos á citar las siguientes, que son las únicas susceptibles de frecuente aplicacion.

1.ª *La perpendicular* ID, *levantada sobre una cuerda* AB *en su punto medio* I, *pasa por el centro y por los puntos medios de los arcos correspondientes*;

2.ª *La recta* OI, *tirada por el centro y por el punto* I, *medio de la cuerda* AB, *lo es perpendicular y pasa por los puntos medios de los arcos*;

3.ª *La recta* OC, *tirada por el centro y por el punto* C, *medio de un arco, es perpendicular á la cuerda subtendente* AB, *y pasa por su punto medio y por el punto medio del otro arco*; — &c.

Todas estas proposiciones se demostrarian ó directamente, ó *ad absurdum*, con ayuda del teorema principal.

Observaremos únicamente que de la segunda proposicion enunciada se infiere que

Dos cuerdas que se cortan mutuamente en partes iguales, son necesariamente *diámetros*.

Porque si no pasaran por el centro, la recta que juntara este punto con el punto medio comun de ambas cuerdas, sería á la vez perpendicular á dos rectas concurrentes; *lo cual es un absurdo* (n.º 27.).

TEORÉMA III. (*Fig.* 68.) Fig. 68.

N.º 107. En un mismo círculo:

Los arcos AC, BD, *comprendidos entre dos cuerdas paralelas* AB, CD, *son iguales*;

Y lo mismo se verifica aunque una de las cuerdas se convierta en *tangente* PQ, ó aunque *ambas* rectas paralelas sean *tangentes*, como MN, PQ.

PRIMER CASO. Bajemos desde el punto O la perpendicular OL, comun á las dos cuerdas; deberá pasar por los puntos medios de los arcos subtendidos por AB, CD; y dará

$$arco\ AL = arco\ LB, \quad arco\ CL = arco\ LD;$$

de donde se deduce

$$arco\ AL - arco\ CL = arco\ LB - arco\ LD,$$

ó

$$arco\ AC = arco\ BD.$$

SEGUNDO CASO. Sean la cuerda AB y la tangente MN.— Juntando el centro O con L, punto de contacto de la tangente, la recta OL será á un tiempo perpendicular á MN (n.º 102.) y á su paralela AB; por consiguiente (n.º 105.), los arcos AL, LB, son iguales.

TERCER CASO. Sean las dos tangentes paralelas MN, PQ. —Hemos probado (n.º 103, 4.º) que LOI es un diámetro; luego los arcos LAI, LBI, son semicircunferencias (n.º 13.), y por consiguiente iguales.

ESCOLIO. Las *recíprocas* de los *dos últimos casos* de esta proposicion son *verdaderas* sin restriccion alguna, y se demostrarian facilmente por la reduccion *ad absurdum*;—respecto del primer caso, para que la recíproca sea cierta, debe enunciarse ási:

Cuando son iguales los arcos [de un mismo círculo] *comprendidos entre dos rectas* que no se encuentran dentro de él, *dichas rectas son paralelas*;

Y se demostraria facilmente por absurdo.

TEORÉMA IV. (*Fig.* 69). Fig. 69.

N.º 108. En un mismo círculo, ó en círculos iguales, 1.º *A arcos iguales corresponden cuerdas iguales, y equidistantes del centro.*

2.º Si dos arcos son desiguales, y menor cada cual que la semi-circunferencia, — *Al mayor de ellos corresponde cuerda mayor y mas cercana del centro que la otra.*

Observemos de antemano que, siendo siempre superponibles dos círculos de igual radio, nada nos impide suponer que las cuerdas pertenecen al mismo círculo.

Esto supuesto, — 1.º — consideremos los arcos iguales AEB, CFD; y bajemos desde el centro O á las cuerdas AB, CD, las perpendiculares OK, OL. Tiremos el diámetro MON por M, punto medio del arco AC; y doblando la figura por MN, es evidente que los puntos C, D, habrán de caer sobre los puntos A, B; en cuyo caso la cuerda CD coincidirá con la AB, y la perpendicular OL con la OK.

Luego $AB = CD$, $OK = OL$.

2.º Sea, en segundo lugar, *arco* AB > *arco* CF.

Doblemos la figura por el diámetro MN: como *arco* AB > *arco* CF, el punto F habrá de caer necesariamente entre A y B, por ejemplo en E; y el punto medio del arco AE, que determina (n.º 105.) la perpendicular OI bajada desde el centro á la cuerda AE, estará mas cerca del punto A que el punto medio del arco AB determinado por la perpendicular OK bajada sobre AB; luego el punto K debe hallarse situado entre el punto B y el punto G donde OI se encuentra con AB.

Por consiguiente, tenemos AK, mitad de AB, mayor que AG; y por consiguiente, mucho mayor que AI, mitad de AE;

de donde $AB > AE$ ó $AB > CF$.

Resulta tambien

$$OK < OG \quad (\text{n.º } 39.),$$

y, *à priori*, $OK < OI$.

L. C. D. D.

N.º 109. Escolio 1.º — Las *recíprocas* de estas dos proposiciones se deducirian muy facilmente del principio espuesto en el n.º 21.

Asi, puede asegurarse que, en un mismo círculo ó en círculos iguales,

1.º *A cuerdas iguales corresponden arcos iguales; — y que las cuerdas iguales estan equidistantes del centro.*

2.º *A mayor cuerda corresponde mayor arco; — y la cuerda mas larga está mas cerca del centro.*

Tambien pueden deducirse estas otras *recíprocas.*

1.º *Dos cuerdas equidistantes del centro, son iguales; — y subtienden arcos iguales.*

2.º *De dos cuerdas que distan desigualmente del centro, la que dista menos es mas larga; — y subtende arco mayor.*

Advert. Entiéndase bien que los arcos aquí considerados son siempre menores que la semi-circunferencia; pues de lo contrario deberian modificarse estas proposiciones en la parte relativa á los arcos.

N.º 110. ESCOLIO 2.º — La distancia OI (*fig.* 67) del centro á una cuerda, varía entre *cero* y el *radio*. Es *nula* cuando la cuerda pasa por el centro; y se hace igual al radio cuando la cuerda, suponiéndo que se mueve paralelamente á sí misma desde O hácia C, llega á confundirse con la tangente MCN, que tambien es (n.º 102.) perpendicular á OC. Fig. 67.

De donde, al paso, podemos concluir, que la *tangente* es una *cuerda* ó mas bien una *secante*, *cuyos dos puntos de interseccion en la circunferencia se juntan en uno solo.*

Puede tambien demostrarse esta propiedad de la tangente del modo que ponemos á continuacion: — Tírese desde un punto cualquiera A de la circunferencia (*fig.* 70), una recta AB que la encuentre en otro punto C; y concíbase que esta recta da una vuelta entera al rededor del punto A, en el sentido AC'AC. La recta AB, en este movimiento, irá tomando las posiciones sucesivas AB', AB'', AB''',..., por encima de AB, y luego *Ab*, *Ab'*, *Ab''*,..., por debajo de AB: al mismo tiempo, el punto C tomará las posiciones C', C'', C''',..., *c'*, *c''*, *c'''*,..., aproximándose primero al punto A y separándose despues. Pero es claro que la recta AB, para pasar de la posicion AB''', por ejemplo, á la posicion *Ab*, ha debido confundirse con la tangente MAN, que ocupa una posicion intermedia; y que en el mismo instante, el punto C, para pasar de C''' á *c*, habrá debido caer en A. Luego la tangente MAN es realmente una de las posiciones de la secante, la que toma cabalmente cuando los dos puntos de interseccion se *reunen en uno solo.* *L. C. D. D.* Fig. 70.

ESCOLIO 3.º La parte CI (*fig.* 67) del radio OC, comprendida entre el medio de un arco y su cuerda, se llama (n.º 14.) SAGITA de dicho arco, y está en oposicion con la perpendicular OI: es *igual al radio* cuando la cuerda pasa Fig. 67.

por el centro, y se *anula* cuando la cuerda se confunde con la tangente.

Fig. 71. TEOREMA V. (*Fig.* 71.)

N.° 112. *De todas las cuerdas tiradas por un mismo punto* I *tomado dentro de un círculo, la mayor es el diámetro* AIB; *y la menor la* CD *perpendicular á dicho diámetro.*

La primera parte del teorema está ya demostrada (n.° 104.).

Para demostrar la segunda, bajemos sobre una cuerda cualquiera EIE′ diferente de CD, la perpendicular OK; con lo cual tendremos

$$OK < OI \quad (\text{n.° } 39.);$$

luego la cuerda EE′ es mayor que CD (n.° 109, *escol.*); luego, &c.

N.° 113. ESCOLIO 1.° — *El mayor de todos los segmentos de rectas tiradas desde un punto interior* I *á diferentes puntos de una circunferencia, es el segmento* IA *que pasa por el centro; y el menor es la prolongacion* IB *del primero.*

2.° *De dos segmentos cualesquiera*, IE, IF, *es mayor el que, como* IE, *hace el ángulo menor* [obtuso ó agudo] *con el segmento* MÁXIMO IA, *ó el ángulo mayor* [obtuso ó agudo] *con el segmento* MÍNIMO IB.

En efecto, 1.° — Sea un segmento cualquiera IE: tírese el radio OE.

Comparando primero IA con IE, tenemos

$$IA = OA + OI = OE + OI;$$

pero $OE + OI > IE$ (n.° 38, 1.°); luego $IA > IE$.

Comparando despues IB con IE, tenemos

$$IB = OB - OI = OE - OI;$$

pero $OE - OI < IE$ (n.° 38, 1.°); luego $IB < IE$.

2.° Sean dos segmentos cualesquiera IE, IF; tiremos los radios OE, OF. — Los dos triángulos IOE, IOF, tienen el lado OI comun, y el lado OE igual al OF; pero el ángulo IOE comprendido por ellos en el primer triángulo, es mayor que el IOF del segundo triángulo; luego (n.° 64.)

$$\therefore \quad IE > IF. \qquad L. C. D. D.$$

Advert. La cuerda CD perpendicular al diámetro AB es la única que ocasiona dos segmentos iguales, OC = OD. Respecto de otra cualquiera cuerda EE′, el segmento IE comprendido en el segmento mayor de círculo CAD, es mayor que el otro segmento IE′ de la cuerda comprendido en el segmento menor CBD del círculo.

Comparando dos cuerdas cualesquiera EE′, FF′, se ve fácilmente que si un segmento IE de la primera es mayor que un segmento IF de la segunda, es decir, que si ángulo EIA < ángulo F′IA, el otro segmento IE′ de la primera será menor que el correspondiente IF′ de la segunda, porque entonces se tendrá

ángulo F′IB > *ángulo* E′IB.

N.° 114. Escolio 2.° — Se obtienen resultados análogos suponiendo que las rectas parten de un punto esterior (*fig.* 72); Fig. 72.
pero en virtud de la observacion puesta al fin del n.° 103, pueden comprenderse todas las propiedades relativas á este segundo caso en un solo enunciado mucho mas conciso:

La distancia de un punto esterior I *á la parte cóncava de la circunferencia es tanto mayor, y su distancia á la parte convexa es tanto menor, cuanto mas cerca pasan del centro las rectas que las miden.*

Como las demostraciones de las diversas proposiciones que nacen de este enunciado, son enteramente análogas á las del *escolio* precedente, las omitiremos, reduciéndonos á hacer dos observaciones muy importantes:

Primera, la tangente IL, que puede ser considerada como *límite comun* entre la parte cóncava y la convexa del círculo, es á la vez el *mínimo* de las rectas tiradas á la parte cóncava, y el *máximo* de las tiradas á la convexa.

Segunda, cuando una recta, tal como IE, saliendo de un punto esterior I, va á encontrar á la circunferencia en dos puntos E, E′, se llama comunmente *secante entera*, el segmento que termina en la concavidad, y *parte esterior* el que termina en la convexidad. En este supuesto, resulta que cuando una secante entera es mayor que otra, la parte esterior de esta es, en compensacion, mayor que la de aquella. (Véase el fin del escolio precedente.)

§. II. *Medida de los ángulos.*

El título de este párrafo puede parecer al pronto una anticipacion de la materia del segundo libro, cuyo principal asunto debe ser (n.° 23.) la medida de las cantidades geométricas comprendidas en un plano. Podriamos, en efecto, dejarlo para entonces, pero nos será muy útil desde ahora, porque de la teoría que pasamos á esponer dependen muchas propiedades de las figuras rectilíneas, independientes de su estension.

Proposiciones y cuestiones preliminares.

N.° 115. PRIMERA CUESTION. — *Determinar la medida comun de dos rectas*, y por consiguiente, *la razon numérica en que estan.*

Llámase MEDIDA COMUN de dos rectas dadas de longitud, la *recta mayor* capaz de *caber un número exacto de veces en cada una de ellas* (*).

El principio que sirve de base á la investigacion de la *medida comun*, análogo al que sirve de base á la determinacion del máximo comun divisor de dos números, consiste en que

La medida comun de dos rectas es igual á la medida comun que tienen la menor de las dos y el resíduo de su division; cuyo resíduo se obtiene *quitando cuantas veces se pueda la menor de la mayor.*

Como la demostracion de este principio no difiere esencialmente del relativo á los números, nos contentaremos con remitirnos á la *Aritmética*: lo cual supuesto, hé aqui en lo que consiste el procedimiento para obtener dicha comun medida:

Colóquese [por medio del compas (n.° 15.)] *cuantas veces se pueda la menor de las rectas sobre la mayor*;

Si no queda resíduo, la menor de las rectas dadas será la comun medida; pero si queda resíduo,

Colóquese sobre la recta menor cuantas veces se pueda:

Si no queda ya resíduo, el primero será la comun medida; pero si queda,

(*) Sería mas exacto decir: *la máxima comun medida*; como respecto de los números se dice: *el máximo comun divisor.*

Colóquese el segundo resíduo sobre el primero cuantas veces sea posible; y continúese esta serie de operaciones hasta obtener un resíduo que se halle contenido un número exacto de veces en el resíduo precedente;

En cuyo caso, *el último resíduo hallado es la medida comun buscada.*

En Aritmética, despues de hallado el máximo comun divisor, se dividen por él los números dados; y el cociente de los resultados espresa *la relacion* de los números propuestos, *reducida á su menor espresion.*

Pero aqui, para hallar la *razon numérica* de las dos rectas, que es la segunda parte de la cuestion presente, es necesario representar por medio de números las operaciones gráficas del procedimiento.

Para fijar las ideas, sean A y B (*fig.* 73) las dos rectas dadas (siendo A mayor que B); y supongamos que despues de colocada B sobre A, *tres* veces, haya quedado un resíduo R; que este resíduo, colocado *dos* veces en B, haya dado otro resíduo R′; que el nuevo resíduo R′, colocado en R *una* vez, haya dado el tercer resíduo R″; y que en fin R″ esté contenido *cuatro* veces exactamente en R′. De estos supuestos nacen las igualdades siguientes: Fig. 73.

$$A=3B+R,\ B=2R+R',\ R=R'+R'',\ R'=4R'';$$

y, retrocediendo por sucesivas sustituciones desde la última igualdad, se obtiene primero

$$R=4R''+R''=5R'';$$

despues $B=2\times 5R''+4R''=14R''$;

y finalmente $A=3\times 14R''+5R''=47R''$.

Donde se ve que la comun medida R″ está contenida 47 veces en A, y 14 veces en B; por consiguiente $\frac{47}{14}$ es la *razon numérica* de las dos rectas.

Advert. El número fraccionario que de este modo se obtiene, es en todos los casos *irreductible*; porque designando en general por α la comun medida hallada por el procedimiento recien espuesto, por m y n los números que espresan las veces que α está respectivamente contenida en A y en B, tendremos $A=m\alpha$, $B=n\alpha$; de donde $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$. Pero si m y n

tuvieran un factor comun k, tendriamos $A=m'k\alpha$, $B=n'k\alpha$; y entonces $k\alpha$ sería medida comun de A y B, y no sería α la *mayor* medida; lo cual es contrario á la definicion.

N.º 116. SEGUNDA CUESTION. — *Determinar la medida comun de dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales*; y por consiguiente, *su razon numérica*.

Aquí toda la dificultad consiste en saber cómo se coloca várias veces seguidas un arco menor CD sobre otro mayor AB
Fig. 74. del mismo radio. (*Fig.* 74.)

Para esto, se toma una abertura de compas igual á la cuerda del arco CD, y se coloca en el arco AB, desde A hasta E, desde E hasta F, desde F hasta G. Así se ve que el arco AB contiene tres veces al arco CD, quedando un resíduo GB; los arcos AE, EF, FG, son iguales al CD (n.º 108.), porque todas sus cuerdas son iguales por construccion.

Fuera de esto, el mismo procedimiento que hemos esplicado para determinar la comun medida de dos rectas, es el que se aplica á determinar la de dos arcos; por cuya razon escusamos el repetirla.

N.º 117. OBSERVACION *importante sobre las líneas* [*y en* general *sobre las cantidades*] *inconmensurables*.

Hemos supuesto en el número 115, que al cabo de cierto número de operaciones, llegabamos siempre á un resíduo susceptible de caber un número exacto de veces en el resíduo precedente; pero no siempre sucede así (*); y cuando esa condicion no se cumple, las cantidades cuya comun medida se va buscando [sean líneas, arcos, &c.], se llaman cantidades *inconmensurables entre sí*.

En esta circunstancia, se puede preguntar cuál es la *razon numérica* de dos líneas que no tienen medidas comun, y qué es lo que significa esta proposicion: — *la razon numérica* de dos cantidades inconmensurables, *es igual á la razon numérica* de otras dos cantidades tambien inconmensurables entre sí, ó bien: *dos cantidades inconmensurables entre sí*,

---

(*) Como esta operacion se hace por medio del compas, sucede que sus dos piernas se van cerrando cada vez mas, y al fin se juntan de modo, que es imposible fisicamente aproximarlas mas. La distancia que entonces queda entre ambas puntas, mayor ó menor segun la perfeccion del instrumento, todavía es *medible* por el pensamiento; pero sin embargo, ya es imposible continuar la operacion, aun cuando las dos líneas sean verdaderamente *inconmensurables* entre sí.

son proporcionales á otras dos cantidades tambien inconmensurables.

Para comprender estas espresiones, es necesario presuponer que la Aritmética y el Algebra suministran métodos para valuar aproximadamente cualquier número *inconmensurable* [$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{5}$,..., por ejemplo] por medio de una serie de números commensurables, $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$,.... que cada vez van difiriendo ménos del número que se valúa: de modo que este está sucesivamente comprendido entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ y $\frac{m'+1}{n'}$,..., cuyas diferencias $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{n''}$,..., van disminuyendo indefinidamente hasta 0.

Hablando con propiedad, los números aproximados $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$,..., tienen por *límite* al número inconmensurable propuesto; y sólo cuando las razones aproximadas de dos cantidades convergen hácia un número de esa clase, es cuando la verdadera razon de las cantidades que es el límite ante-dicho, se llama *inconmensurable*, é inconmensurables tambien entre sí las mismas cantidades dadas.

Esto supuesto, se dice que dos cantidades A y B, inconmensurables entre sí, son *proporcionales* á otras dos A′ y B′, tambien inconmensurables entre sí; ó con mas generalidad, que la razon de dos cantidades cualesquiera A, B, es igual á la razon de otras dos A′, B′, siempre que se puede demostrar que los números $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$,..., son á la vez valores aproximados de la razon $\frac{A}{B}$ y de la razon $\frac{A'}{B'}$, con un mismo grado de aproximacion para ambas.

Entendidas estas nociones, podemos ya pasar á la medida de los ángulos.

Fig. 75. TEOREMA I. (*Fig.* 75.)

N.° 118. En un mismo círculo, ó en círculos iguales, — *Los ángulos en el centro son proporcionales con los arcos comprendidos entre sus lados.*

Ya está demostrado (n.° 25.) que

A ángulos en el centro iguales entre sí, corresponden arcos iguales; y recíprocamente.

Fig. 75. Sean ahora dos ángulos AOB, A'O'B' (*fig.* 75), que supondrémos ser *conmensurables*, y hallarse en la razon 7 : 4, por ejemplo. Digo que los arcos AB, A'B', descritos con el mismo radio [OA = O'A'], estan en la misma razon 7 : 4.

En efecto, si concebimos que la comun medida de los ángulos se haya colocado 7 veces en el primero y 4 en el segundo, las líneas de division repartirán al arco AB en 7 pedazos, y al A'B' en 4; y todos los pedazos serán iguales (n.° 25.) en en ambos arcos. Luego tambien los arcos estarán en la razon de 7 : 4.

Supongamos ahora que sean *incónmensurables* los ángulos: digo que aun así tendrémos la proporcion

$$AOB : A'O'B' :: AB : A'B'.$$

Basta (n.° 117.) para demostrarlo hacer ver que la razon de los arcos y la de los ángulos tienen los mismos valores aproximados $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ...; y que no hay uno solo de estos números fraccionarios que, representando la razon de los ángulos con cierto grado de aproximacion, no represente tambien la razon de los arcos con el mismo grado de aproximacion.

Concibamos pues al ángulo menor A'O'B' dividido en n partes iguales, y coloquemos una de ellas m veces consecutivas sobre el ángulo AOB partiendo desde OA. — Puesto que, por hipótesis, la razon de los ángulos está comprendida entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, esta operacion debe dar un resíduo angular menor que $\frac{1}{n}$ de A'O'B'; es decir, menor que la $n.^{ésima}$ parte de A'O'B'. Aquí es facil ver que el arco A'B' se queda dividdo en n partes iguales, y que el arco AB contiene un número m de estas mismas partes, con un resíduo necesariamente menor que una de ellas; de donde resulta que la razon de los arcos tambien está comprendida entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$.

Luego $\frac{m}{n}$ representa, con el mismo grado de aproximacion [es decir, con la aproximacion de faltarle menos de $\frac{1}{n}$], la razon de los ángulos y los arcos.

Como podriamos hacer el mismo raciocinio respecto de los otros números $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$,..., podemos justamente concluir (n.° 117.) que

Los ángulos son proporcionales con los arcos que les corresponden.

La RECÍPROCA es *verdadera*, y se demuestra del mismo modo.

TEORÈMA II.

N.° 119. *El ángulo en el centro tiene por medida el arco de círculo comprendido entre sus lados.*

Este enunciado significa, que si, por un lado, se refiere el ángulo propuesto al *ángulo recto* que es la *unidad natural* de los ángulos [porque es del que nos formamos idea mas clara], y por otro lado, se refiere el arco descrito desde el vértice del ángulo dado, como centro, al *cuadrante*, es decir, á la *cuarta parte de la circunferencia* trazada con igual radio, la *razon entre el ángulo dado y el recto* es igual (n.° 118.) á la *razon entre el arco* y el *cuadrante*; ó bien

ángulo AOB : 1 *ángulo recto* :: *arco* AB : 1 *cuadrante*;

lo cual significa que el *número abstracto* que espresa la razon entre el arco y su unidad, ó la *medida del arco* (n.° 3.), espresa á la vez *la medida del ángulo.*

Advert. Bajo este supuesto, y por abreviar, se escribe,

$$AOB = AB;$$

pero, para entender el verdadero sentido de esta igualdad, es necesario suponer al ángulo y al arco referidos á sus unidades respectivas.

N.° 120. Escolio 1.°—A fin de poder *medir* mas facilmente los arcos, y por consiguiente los ángulos, se ha convenido [en el *sistema antiguo de medidas*] en dividir toda la circunferencia en 360 partes iguales llamadas GRADOS, cada grado en 60 partes iguales llamadas *minutos*, cada minuto en 60 *segundos*, cada segundo en 60 *terceros*, &c.:—este orden de divisiones se llama SEXAGESIMAL.

Segun esto, el *cuadrante* vale 90 grados [que se indica asi: 90°]; en minutos vale 90×60 ó 5400 minutos [ó, para abreviar, $5400'$]; en segundos vale 5400×60 ó 324000 segundos [ó $324000''$]; y asi en adelante.

Cuando se quiere espresar el valor de un arco que no alcanza á valer grados exactos, se dice que *vale*, por ejemplo, $47^{\circ}\ 19'\ 24''$, ó que *es de* $47^{\circ}\ 19'\ 24''$.

Tambien suele decirse por abreviar que el ángulo *vale* ó *es de* $47^{\circ}\ 19'\ 24''$. Pero en este caso, para obtener el número abstracto que espresa la razon del ángulo dado al ángulo recto, es necesario, segun las reglas de la Aritmética,

1.° Reducir los $47^{\circ}\ 19'\ 24''$ á solo segundos, lo cual da $170364''$.

2.° Dividir este número por 324000, número de *segundos* que contiene el *cuadrante*.

Asi resulta que la razon pedida es $\frac{170364}{324000}$.

Hay otra division de los arcos llamada CENTESIMAL, acomodada al *sistema métrico decimal*: en ella se concibe el cuadrante dividido en 100 partes iguales llamadas GRADOS [la circunferencia vale entonces 400 grados], cada grado en 100 partes iguales llamadas *minutos centesimales*, cada minuto en 100 *segundos*, &c...

El *grado* se designa por la letra inicial *g*, y los *minutos*, *segundos*, &c.,..., como antes.

Asi, un arco ó un ángulo de 23 *grados*, 35 *minutos*, 43 *segundos*, se escribe: $23^{g}\ 35'\ 43''$, ó mas brevemente, $0^{g},233543$, tomando por *unidad* al *cuadrante*; y esa fraccion da directamente la razon entre el ángulo dado y el recto.

N.° 121. Escolio 2.°—No insistiendo mas en estos principios, que apenas nos han de servir hasta la Trigonometría, nos reduciremos á observar que, como el cuadrante vale 90°

en la primera division, y 100g en la segunda, resulta que un grado sexagesimal vale $\frac{10}{9}$ de grado *centesimal*, y uno de estos $\frac{9}{10}$ de aquellos; lo cual nos sirve para valuar los unos en los otros, y recíprocamente.

Medida de los ángulos escéntricos.

Llámanse ÁNGULOS ESCÉNTRICOS todos los que no tienen su vértice en el centro.

En particular se llama ÁNGULO INSCRITO el que teniendo su vértice en la circunferencia atraviesa el círculo con sus lados (V. el n.º 103.).

TEOREMA III. (*Fig.* 76.) Fig. 76.

N.º 122. *Todo ángulo inscrito* [formado por dos cuerdas] *tiene por medida la mitad del arco que sus lados abrazan.*

Aqui pueden presentarse *tres* casos, segun que el centro se halla situado *en* una de las dos cuerdas, ó *entre* las dos ó *fuera* del ángulo que forman ambas.

PRIMER CASO. Sea el ángulo BAD, cuyo lado AD pasa por el centro O.—Tiremos la línea OB; el ángulo BOD esterno del triángulo AOB es igual á BAO+OBA (n.º 55.), y por consiguiente igual á 2BAO, porque de ser isósceles el triángulo, se deduce OBA=BAO; asi se tiene BAO=$\frac{1}{2}$BOD. Pero BOD=BD (n.º 118.); luego BAO, ó BAD, vale $\frac{1}{2}$BD, ó bien tiene por medida la mitad de BD.

SEGUNDO CASO. Sea un ángulo BAC que comprende el centro entre sus lados.

—Tenemos evidentemente, por solo la inspeccion de la figura, BAC=BAD+DAC; y como, en virtud de lo que acabamos de decir, es

$$\mathrm{BAD}=\tfrac{1}{2}\mathrm{BD},\quad \mathrm{DAC}=\tfrac{1}{2}\mathrm{DC};$$

resulta que $\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}(\mathrm{BD}+\mathrm{DC})=\frac{1}{2}\mathrm{BC}.$

TERCER CASO. Sea el ángulo BAC′ que no comprende entre sus lados al centro O.—Tenemos, por el contrario, BAC′=BAD—DAC′, y por consiguiente,

$$\mathrm{BAC'}=\tfrac{1}{2}(\mathrm{BD}-\mathrm{DC'})=\tfrac{1}{2}\mathrm{BC'}.$$

N.º 123. COROLARIO 1.º—*Todo ángulo inscrito*, AGD, *cuyos lados pasen por los estremos de un diámetro* AD, *es recto.*

Porque, en virtud del teorema principal, tiene por medida la mitad del arco ACD, que es una semicircunferencia; por consiguiente, tiene por medida un *cuadrante.*

Advert. Este corolario puede tambien deducirse del teorema establecido en el n.º 94; porque tirando la OG, se tiene OG = OA = OD; de donde resulta que el ángulo G del triángulo GAD es *recto.*

N.º 124. Corolario 2.º —*El ángulo* MAB [ó NAB] *formado por una cuerda y una tangente, tiene tambien por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Tiremos el diámetro AOD. El ángulo MAD es *recto* (n.º 102.) y tiene por medida un *cuadrante*, ó $\frac{1}{2}$ AGBD; el ángulo BAD tiene tambien por medida $\frac{1}{2}$ BD; luego MAD — BAD, es decir, el ángulo MAB tiene por medida $\frac{1}{2}$ AGB.

Si se considera el ángulo obtuso NAB, se tiene NAB = NAD + DAB; de donde NAB = $\frac{1}{2}$ ACD + $\frac{1}{2}$ DB = $\frac{1}{2}$ ACDB.

Advert. Esta proposicion se deriva mas directamente todavía de la del ángulo inscrito, cuando se considera la tangente como límite de las secantes.—(V. el n.º 110.)

Fig. 77.

Teorema IV. (*Fig.* 77.)

N.º 125. *Todo ángulo escéntrico* BAC, ó BA′C, formado por dos partes de cuerdas AC, AB, ó por dos secantes A′B, A′C, *tiene por medida la semi-suma* $\frac{1}{2}$ (BC + B′C′), ó *la semi-diferencia* $\frac{1}{2}$ (BC — DE), *de los arcos comprendidos entre sus lados* [prolongados indefinidamente], segun que el vértice se halle *dentro* ó *fuera* del círculo.

Primer caso. Tiremos la cuerda BC′; y tendremos (n.º 55.)

$$BAC = BC'A + C'BA;$$

pero, como los ángulos BC′A, C′BA, ó BC′C, C′BB′, tienen por medidas respectivas $\frac{1}{2}$ BC, $\frac{1}{2}$ B′C′ (n.º 122.), resulta que el ángulo total BAC tiene por medida $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ B′C′.

Segundo caso. Juntemos como antes el punto C con el punto E, y tendremos

$$BEC = EA'C + ECA';$$

de donde EA′C ó BA′C = BEC — ECA′;

pero $BEC = \frac{1}{2} BC$, $ECA' = \frac{1}{2} ED$ (n.° 122.);

luego $BA'C = \frac{1}{2} BC - \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2}(BC - ED)$.

Advert. Como caso particular, puede verse que

El ángulo circunscrito LIM (*fig.* 72) *tiene por medida la semi-diferencia entre el arco cóncavo* LAM *y el arco convexo* LBM. Fig. 72.

Pero tambien se demuestra directamente esta proposicion tirando las cuerdas BL y BM.

N.° 126. **Escolio** *sobre los ángulos escéntricos en general.*—Las diferentes medidas que acaban de demostrarse para todas las clases de ángulos que no tienen su vértice en el centro, deben considerarse como medidas secundarias; porque

La medida natural de un ángulo es el arco de círculo comprendido entre sus lados, y descrito desde su vértice como centro;—[ó mejor (n.° 118.) *la razon* del arco *al cuadrante*].

Las otras medidas no tienen mas objeto que dar á conocer en las figuras circulares las relaciones de magnitud que pueden existir entre ciertos ángulos.

Asi, por ejemplo, con solo mirar la (*fig.* 77) se puede asegurar que de los tres ángulos BAC, BEC, BA'C, *el mayor* es BAC, *el mediano* BEC, y *el menor* BA'C, pues tenemos (n.os 120 y 125.) Fig. 77

$$BAC = \tfrac{1}{2}(BC + B'C'),\ BEC = \tfrac{1}{2} BC,\ BA'C = \tfrac{1}{2}(BC - DE).$$

Si consideramos el ángulo inscrito ACB (*fig.* 78), y restamos de la circunferencia entera el arco ANB comprendido entre sus lados, el arco restante ACC'C''B, ó el segmento de círculo correspondiente, será el *arco* ó el *segmento á que se dice inscrito el ángulo* ACB. Fig. 78.

Esto supuesto, resulta evidentemente del *teorema* 3.° (n.° 122.) y del *corolario* 2.° (n.° 124.) que

Todos los ángulos inscritos, ACB, AC'B,..., *á un mismo segmento*, y lo mismo *el ángulo* ABL *formado por la cuerda* AB *del segmento y la tangente tirada por uno de los estremos de la cuerda, son iguales entre sí*;—porque tienen la misma medida.

Advert. El segmento de círculo ACC'C''B se llama **segmento capaz** de contener al ángulo ACB.

Todos los ángulos inscritos á una semi-circunferencia [*ó á un semi-círculo*], *son rectos*,—como hemos demostrado en el número 123.

§. III. *Propiedades de los polígonos inscritos y circunscritos á la circunferencia del círculo.*—(V. el n.° 103.)

Fig. 60 y 61. **Teorema I.** (*Fig.* 60 y 61.)

N.° 127. *Todo triangulo* CAB *es á la vez inscriptible y circunscriptible.*

La PARTE PRIMERA de esta proposicion puede enunciarse tambien así:

Por tres puntos A, B, C, *que no esten en línea recta, siempre es posible hacer pasar una circunferencia.*

Y es consecuencia necesaria del teorema demostrado en Fig. 61. el *número* 96; porque estando el punto O (*fig.* 61), por su posicion, á igual distancia de los tres puntos A, B, C, resulta que la circunferencia descrita desde ese punto como centro y con el radio OA, pasará tambien por los puntos B y C.

Ademas, es evidente que por dichos tres puntos A, B, C, *no puede pasar mas que una circunferencia*, porque ningun otro punto puede servirles de centro mas que el punto O.

Advert. Si los tres puntos A, B, C, estuvieran en línea recta, las perpendiculares levantadas en los puntos medios de AB, BC, y AC, serian paralelas (n.° 32.); y entonces no habria centro, ó estaría (n.° 54.) situado en el *infinito*.

La SEGUNDA PARTE de la proposicion se deduce del mismo modo del teorema demostrado en el *número* 95; porque Fig. 60. estando el punto O (*fig.* 60) á igual distancia de las rectas AB, AC, BC, resulta que el círculo descrito desde el punto O como centro, con un radio igual á la perpendicular bajada sobre AB desde dicho punto, pasará necesariamente por los pies de las perpendiculares tiradas desde el mismo punto á los otros dos lados. Ademas, el círculo será (n.° 102.) *internamente tangente* á los tres lados del triángulo; y por consiguiente, tendremos *un círculo inscrito* al triángulo dado.

ESCOLIO 1.° — Si consideramos el espacio indefinido Fig. 60. LCBI (*fig.* 60) que determinan el lado CB del triángulo y las prolongaciones de los otros dos, y tiramos las *bisectrices* de los ángulos LCB, IBC, el punto O′ en que se encuentran está equidistante de las tres rectas CB, CL, BI; lo cual nos da otro círculo tangente á los tres lados, que recibe el nombre de *ex-inscrito* para espresar que está fuera del triángulo. — El punto O′ está colocado en la bisectriz AA′ del ángulo A.—(V. n.° 95, *escol.*)

Tendremos ocasion de insistir sobre estas proposiciones en el *capítulo de los problemas*.

N.° 128. Escolio 2.° — El teorema del n.° 94. nos enseña tambien que, si el triángulo ABC (*fig.* 59) es *rectángulo* en C, el centro del círculo circunscrito está colocado en medio de la hipotenusa AB, porque entonces las tres distancias DA, DB, DC, son iguales. Fig. 59.

Si el triángulo es *isósceles*, el centro del círculo, tanto inscrito como circunscrito, se halla situado en la bisectriz del ángulo opuesto á la base (n.° 61.).

En fin, cuando el triángulo es equilátero, los centros de ambos círculos se *confunden*; lo cual se espresa diciendo que *son concéntricas las dos circunferencias*.

Teorema II. (*Fig.* 79.) Fig. 79.

N.° 129. *En todo cuadrilátero inscrito* ABCD, *la suma de cada dos ángulos opuestos, es igual á dos* RECTOS.

En efecto, los dos ángulos en B y en D, por ejemplo, tienen (n.° 122.) por medida, el uno á $\frac{1}{2}$ ADC, y el otro $\frac{1}{2}$ABC; por consiguiente, su suma tiene por medida la mitad de la circunferencia total ABCD, ó la *semi-circunferencia.* — Luego, &c.

Recíprocamente: — *Un cuadrilatero* ABCD *es inscriptible cuando la suma de cada dos ángulos opuestos es igual á dos* RECTOS.

En efecto, si el círculo tirado por los tres puntos A, B, C, [que siempre puede trazarse (n.° 127.)], no pasara por el cuarto punto D, quedaria este dentro ó fuera de aquel.

Supongamos que queda dentro, y prolonguemos la línea AD [ó la CD] hasta encontrar en D′ á la circunferencia; en cuyo caso, en virtud de la proposicion directa, tendremos

$$ABC + AD'C = 2 \textit{ rectos};$$

pero, por hipótesis, $ABC + ADC = 2$ *rectos*;

luego $ADC = AD'C,$

lo cual es un absurdo (n.° 55, *Advert.*).

El mismo raciocinio hariamos en el caso de quedar fuera del círculo el punto D.

Luego el cuadrilátero dicho es inscriptible.

ESCOLIO. Dándonos este teorema una propiedad característica del cuadrilátero inscriptible, nos enseña que el *rectángulo* y el *cuadrado* son entre los paralelógramos los únicos que la poseen, porque solo en ellos pueden los ángulos opuestos ser á la vez iguales entre sí, y suplemento el uno del otro.—Entonces las diagonales del rectángulo ó del cuadrado son diámetros del círculo circunscrito.—(V. el *escol.* del número 128.)

Fig. 80.

TEOREMA III. (*Fig.* 80.)

N.° 130. *En todo cuadrilátero circunscrito* ABCD, *la suma de dos lados opuestos* [AB + DC] *es igual á la suma de los otros dos* [AD + BC].

En efecto, tenemos (n.° 103.),

$$AE = AK, \quad EB = BF, \quad CG = CF, \quad GD = DK;$$

de donde, sumando miembro con miembro estas cuatro igualdades, resulta

$$AE + EB + CG + GD = AK + BF + CF + DK,$$

ó

$$AB + CD = AD + BC.$$

L. C. D. D.

RECÍPROCAMENTE:—*Si la suma de dos lados opuestos,* AB + DC, *es igual á la suma de los otros dos,* AD + BC, *el cuadrilátero es circunscriptible.*

Siempre podemos (n.° 127, *escol.* 1.°) describir un círculo tangente á los tres lados AB, BC, CD; fáltanos probar que es necesariamente tangente al cuarto lado AD. Supongamos por un momento que no lo sea; deberá ser la línea AD ó *secante* del círculo, ó *esterior* á él; y en ambos casos se podrá tirar paralelamente á ella (n.° 110.) una tangente A′D′ ó A″D″.

Séalo, por ejemplo, A′D′; y tendremos, por hipótesis,

$$AB + CD = AD + BC;$$

pero, en virtud de la proposicion directa, tenemos tambien

$$A'B + CD' = A'D' + BC;$$

de donde se deduce, restando miembro á miembro la primera igualdad de la segunda,

$$A'A + DD' = A'D' - AD,$$

y, por consiguiente,

$$A'D' = A'A + DD' + AD,$$

resultado absurdo (n.º 5.).

Igual conclusion sacaríamos considerando la tangente A″D″.

Luego es *cierta* la *recíproca*.

ESCOLIO. El *rombo* y el *cuadrado* son los únicos paralelógramos *circunscriptibles*, porque solo ellos tienen la suma de dos lados opuestos igual á la suma de los otros dos.

En el *cuadrado*, el círculo inscrito y el circunscrito son necesariamente *concéntricos*.

De los polígonos regulares.

N.º 131. Asi se llama todo *polígono* que es á la vez *equilátero* y *equiángulo*. — No se puede poner en duda la posibilidad de esta clase de polígonos; porque si se concibe que despues de haber dividido una circunferencia de círculo en cierto número de partes iguales, por ejemplo en 6, juntamos por medio de rectas consecutivas los puntos de division A, B, C, D, E, F (*fig.* 81), todas las cuerdas serán iguales (n.º 108.), y los ángulos tambien lo serán, como inscritos á segmentos iguales (n.º 126.); por consiguiente, será *regular* el polígono ABCDEF. Fig. 81.

El *triángulo equilátero* y el *cuadrado* son polígonos regulares.

TEOREMA IV. (*Fig.* 81.) Fig. 81.

Todo polígono regular es á la vez inscriptible y circunscriptible.

Sea ABCDEF un polígono regular cualquiera: si por *tres* vértices consecutivos A, B, C, hacemos pasar (n.º 127.) una circunferencia de círculo, digo que pasará tambien por todos los demas vértices.

En efecto, juntemos el punto O, centro del círculo, con los puntos A, B, C, D, y tendremos formados tres triángulos OAB, OBC, OCD.

Comparando dos de ellos, OAB, OBC, se ve que tienen OB comun, AB=BC por el supuesto, y OA=OC; por consiguiente son iguales (n.° 63, *caso* 3.°). Ademas, son isósceles, á causa de ser OA=OB; de donde resulta

$$BAO = ABO = OBC = OCB.$$

En segundo lugar, los dos triángulos OBC, OCD, son tambien iguales, por tener el lado OC comun, BC=BD por el supuesto, y el *ángulo* BCO = *ángulo* OCD, como acabamos de ver; luego son iguales (n.° 63, 2.° *caso*). De donde se infiere

$$OD = OB = OC = OA.$$

Luego la circunferencia debe pasar por el punto D.

Por la comparacion sucesiva de los triángulos OCD y ODE, ODE y OEF,..., se iria demostrando de un modo análogo que OE = OC, OF = OD,... Con lo cual queda demostrada la primera parte de la proposicion.

Respecto de la segunda, observemos que si desde el punto O se tiran las OG, OK, OI,..., perpendiculares á las AB, BC, CD,..., todas ellas serán *iguales* por lados de triángulos iguales; de donde se sigue que el círculo descrito desde el punto O como centro y con radio igual á OG, pasará por los puntos K, I, L,..., y ademas será tangente á los lados del polígono (n.° 102.). Lo cual demuestra la segunda parte de la proposicion enunciada.

N.° 132. Escolio 1.°— El punto O, centro del círculo tirado por los tres puntos A, B, C, se llama CENTRO *del polígono regular*, á causa de la doble propiedad que acabamos de demostrar.

Todos los triángulos OAB, OBC, OCD,... son isósceles, pues se ha visto que

$$OA = OB = OC = OD = OE = \dots;$$

de donde se deduce que las rectas OA, OB,..., son las bisectrices de los ángulos del polígono.

El radio del círculo circunscrito se suele llamar tambien RADIO *del polígono regular* ó *radio oblicuo*, y el del círculo inscrito se llama *apotema* ó *radio recto*. — La *sagita* de cada uno de los arcos subtendidos por los lados es la diferencia entre ambos radios.

N.° 133. Escolio 2.° — Si se designa por n el número de lados de un polígono regular, cada ángulo del mismo tiene por valor numérico

$$\frac{2(n-2)}{n}, \text{ ó } 2-\frac{4}{n} \text{ (n.° 86.)}.$$

Cada uno de los ángulos AOB, BOC,..., que se llaman ÁNGULOS EN EL CENTRO *del polígono*, equivale evidentemente á $\frac{4}{n}$.

Esto prueba que, en los polígonos regulares de *un mismo número de lados*, tienen todos los ángulos el *mismo valor numérico*, cualquiera que sea la magnitud de sus lados. En el mismo caso estan los *ángulos en el centro*.

TEOREMA V. (*Fig.* 82.) Fig. 82.

N.° 134. *Si, por los vértices* A, B, C, D, E,..., *de un polígono regular inscrito á una circunferencia de círculo, se tiran tangentes á esta, resultará un polígono circunscrito* A′B′C′D′E′ [del mismo número de lados] *que será regular.*

En efecto, las tangentes susodichas determinan evidentemente con los lados AB, BC, CD,..., del polígono inscrito, una serie de triángulos AA′B, BB′C, CC′D,..., todos iguales entre sí é isósceles; pues por un lado tienen

$$AB = BC = CD = DE = \ldots;$$

y por otro, los ángulos A′AB, A′BA, B′BC, B′CB, C′CD, C′DC,..., son iguales por tener la misma medida.

De aqui resulta

1.° —que todos los ángulos A′, B′, C′,... del polígono circunscrito son iguales;

2.° —que $AA' = A'B = BB' = B'C = CC' = \ldots;$

lo cual da por consiguiente

$$A'B' = B'C' = C'D' = \ldots;$$

teniendo pues sus lados y sus ángulos iguales, resulta *regular* el polígono circunscrito. *L. C. D. D.*

N.° 135. ESCOLIO.— Tiremos las rectas OA, OB, OC,..., despues las OA′, OB′, OC′,..., que serán las bisectrices de los ángulos en A, B, C,..., y de los en A′, B′, C′,... (n.° 132.). Hecho esto, de tener ambos polígonos un mismo número de lados, se sigue (n.° 133.) que los ángulos en el centro AOB, BOC,... del polígono inscrito, son iguales á los A'OB', B'OC',... del polígono circunscrito. Asi pues, las bisectrices OA', OB', OC',... de los ángulos en el centro de este, son á la vez bisectrices de los ángulos en el centro de aquel; es decir que

$$\textit{ángulo}\ AOA' = \textit{ángulo}\ A'OB = \textit{ángulo}\ BOB' = \ldots,$$

y por consiguiente

$$\textit{arco}\ AI = \textit{arco}\ IB = \textit{arco}\ BK = \textit{arco}\ KC = \ldots.$$

De aqui se infiere que puede tomar otra posicion el polígono circunscrito. Hágase, en efecto, *voltear* al polígono A'B'C'D'E'... al rededor del punto O, en el sentido de B hácia I, hasta tanto que el punto B, medio del arco IBK, venga á caer en I, medio del arco AIB; los puntos K, C, L,..., tomarán simultáneamente las posiciones respectivas B, K, C,...; y las tangentes A'B', B'C', C'D',..., se colocarán en A''B'', B''C'',...; y resultará un nuevo polígono circunscrito A''B''C''D''..., exactamente igual al primero, con los lados respectivamente *paralelos* á los AB, BC, CD,... del polígono inscrito.

Tendremos en adelante ocasion de considerar á un tiempo dos polígonos regulares del mismo número de lados, uno inscrito y otro circunscrito; y segun las circunstancias, asi elegiremos para este una de las dos posiciones que acabamos de indicar.

§. IV. *De los círculos secantes, tangentes, esteriores é interiores unos á otros.*

N.° 136. Hemos visto (n.° 127.) que por *tres puntos* no situados en línea recta, puede siempre hacerse pasar una circunferencia de círculo, y no se puede hacer pasar mas de *una*; de donde se infiere necesariamente que

Dos circunferencias no pueden tener tres puntos comunes sin confundirse.

Pero trazándose dos círculos en un mismo plano, puede acontecer que sus circunferencias *no* tengan *punto* alguno *comun*, ó que tengan *uno* ó *dos puntos comunes*. — En este último caso la cuerda que junta los dos puntos es una cuerda comun á entrambos círculos (n.° 14.).

La línea tirada por los dos centros se llama LÍNEA DE LOS CENTROS.

En fin, siendo la línea circular, en virtud de su definicion (n.° 13.), una curva cerrada y reentrante en sí misma, se puede asegurar que cuando una circunferencia tiene comunes con otra un punto *interior* y otro punto *esterior*, se confunden entrambas en una sola.

Esto supuesto, las dos proposiciones siguientes se pueden considerar como fundamentales en la teoría que pasamos á esponer.

Teorema I.

N.° 137. *Si dos circunferencias de círculo tienen dos puntos comunes, la línea de los centros es perpendicular á la cuerda comun, y la divide en dos partes iguales.*

En efecto, la perpendicular levantada en el punto medio de dicha cuerda, debe pasar por los centros (n.° 106.), y por consiguiente es la línea misma de los centros; *luego*, &c.

Teorema II. (*Fig.* 83.)

Fig. 83.

N.° 138. *Cuando dos circunferencias tienen comun un solo punto, corresponde este á la línea de los centros.*

En efecto, sean primero O, O′, los centros de los círculos; y supongamos que el punto comun á las dos circunferencias pueda estar situado fuera de la recta OO′, en M por ejemplo: bajemos la MP perpendicular á OO′, y prolonguémosla hasta M′ haciendo PM′ = PM. Aqui tenemos necesariamente OM′ = OM (n.° 40.), y O′M′ = O′M; de donde se inferiria que, perteneciendo el punto M á las dos circunferencias, debe tambien pertenecerles el punto M′: en cuyo caso tendrian *dos puntos comunes, lo cual es contra el supuesto*; luego, &c.

N.° 139. Antes de pasar á otras propiedades, examinaremos cuáles pueden ser las posiciones relativas de dos círculos trazados en un mismo plano.

Sean O, O′ (*fig.* 84) los centros de dos círculos descritos Fig. 84.
con radios *desiguales*; y supongamos que en los estremos A y B, A′ y B′ de los diámetros situados en la línea de los centros, se levantan á esta las perpendiculares, GG′ y KK′, II′ y LL′: las dos primeras serán tangentes (n.° 102.) al círculo O, y lo comprenderán enteramente; y lo mismo sucederá con las otras dos respecto del círculo O′.

Esto supuesto, admitamos que sin moverse el círculo O, ni sus límites, GG′, KK′, el otro círculo O′, ó mejor la faja

II′ LL′ que lo contiene, se mueve ó desliza paralelamente á sí misma, de modo que el punto O′ se vaya aproximando al punto O: es facil aqui reconocer que las posiciones relativas de entrambos círculos se reducen á *cinco* esencialmente diversas.

1.° Puede estar la faja ó banda II′ LL′ situada como en la
Fig. 84. *fig.* 84. — En cuyo caso son los círculos enteramente *esteriores uno á otro*, porque estan el uno á la izquierda de KK′, y el otro á la derecha de II′, hallándose estas rectas separadas por la distancia BA′.

Fig. 85. 2.° Supongamos ahora que el límite II′ (*fig.* 85) viene exactamente á confundirse con KK′. — En este caso la recta KK′ será tangente comun á los dos círculos, los cuales deberán por consiguiente tener comun el punto B de contacto, y no tendrán mas porque estan situados uno á la izquierda, y otro á la derecha de KK′; por consiguiente son todavía *esteriores* uno á otro, y se llaman *tangentes esteriormente.*

3.° Prosiguiendo su movimiento la faja II′, LL′, vendrá á
Fig. 86. colocarse la recta II′ (*fig.* 86) á la izquierda de KK′, quedando LL′ á la derecha. — En este caso, las dos fajas tienen una parte comun II′, KK′, y por consiguiente los círculos tendrán tambien comun un trozo de superficie MBA′N. Las circunferencias se cortarán necesariamente en dos puntos M y N; y por eso los círculos se llaman *secantes.*

4.° Supongamos que el segundo límite LL′ llega á caer
Fig. 87. sobre KK′ (*fig.* 87), quedando el primero II′ dentro de la faja GG′KK′, lo cual supone que el círculo O′ sea menor que el círculo O: es claro que entonces aquel solo tendrá comun con este el punto B′ ó B [que se han confundido en uno], teniendo dentro de él todos los otros. — En efecto, si por el centro O tiramos una recta cualquiera que encuentre á las dos circunferencias en los puntos M y N, y juntamos el punto O′ con el N, tendremos un triángulo OO′N que nos dará (n.° 38.)

$$ON < OO' + O'N < OO' + O'B < OB < OM.$$

Por consiguiente todos los puntos de la circunferencia O′ son interiores á la circunferencia O; teniendo solo comun el punto B, por cuya razon se llaman *tangentes interiormente.*

Fig. 88. 5.° En fin, cuando los dos límites II′, LL′ (*fig.* 88) estan colocados dentro de la faja GG′KK′, la circunferencia O′ estará enteramente *dentro* de la circunferencia O, sin tener con ella *punto alguno comun.* — En efecto, tirando la recta ON

y el radio O'N, tendremos

$$ON < OO' + O'N < OO' + O'A' < OA;$$

lo cual prueba que el punto N es *interior* á la circunferencia O.

Advert. Como caso particular de este último, puede suceder que coincidan los centros O, O'; entonces las circunferencias serán *concéntricas* (n.º 128.); y si tienen los radios iguales, se confundirán enteramente.

Las cinco posiciones relativas que acabamos de enumerar son evidentemente las únicas realmente distintas que pueden tener dos círculos; porque, si el límite GG' pasara al punto A, y luego se colocara á su izquierda, volveríamos á encontrarnos en circunstancias ya consideradas.

Admitido esto, se entenderán facilmente las siguientes proposiciones:

Teorema III. (*Fig.* 84 y 88.) Fig. 84 y 88.

N.º 140. *Cuando dos circunferencias*, OA, O'A', *no tienen punto ninguno comun, la distancia de los centros*, OO', *es mayor que la suma de los radios, ó menor que su diferencia*, segun son *esteriores* ó *interiores una respecto de otra.*

Porque en el primer caso tenemos (*fig.* 84), Fig. 84.

$$OO' = OB + BA' + A'O',$$

de donde $$OO' > OA + O'A';$$

y en el segundo (*fig.* 88), Fig. 88.

$$OO' = OA - O'A' - AA';$$

de donde $$OO' < OA - O'A'.$$

Llamemos, para abreviar, D á la distancia de los centros, R y R' los radios [suponiendo que el mayor sea R]; — tendremos, para el caso de ser *esteriores*, los círculos,

$$D > R + R',$$

y el de ser *interiores*

$$D < R - R'.$$

Teorema IV. (*Fig.* 85 y 87.) Fig. 85 y 87.

N.º 141. *Cuando dos circunferencias son tangentes este-*

rior ó *interiormente* (n.º 139, 2.º y 4.º), *la distancia de los centros es igual á la suma ó á la diferencia de los radios*, [segun sea *esterior* ó *interior* el contacto].

Ya se sabe (n.º 138.) que el punto de contacto está en la línea de los centros. — Bajo este supuesto, en el primer caso

Fig. 85. tenemos (*fig.* 85.)

$$OO' = OB + O'B, \text{ ó } D = R + R',$$

Fig. 87. y en el segundo (*fig.* 87),

$$OO' = OB - O'B, \text{ ó } D = R - R'.$$

Fig. 86.

Teorema V. (*Fig.* 86.)

N.º 142. *Cuando dos circunferencias son secantes* (n.º 139, 3.º), *la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.*

Debiendo estar fuera de la línea OO' de los centros, el punto M comun á entrambas circunferencias (n.º 137.), resulta que los tres puntos O, O′, M, forman un triángulo que da (n.º 38.)

$$OO' < OM + O'M, \text{ y } OO' > OM - O'M,$$

ó $$D < R + R', \text{ y } D > R - R'.$$

L. C. D. D.

N.º 143. Escolio 1.º — Las *recíprocas* de las proposiciones precedentes, que son *cinco*, segun las posiciones relativas de los círculos, son *verdaderas* y se pueden demostrar *ad absurdum* con arreglo al principio establecido en el n.º 21.

Asi, cuando dos circunferencias se hallan situadas en un mismo plano,

1.º — Si $D > R + R'$,

los dos círculos son esteriores uno á otro;

2.º — Si $D = R + R'$,

los dos círculos son esteriormente tangentes;

3.º — Si $D < R + R'$, y $D > R - R'$,

los dos círculos son secantes;

4.º — Si $D = R - R'$,

el círculo menor es interiormente tangente al mayor;

5.° — En fin, si $D < R - R'$,

el círculo menor es interior al mayor.

Nos reduciremos á demostrar la tercera de estas cinco, por ser la que mas frecuentes aplicaciones tiene.

Sea pues al mismo tiempo

$$D < R + R', \text{ y } D > R - R';$$

decimos que en este caso las dos circunferencias se cortan necesariamente. Porque, si no se cortaran, ó serian *tangentes*, ó no tendrian *punto alguno comun.*

Si fuera lo *primero*, tendriamos, en virtud del *teorema* IV,

$$D = R + R', \text{ ó } D = R - R',$$

lo cual es contra el supuesto.

Si sucediera lo segundo, tendriamos (*teorema* III)

$$D > R + R', \text{ ó } D < R - R',$$

lo cual tambien sería contrario al supuesto.

Para las otras recíprocas se harán raciocinios análogos.

N.° 144. Escolio 2.° — El *teorema* V y su *recíproca* pueden esponerse en un enunciado mucho mas conciso,

Para que dos círculos se corten, ES NECESARIO Y BASTA *que el mayor de los tres elementos que determinan su posicion relativa* [la distancia de los centros y los dos radios], *sea menor que la suma de las otras dos.* En efecto, esta es la condicion *característica* de que existe un triángulo entre los tres elementos.

N.° 145. Escolio 3.° — Se ha supuesto en todo lo que precede, que eran *desiguales* los radios de los dos círculos; pero aunque fueran iguales y tuvieramos $R = R'$, no por eso caducarian las diversas proposiciones.

Por ejemplo, si á la vez tenemos

$$R = R', \text{ y } D = 0,$$

lo cual supone que son *concéntricas* las dos circunferencias, una de las relaciones precedentes, $D = R - R'$, se reduce á $0 = 0$; cuyo resultado en el analísis algebráica es en general símbolo de *indeterminacion*; y efectivamente, en el caso que examinamos, siendo concéntricas ambas circunferencias y teniendo los radios iguales, *deben tocarse en todos sus puntos.*

CAPITULO III.

DE LOS PROBLEMAS RELATIVOS Á LOS DOS CAPÍTULOS PRECEDENTES.

N.° 146. INTRODUCCION.—*Nociones generales* sobre los dos métodos de resolver los problemas, el ANALÍSIS y la SÍNTESIS.

Al definir los problemas (n.° 17, 6.°) dijimos que los hay de dos clases: unos *gráficos* ó relativos á las figuras, y otros *numéricos* ó relativos á la estension. Aqui solo podemos por ahora tratar de los primeros, porque los segundos suponen el conocimiento de las relaciones numéricas cuya investigacion debe hacer el objeto del segundo libro.

En general, RESOLVER UN PROBLEMA, es (n.° 17.) determinar ciertas cosas *desconocidas* por medio de otra ú otras conocidas ó *dadas*, que tienen con las primeras las relaciones que indica el *enunciado*.—El resultado obtenido se llama SOLUCION del problema.

Cuando se trata de problemas *gráficos*, el objeto es *trazar* [por medio del compas y de la regla] una figura que cumpla ciertas condiciones puestas en el enunciado ó propuestas de la cuestion; y eso es lo que se llama *construir* el problema.

Para conseguir este fin, pueden seguirse dos métodos, el ANALÍSIS y la SÍNTESIS.

Cuando se quiere proceder por el método analítico, se empieza por *suponer resuelto el problema*; es decir que, por el pronto y sin instrumento, se traza de cualquier modo una figura que se supone llenar las condiciones del enunciado. En seguida, por medio de otras operaciones preparatorias, y con ayuda de las relaciones que enlazan á los *datos* con las *incógnitas*, se procura descubrir alguna *construccion* que, ejecutada realmente con el compas y la regla, tomando por base los datos de la cuestion, conduzca á la *solucion* demandada; ó bien se reduce la cuestion propuesta á otras mas ó menos sencillas, que de antemano se saben resolver. — En esta serie de deducciones consiste lo llamado *analísis* del problema.

El método *sintético* es inverso del precedente; y consiste en prescribir al principio las operaciones que deben ejecutarse, probando despues que su resultado satisface á las condiciones del problema.

Cada uno de estos métodos tiene su carácter. — El primero, propiamente hablando, es el *método de invencion*; y es indispensable su uso para acertar con la construccion. — El segundo, es por el contrario, el *método de demostracion*; y su uso supone que ya se conoció la construccion por el analísis, cuya eficacia demuestra muchas veces mas directamente. — Asi, el primer método suele ser mucho mas largo, porque despues de haber *analizado* un problema, no se puede menos de recurrir á la *síntesis* para demostrar completamente que estan satisfechas las condiciones del enunciado.

La necesidad de ser breves nos obligará casi siempre en lo sucesivo á suprimir el *analísis* del problema, ó al menos á indicarle de un modo muy sucinto, especialmente en los problemas mas elementales; — como tambien, para abreviar la *síntesis*, daremos á veces la construccion sin demostracion, cuando nos parezca el analísis bastante para suplirla.

El uso de estos métodos no se reduce á la resolucion de los problemas; pueden ambos aplicarse á los teoremas, el *analísis* para descubrirlos, y la *síntesis* para demostrarlos. Toda la diferencia está en que el enunciado de la proposicion *sigue* ó *precede* á la demostracion, segun se hace uso del analísis ó de la síntesis. Los *corolarios* y los *escolios* de los capítulos precedentes ofrecen numerosos ejemplos de cada caso.

En resúmen, el *analísis* sirve para *encontrar* verdades *desconocidas*, y la *síntesis* para *probar* verdades *conocidas*.

N.º 147. Para completar la resolucion de un problema, se necesita ademas en muchos casos que el analísis ó la síntesis vayan acompañadas de una *discusion*. — Asi se llama el examen minucioso de las circunstancias variables de la cuestion y de sus consecuencias particulares, de lo cual resulta que, segun los casos, es el problema *determinado*, ó *indeterminado*, ó *imposible*: es decir, que tiene un número *limitado* de soluciones, ó que le tiene *ilimitado*, ó que no tiene *ninguna*.

Con este motivo, observaremos que hay una distincion esencial entre el *número de soluciones* de que es susceptible un problema, y el *número de medios* empleados para llegar á cada solucion, y que puede variar muchísimo segun la naturaleza de la cuestion.

Respecto de estos medios, la construccion se llama *mas ó menos sencilla*, segun que es *menos ó mas considerable* el número de líneas que deben trazarse: se llama *mas ó menos elegante*, segun el partido mas ó menos ventajoso que se saca de las líneas dadas y de las ya descritas.—Una construccion á la vez sencilla y elegante, revela *sagacidad* y *juicio* en su descubridor.

—Este capítulo constará de *tres párrafos*.—El primero tratará de las *perpendiculares*, de los *ángulos* y de las *paralelas*; el segundo, de la *construccion de los polígonos* con ciertos datos; y el tercero, del *encuentro de rectas y círculos*, ó de *círculos entre sí*.

Observacion importante. En toda operacion gráfica ejecutada sobre el papel, se supone para mayor comodidad que una línea del problema [considerada base de la construccion], es paralela á la orilla inferior del pliego de dibujo, ó, lo que es lo mismo, que se halla situada *horizontalmente*.—Con esto, las dos regiones del plano (n.° 11.), determinadas por la recta, pueden denominarse *superior* é *inferior*; y se dice que un punto está situado *encima* ó *debajo* de la recta, segun se encuentre en la *region superior* ó en la *inferior*.

Estas locuciones, aunque poco conformes con el lenguage ordinario de la Geometría, tienen la ventaja de abreviar algunas veces el discurso.

§. I. *De las perpendiculares, de los ángulos y de las paralelas.*

Fig. 89.

PROBLEMA I. (*Fig.* 89.)

N.° 148. *En un punto dado A de una recta indefinida LM, levantar á esta una perpendicular.*

ANALÍSIS. Conocido ya un punto de esta perpendicular, basta (n.° 5.) determinar otro punto; lo cual obtendriamos si, despues de haber señalado en LM dos puntos, B, C, equidistantes del punto A, pudiéramos obtener por encima de LM otro punto que estuviera á igual distancia de los mismos puntos B, C.

SÍNTESIS.—1.°—*Tomenos con el compas dos distancias* iguales AB, AC;—2.º—desde los puntos B, C, con un mismo radio arbitrario [pero mayor que AB], describamos dos circunferencias;—3.º—juntemos el punto D en que se cortan con el punto A:

Y asi tendremos la perpendicular pedida.

En efecto, en virtud de la construccion, las dos circunferencias tienen la distancia de los centros *menor* que la suma de los radios [porque cada uno de estos es mayor que la mitad de aquella], y mayor que la diferencia de los mismos radios [que es *nula*]; luego (n.º 143.) las circunferencias se cortan en un punto D; cuyo punto unido al A, nos da la recta DA, necesariamente perpendicular á BC ó LM (núm.º 41, *escol.* 2.º)

Escolio 1.º Las dos circunferencias se cortan tambien en otro punto D′, que sirve de comprobacion, porque los tres puntos D, A, D′, deben estar *en línea recta.*

En la práctica se trazan solo los arcos EF y GK, E′F′ y G′K′, que determinan los puntos de interseccion de las circunferencias.

Escolio 2.º Como siempre puede ejecutarse esta construccion, se infiere que,

Por un punto dado en una recta, siempre se le puede levantar una perpendicular;

Ademas, ya hemos probado (n.º 27.) que

No se le puede levantar mas que una.

Problema II. (*Fig.* 90.) Fig. 90.

N.º 149. *Desde un punto* A *tomado fuera de una recta* LM, *bajarle una perpendicular.*

El análisis de este problema es casi enteramente igual al del precedente. Bastaria pues tener otro punto de la perpendicular, y para esto buscar en LM dos puntos equidistantes de su pie.

Síntesis.—1.º—Desde el punto A como centro, con un radio conveniente, *describamos* un arco de círculo que corte á LM en los puntos B, C;—2.º—desde los puntos B y C como centros, con otro radio mayor que la mitad de BC, *describamos* otras dos circunferencias [ó mejor, cuatro arcos EF y GK, E′F′ y G′K′], que se corten en los puntos D y D′;—3.º—*tiremos* la recta ADD′:

Y tendremos la perpendicular.

En efecto, las dos circunferencias descritas deben cortarse, porque, en virtud de la construccion, la distancia de los centros B y C es *menor* que la suma de los radios, y *mayor* que su diferencia; ademas, los tres puntos A, D, D′, pertenecen por su posicion á la perpendicular levantada en el medio de BC; *luego*, &c.

Escolio. Siendo siempre posible la construccion anterior, podemos inferir que,

Desde un punto tomado fuera de una recta, siempre se puede bajar á esta una perpendicular;

Ademas, queda ya establecido (n.º 27.) que

No se puede bajar mas que una.

Fig. 91.

Problema III. (*Fig.* 91.)

N.º 150. *Dividir en dos partes iguales una recta* AB *determinada de longitud;*—ó, en otros términos,—*Hallar el punto medio de una recta.*

Analísis. Bastaria tirarle una perpendicular que la dividiera por la mitad; y para esto basta obtener fuera de ella dos puntos equidistantes de A y de B.

Síntesis. 1.º—*Trácense* desde los puntos A y B, como centros, con un mismo radio tomado á voluntad [pero mayor que la mitad de AB], dos circunferencias [ó dos arcos de círculo], que se corten en dos puntos C, C′; 2.º—*Tírese* la CC′.

El punto O en que la recta CC′ encuentra á la AB, es el punto medio de esta.

La demostracion es igual á la de los problemas anteriores.

Advert. Conviene, para mayor exactitud en la determinacion del punto O, determinar del mismo modo otros dos puntos D, D′, de la recta CC′.

N.º 151. Corolario.—De esto resulta evidentemente el medio

1.º de—*Describir sobre una recta dada como diámetro, una semi-circunferencia ó una circunferencia entera:*

Porque la cuestion se reduce evidentemente á determinar el medio de dicha recta;

2.º de—*Hacer pasar un círculo por tres puntos dados:*

Despues de haber *unido* estos puntos de dos en dos por medio de rectas, todo se reduce á *levantar* perpendiculares (n.º 127.) en sus *mitades* respectivas.—El punto de concurso de dichas perpendiculares es el centro del círculo; y el *radio* se tendrá *tirando* una recta desde el centro á uno de los puntos dados.

3.° de—*Hallar el centro de un círculo ó de un arco de círculo ya descrito*,—cuando no se conoce ó se ha perdido:

Tómense á arbitrio tres puntos en el arco, y *opérese* como en el caso anterior;

4.° en fin, de—*Dividir un arco de círculo en dos partes iguales*:

Tírese la cuerda del arco, y *bájesele* desde el centro (n.° 149.) una perpendicular;—ó bien, *levántese* (n.° 150.) una perpendicular en el punto medio de la cuerda; y pasará por el punto medio del arco (n.° 127.).

Advert. Esta segunda construccion es la única posible cuando no se conoce el centro del arco.

PROBLEMA IV. (*Fig.* 92.) Fig. 92.

N.° 152. *Tirar una perpendicular á una recta que solo puede prolongarse en un sentido*,—bien sea 1.°—*sobre un punto* A *tomado en ella misma*,—bien sea 2.°—*desde un punto* D *tomado fuera de ella.*

Los medios espuestos para resolver los dos primeros problemas de este párrafo, suponen evidentemente que se pueden tomar en la recta dada, dos puntos equidistantes de uno cualquiera de ella. Pero esta condicion no siempre puede cumplirse, como por ejemplo, cuando el punto A ó el punto D está demasiado próximo á una de las orillas del papel en que se dibuja.

PRIMER CASO. Sea dado el punto A en la recta AX que no puede prolongarse á la izquierda de A.

ANALÍSIS. Se obtendria (n.° 94.) un triángulo DAE rectángulo en A, si pudieramos determinar una recta DE tal, que juntando su punto medio O con el punto A, se tuviera

$$OA = OD = OE;$$

de donde resulta la construccion siguiente:

1.°—*Tómese* un punto O á voluntad por encima de AX;—2.°—desde ese punto como centro, con un radio igual á la distancia OA [que es determinada], *descríbase* un arco de círculo que cortará necesariamente á AX en otro punto E;—3.°—*Tírese* la EO, y *tómese* OD = OE.

El punto D pertenecerá á la perpendicular pedida: — en efecto, el triángulo DAE es rectángulo en A, porque tiene

$$OD = OE = OA.$$

Segundo caso. Sea dado el punto D *fuera* de la recta.

Síntesis. — 1.° — *Tírese* por el punto dado una recta cualquiera DE; — 2.° — *búsquese* (n.° 150.) el punto medio O de la recta; — 3.° — desde el punto O, con un radio OE = OD, *trácese* un arco de círculo que corte á la recta AX en un punto A; — 4.° — *trácese* la DA.

Esta recta será la perpendicular pedida; — pues por esta construccion, tenemos tambien

$$DA = OE = OD.$$

Advert. Determinado el *pie* A de la perpendicular, se pueden hallar, como en el primer caso, cuantos mas puntos se quieran.

Fig. 93. **Problema V.** (*Fig.* 93.)

N.° 153. *Por un punto dado A de una recta indefinida AX, tirar otra recta que forme con ella un ángulo dado M.*

Síntesis. Desde los puntos M y A como centros respectivos, y con un radio MN = AB, *describamos* — 1.° — el arco NP, comprendido entre los lados del ángulo y terminado en los puntos N y P; — 2.° — el arco indefinido BB′; — 3.° — Desde el punto N como centro, con un radio igual á la cuerda del arco NP, *trácese* otro arco que corte al BB′ en el punto C; — 4.° — *tírese* la recta AC:

El ángulo BAC es el ángulo pedido.

En efecto, en virtud de la construccion, las cuerdas de los dos arcos NP y BC, son iguales; luego tambien lo son los arcos (n.° 109.), y por consiguientc (n.° 25.) los ángulos BAC, NMP.

Escolio 1.° Para dividir un ángulo en 2, 4, 8,... partes iguales, basta dividir el arco que le corresponde en *dos* partes iguales (n.° 152, 4.°), despues cada mitad en otras dos, y asi sucesivamente.

Escolio 2.° El mismo problema suministra el medio de *Determinar el suplemento de la suma de dos ángulos dados*; — ó en otras palabras, — *Conociendo dos ángulos de un triángulo, determinar el tercero.*

Despues de *formar*, en un punto A de una recta cualquiera AB (*fig.* 94), un ángulo BAC igual al primer ángulo dado, *construyamos* sobre AC, partiendo desde el punto A, un ángulo CAD igual al otro dado; *prolonguemos* la AB hasta B′; y el ángulo DAB′ es el suplemento pedido. Fig. 94.

PROBLEMA VI. (*Fig.* 95.) Fig. 95.

N.° 154. *Desde un punto* C *dado fuera de una recta* AB, *tirar una paralela á esta recta.*

Despues de *bajar* (n.° 149.) desde el punto C, una recta CK perpendicular á AB, podria *tirarse* (n.° 148.) por el mismo punto C, otra recta CG perpendicular á CK; — y se tendria la paralela pedida.

Pero el problema anterior, y la propiedad de los ángulos *alternos-internos*, nos proporcionan una construccion mucho mas sencilla.

SÍNTESIS. — 1.° — *Tírese* desde el punto C una recta cualquiera CD; — 2.° — desde los puntos C y D como centros, con un radio CD, *trácense* dos arcos de círculo, uno indefinido, DD′, y otro, CE, terminado en un punto E de la recta AB; — 3.° — *tómese* (n.° 153.), partiendo desde el punto D, en DD′, un arco DF = CE; — 4.° — *tírese* la CF.

La recta FCG trazada de este modo es la paralela pedida. En efecto, en virtud de esta construccion, tenemos

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{FCD} = \textit{ángulo}\ \mathrm{CDE};$$

luego (n.° 47.) las dos rectas AB, CG, son paralelas.

N.° 155. COROLARIO. — Los problemas V y VI dan el medio de resolver la cuestion siguiente:

Por un punto C (*fig.* 96.) *tomado fuera de una recta* AB, *tirar una recta que forme con la primera un ángulo dado* M. Fig. 96.

En un punto cualquiera I de AB, *hágase* un ángulo LIB igual al M (n.° 153.); despues por el punto C, *tírese* la CD paralela á IL:

CD es evidentemente la recta pedida, pues la construccion da

$$\mathrm{CDB} = \mathrm{LIB} = \mathrm{M}.$$

Advert. Como en el punto I se puede formar otro ángulo

L'IA=M, resulta que el problema tiene dos soluciones, CD y CD'.

Fig 97. **Problema VII.** (*Fig.* 97.)

N.° 156. *Sobre una recta AB dada de longitud, trazar un arco de círculo* (n.° 126, *advert.*) *capáz de contener un ángulo dado* M.

A primera vista se ofrece el siguiente medio de construccion.

1.° — *Tírese* por el punto A, una recta cualquiera AC; — 2.° — desde el punto B, *tírese* otra recta BC, que forme con la anterior el ángulo ACB=M; — 3.° — *hágase* pasar (n.° 151.) por los tres puntos A, B, C, una circunferencia.

ACC'B es el arco pedido, pues todos los ángulos inscritos á él son iguales entre sí y al ángulo M (n.° 126.).

Pero el analísis siguiente conduce á una construccion mas sencilla.

Analísis. Supongamos resuelto el problema; y sea ANB el arco pedido. Si, en el punto B, tiramos la tangente BL, el ángulo ABL será igual al ANB, que lo es al M (n.° 124.); y como no se puede tirar por el punto B mas que una sola tangente (n.° 102.), resulta que, recíprocamente, formando en el punto B un ángulo ABL igual al M, la recta LB será tangente del círculo; luego (n.° 102.) la recta levantada en el punto B perpendicularmente á BL, pasará por el centro. — De aqui resulta la siguiente construccion:

Síntesis. — 1.° — *Fórmese* en el punto B un ángulo ABL = M; — 2.° — *Levántese* en ese mismo punto una recta BK perpendicular á BL (n.° 148); — 3.° — en el punto medio de AB *tírese* una perpendicular IG; las dos perpendiculares se cortarán necesariamente (n.° 50.) en un punto O; — 4.° — desde este punto, con el radio OA=OB, *descríbase* un círculo.

La parte ANB es el arco pedido.

En efecto, en virtud de la construccion, la circunferencia trazada es tangente en B á la recta BL; luego, todos los ángulos en C, C', C'',..., son iguales á ABL, es decir, al ángulo M.

Escolio 1.° El centro del círculo estará situado *encima* ó *debajo* de AB (*véase* la observacion del n.° 147.), segun sea *agudo* ú *obtuso* el ángulo dado (*postul.*, n.° 34.)

Si el ángulo dado es *recto*, el centro se halla en el punto medio de AB, y el segmento equivale á un semi-círculo.

ESCOLIO 2.° En caso de hallarse el centro por *encima* de AB, el *segmento inferior*, AN'B, del círculo descrito, es evidentemente capaz del *suplemento* del ángulo dado.

En fin, el problema admite *dos soluciones*, cuando nada indica en el enunciado, si el segmento debe estar situado encima ó debajo de AB: — Entonces se obtienen (*fig.* 98) dos Fig. 98.
segmentos AMB, AM'B, *iguales entre sí*, y que pueden superponerse invertidos.

§. II. *Construccion de los polígonos.*

Empezaremos por los triángulos, á cuya construccion se reduce la de todas las figuras rectilíneas.

PROBLEMA I. (*Fig.* 99.) Fig. 99.

N.° 157. *Construir un triángulo, dándosenos* — ó bien 1.° — *un lado y sus dos ángulos adyacentes*, — ó bien 2.° — *dos lados y el ángulo comprendido*, — ó bien 3.° y último — *los tres lados.*

No insistiremos en los dos primeros casos, cuya construccion se deduce facilmente del problema del n.° 153. Solo observaremos que en el primer caso, para que el triángulo sea *posible*, es necesario y basta que los dos ángulos dados valgan puntos *menos de dos rectos*; y que en el segundo, *siempre* es el problema evidentemente *posible*, porque despues de formar un ángulo igual al ángulo dado (n.° 153.), se pueden siempre tomar en sus lados indefinidos dos partes iguales á las líneas dadas.

TERCER CASO. Sean m, n, p, los tres lados dados (*).

CONSTRUCCION. — 1.° — En una recta indefinida AX, *tomemos* una parte AB igual á uno cualquiera de los lados dados, por ejemplo, á p; — 2.° — haciendo respectivamente centro en A y en B, con los radios respectivos m y n, *trácense* dos circunferencias [ó mejor, dos arcos de círculo], que se cortarán necesariamente en un punto C, si el triángulo es posible; — 3.° — *tírense* las CA y CB.

(*) Cuando se quiere representar por medio de una sola letra, una línea dada de longitud, se acostumbra usar, para precaver confusiones, una letra minúscula, m, n, . . . , en vez de las mayúsculas M, N, . . .

El triángulo ABC satisface evidentemente á las condiciones del enunciado.

Advert. La construccion de un triángulo *equilátero* es un caso particular de este: los radios de los arcos ó círculos descritos, son entonces *iguales entre sí*, y al lado dado, que debe de antemano tomarse en la recta AX.

Discusion. Para que el triángulo sea *posible*, es necesario y basta (n.º 144.) que el lado AB, elegido por base de la construccion, sea *menor* que la suma de los otros dos y *mayor* que su diferencia.

Hablando propiamente, la condicion necesaria y suficiente para que sea posible un triángulo dándosenos los tres lados, es que,

Si se trata de un triángulo ESCALENO, — *el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos*;

Si debe ser ISÓSCELES, — *que cada uno de los lados iguales sea mayor que la mitad de la base*;

En fin, si debe ser EQUILÁTERO, — *es siempre posible.*

ESCOLIO. Observarémos respecto del primer caso del problema I, que si en lugar de un lado y los dos ángulos adyacentes, se diera *un lado*, *el ángulo opuesto*, y *uno de los ángulos adyacentes* (n.º 67.), la cuestion se reduciria fácilmente al caso primero, en virtud del *escolio* 2.º del n.º 153.

Fig. 100.

PROBLEMA II. (*Fig.* 100.)

N.º 158. *Construir un triángulo dándose dos lados* [*m*, *n*], *y el ángulo* N *opuesto á uno de ellos* [al *n*, por ejemplo].

[El examen de las circunstancias relativas á la *resolucion* y *discusion* de este problema, merece toda la atencion de los principiantes.]

SÍNTESIS. — 1.º — En una recta indefinida AX, *constrúyase* un ángulo YAX igual á N; — 2.º — *tómese* en AY la magnitud AC igual al lado *m*; — 3.º — haciendo centro en C con un radio igual á *n* [lado opuesto al ángulo dado N], *tracemos* un arco de círculo que cortará generalmente á la recta AX en dos puntos B, B′; — 4.º — *tiremos* la CB y CB′; y los dos triángulos ACB, ACB′, satisfarán á la propuesta;

Porque, en virtud de la construccion, se tiene BAC ó BAC′ = N, AC = *m*, y CB ó CB′ = *n*, lado opuesto á N.

Asi pues, el problema admite *dos soluciones*. — Pero vamos sin embargo á manifestar que, segun sean las magnitudes relativas de los datos, asi puede tener *dos soluciones* como antes, ó tener solo *una*, ó no tener *ninguna*.

Discusion. Observemos ante todo, que si despues de haber construido el ángulo YAX = N, y tomado AC = m, bajamos desde el punto C la CD perpendicular á la AX, esta perpendicular [cuya consideracion nos será muy útil] puede tener *tres* posiciones diferentes, segun sea la especie del ángulo dado N: puede (n.º 57.) caer *en* el ángulo YAX (*fig.* 100 y 101), ó confundirse *con* CA (*fig.* 102), ó caer *fuera* del ángulo YAX (*fig.* 103), segun sea N *agudo*, *recto*, ú *obtuso*. Fig. 100, 101, 102 y 103.
— En el primer caso y en el tercero, tenemos siempre (n.º 39.) CD < CA ó < m; y en el segundo, CD = CA = m.

— Esto supuesto, examinemos primero el caso en que N es agudo.

En este caso, pueden hacerse *cinco* hipótesis diferentes:

Ó bien, n < CD, y con mayor razon, < m,

Ó n = CD, y por consiguiente, n < m;

Ó n > CD, pero < m;

Ó n á la vez > CD y > m;

Ó, en fin, n = m, y por consiguiente > CD.

1.º — Sea n < CD. — La circunferencia descrita desde C como centro (*fig.* 100) con n por radio, no cortará á la recta AX; por consiguiente, el problema *no* tiene solucion. Fig. 100.

2.º — Sea n = CD. — La circunferencia susodicha será *tangente* á la recta AX en un punto D (*fig.* 100); y se obtendrá un triángulo *rectángulo* ADC por *única* respuesta de la cuestion. Fig. 100.

3.º — Sea n > CD, pero < m ó < CA. — En este caso la circunferencia cortará á la recta AX en dos puntos B y B′ (*fig.* 100), situados ambos á la derecha del punto A (n.º 40.); y resultarán dos triángulos, ABC, AB′C, que satisfarán á la vez las condiciones del enunciado. Luego, en este caso, admite el problema *dos soluciones*. Fig. 100.

4.º — Sea n > CD y > m ó > CA, al mismo tiempo. — La circunferencia cortará tambien á la recta AX en dos puntos B, B′ (*fig.* 101); pero estarán colocados necesariamente n.º 40), uno á la izquierda, y otro á la derecha del punto A; lo cual dará *un solo* triángulo, ABC, que satisfaga á la cuestion, porque en el triángulo AB′C, el ángulo CAB′ es, no igual, sino suplemento de N. Fig. 101.

5.º — En fin, sea n = m. — La circunferencia cortará á la recta AX en los puntos A, B, y dará por *única solucion* el triángulo isósceles CAB. Asi, en este nuevo caso, no admite tampoco el problema mas que *una solucion*.

— Supongamos ahora que el *ángulo* N *sea recto*; en este caso CD se confunde con CA ó *m*, á quien es igual.

En este caso no pueden hacerse mas que *dos hipótesis*:

Ó $n = CD = m$, en cuyo caso la circunferencia descrita es solo *tangente* á la recta AX en el punto A, y resulta una recta CA por respuesta de la cuestion; de modo que en este caso especialísimo no hay solucion propiamente dicha, pues lo que se pedia era un triángulo:

Fig. 102. Ó bien, $n > CD > CA$ (*fig.* 102); en cuya hipótesis, la circunferencia corta á la recta AX en dos puntos, B, B′, que dan por *soluciones* dos triángulos rectángulos, CAB, CAB′, *rectángulos* en A; pero son *iguales* y *superponibles*: por consiguiente, en esta hipótesis el problema, propiamente hablando, *solo* admite *una solucion*.

— Nos falta únicamente suponer que el *ángulo* N *sea obtuso*.

Puesto que en todo triángulo, al mayor ángulo se opone el mayor lado, es necesario en el caso actual, *para que el triángulo sea posible*, suponer á $n > m$, y por consiguiente $n > CD$. Entonces la circunferencia descrita no puede ocasio-

Fig. 103. nar mas que *un solo* triángulo ABC (*fig.* 103) que satisfaga al enunciado, pues el otro triángulo AB′C tendria su ángulo CAB′, no igual, sino suplementario de N.

Asi pues, en el caso de ser N obtuso, el problema ó tiene *solo una* solucion, ó no tiene *ninguna*.

Hemos creido deber esponer con toda latitud la discusion del problema precedente, para dar á los jóvenes idea del modo de discutir completamente una proposicion dada.

N.° 159. Escolio 1.° — El problema I y el escolio á él adjunto corresponden á los casos de igualdad espuestos en el n.° 63; pero el problema que acabamos de resolver da lugar á un nuevo teorema.

Para manifestarlo, observemos desde luego que solo en

Fig. 100. la hipótesis de ser $n > CD$, pero $< m$ ó CA (*fig.* 100), es cuando el problema precedente ofrece en realidad *dos soluciones*; y que entonces los dos triángulos que le corresponden son, uno acutángulo en B, y otro obtusángulo en B′, siendo el ángulo CB′A suplemento de CBA [á causa de ser CB = CB′].

De donde resulta este nuevo caso de igualdad, á saber:

Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados res-

pectivamente iguales é igual el ángulo opuesto á uno de ellos, con tal que el ángulo opuesto al segundo lado sea de la MISMA ESPECIE *en ambos triángulos.*

En efecto, con arreglo á la construccion del problema II, *solo* puede existir *un triángulo* que llene todas las condiciones del enunciado precedente.

N.° 160. ESCOLIO 2.° — Estos *cuatro casos de igualdad* de los triángulos oblicuángulos son los únicos que pueden presentarse; y por consiguiente podemos concluir que

Un triángulo queda determinado cuando se conocen TRES *de los seis elementos* [lados y ángulos] *que le constituyen*, — con tal — 1.° — que entre los datos haya *á lo menos un lado* (1) — 2.° — que si se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, se diga de qué especie es el *ángulo opuesto* al otro lado.

Del triángulo isósceles y del triángulo rectángulo.

Cuando se sabe de antemano que el triángulo debe ser *isósceles ó rectángulo*, equivale á un *dato* este conocimiento; y solo se necesitan otros dos para determinar el triángulo. — De aqui los dos problemas siguientes:

PROBLEMA III.

N.° 161. *Construir un triángulo isósceles, conociendo*,

Ó bien 1.° — *uno de los lados iguales y la base*;
ó 2.° — *uno de los lados iguales y un ángulo*;
ó 3.° — *la base y uno de los ángulos adyacentes*;
ó 4.° — *la base y el ángulo opuesto.*

SÍNTESIS. El *caso primero* de este problema está comprendido en el 3.° del n.° 157, puesto que entonces se conocen los tres lados: solo debe advertirse que convendrá tomar la base del triángulo por base de la construccion.

En el *segundo caso*, pueden hacerse *dos* hipótesis:

Ó bien el ángulo es adyacente al lado dado; — y entonces como el segundo ángulo es suplementario del duplo del ángulo dado, puede determinarse facilmente (n.° 153, *escol.*), y el problema queda comprendido en el primer caso del primer problema.

Ó bien el ángulo dado es opuesto al lado dado. — En esta hipótesis, se conoce un ángulo y los dos lados iguales que le

(1) Cuando se dan [illegible]
mas que [illegible]
Determ[illegible]

forman; por consiguiente la proposicion entra en el 2.° caso del problema I.

En el *tercer caso*, se conocen un lado y los dos ángulos adyacentes, que son iguales entre sí; y por consiguiente equivale al caso 1.° del n.° 157.

En fin, en el *cuarto caso*, es necesario tomar el suplemento del ángulo dado y *dividirle* en dos partes iguales (n.° 153, *escol.* 1.° y 2.°), con lo cual conoceremos los tres ángulos y un lado del triángulo, entrando la construccion tambien por consiguiente en la primera del n.° 157.

O mas simplemente, sobre la base *dada*, *tracemos* un arco de círculo (n.° 156.) capaz de contener el ángulo dado; despues, en el punto medio del lado mismo, *levántese* una perpendicular, y *júntese* el punto en que corta á la circunferencia descrita, con los estremos de la base; y se tendrá el triángulo pedido.

Problema IV.

N.° 162. *Construir un triángulo rectángulo, conociendo,*
Ó bien 1.°—*un cateto y un ángulo agudo*;
ó 2.°—*la hipotenusa y un ángulo agudo*;
ó 3.°—*los dos catetos*;
ó 4.°—*la hipotenusa y un cateto.*

[Estos son los únicos casos admisibles.]

No insistiremos en los tres primeros, cuya construccion se halla comprendida, ó en la del primero, ó en la del segundo del n.° 157: pero espondremos dos medios de construccion para el cuarto.

Fig. 104. Primera construccion. (*fig.* 104.) — Despues de haber *formado* un ángulo recto YAX (n.° 153.), —1.°— *tómese* en AX una parte AB igual al cateto conocido; — 2.° — desde el punto B como centro, con un radio igual á la hipotenusa, *trácese* un arco de círculo que corte á YA en un punto C, y *tírese* la BC.

El triángulo BAC, satisface evidentemente á las condiciones exigidas.

Advert. El triángulo no es *posible* sino en cuanto es la hipotenusa mayor que el cateto dado.

Fig. 105. Segunda construccion. (*fig.* 105) — Sobre una recta AB, igual á la hipotenusa, *trácese* (n.° 151.) una semi-circunferencia; despues haciendo centro en A, con un radio igual

al cateto dado, *trácese* un arco de círculo que corte á la semicircunferencia; y *tírese* la CB.

El triángulo CAB es el triángulo pedido.

Advert. Las circunstancias determinarán cuál de los dos medios debe preferirse.

De los polígonos en general.

PROBLEMA V.

N.° 163. *Construir un polígono igual á otro dado.*

Varias construcciones pueden darse de este problema, pero nos reduciremos á indicar las principales.

PRIMERA CONSTRUCCION. Despues de *dividir* el polígono dado, ABCDEF (*fig.* 58), en triángulos, por medio de diagonales tiradas desde un mismo vértice, F por ejemplo, *tómese* en una recta indefinida, una parte A′F′ = AF; despues, sobre A′F′, *constrúyase* (n.° 157.) un triángulo A′B′F′ igual al triángulo ABF. Igualmente, sobre B′F′ = BF constrúyase un nuevo triángulo, B′C′F′, igual á BCF. Y asi sucesivamente. Fig. 58.

El nuevo polígono, A′B′C′D′E′F′, obtenido de este modo, será igual al polígono ABCDEF (n.° 91, *caso* 3.°).

SEGUNDA CONSTRUCCION. Desde un punto cualquiera, O (*fig.* 65), del polígono ABCDEFG, *tírense* rectas á todos sus vértices; despues, al rededor de otro punto O′, tomado arbitrariamente en el plano de construccion [no está en la lámina la figura del segundo polígono], *fórmense* ángulos consecutivos, A′O′B′, B′O′C′,..., G′O′A′, respectivamente iguales á los ángulos AOB, BOC,..., GOA; *tómense* en sus lados, las partes O′A′, O′B′, O′C′,..., O′G′, respectivamente iguales á las partes OA, OB, OC,..., OG; y *júntense* finalmente de dos en dos los puntos A′B′C′,..., G′. Fig. 65.

El polígono obtenido de este modo será igual al primero.

Porque es facil ver que los dos tienen iguales sus lados respectivamente, dispuestos del mismo modo, é iguales tambien los ángulos homólogos.

TERCERA CONSTRUCCION. Por los vértices A, B, C, D, E (*fig.* 106), del polígono dado, *trácense* (n.° 154.) una serie de rectas paralelas entre sí, pero de direccion enteramente arbitraria; *tómense* en ellas partes iguales AA′ = BB′ = CC′ = ...; y *júntense* de dos en dos los puntos A′, B′, C′,.... Fig. 106.

El polígono formado de esta manera es igual al polígono dado.

Porque los lados AB y A′B′, AC y A′C′,... son respectivamente iguales (n.° 74.); y lo mismo los ángulos (n.° 52.).

Escolio. Los dos últimos medios de construccion hacen conocer nuevos casos de igualdad relativos á los polígonos; entre ellos merece especial mencion el siguiente:

Dos polígonos son iguales, cuando sus lados son respectivamente iguales y paralelos, y estan dirigidos en el mismo sentido.

Fig. 106. Puede decirse en este caso, que el segundo polígono (*fig.* 106) no es mas que el primero *movido en su plano paralelamente á sí mismo.* — [*Véase el lema* del n.° 62.]

Fig. 58.

Problema VI. (*Fig.* 58.)

N.° 164. *Construir un polígono, conociendo uno de sus lados, AF, y las distancias de cada uno de sus estremos á todos los otros vértices del polígono.*

Síntesis. Con la recta AF y las dos distancias, que suponemos conocidas, del punto B á los puntos A y F, *construyamos* (n.° 157, *caso* 3.°) un triángulo ABF: — de este modo quedará determinado de posicion el punto B.

Del mismo modo se construirian los otros vértices, C, D,...

(*Véase* mas adelante en el n.° 167, la observacion final de este párrafo.)

Fig. 82.

Problema VII. (*Fig.* 82.)

N.° 165. *Estando inscrito á una circunferencia un polígono regular, ABCD,... construir otro polígono circunscrito del mismo número de lados; — y recíprocamente.*

Primera construccion. Por los vértices A, B, C,... del polígono inscrito, *tírense* tangentes á la circunferencia: y quedará determinado un polígono, que será el polígono pedido (n.° 134.).

Segunda construccion. Por los estremos I, K, L,... de los radios tirados perpendicularmente á los lados AB, BC,... del polígono inscrito, *tírense* tangentes que determinarán tambien el polígono pedido.

Advert. Hemos demostrado (n.° 135.) que los polígonos A′B′C′D′E′, A″B″C″D″E″, obtenidos por estos dos medios, son iguales.

Recíprocamente: — Para obtener el polígono inscrito, conociendo el circunscrito A′B′C′D′E′, *se juntarán de dos en* *dos* los puntos de contacto consecutivos, A, B, C,..., del polígono circunscrito.

Las cuerdas que resultan son iguales, porque lo son los arcos AIB, BKC,...; y los ángulos formados son tambien iguales, porque tienen una misma medida (n.º 122.)

O bien tambien, partiendo del polígono circunscrito A″B″C″D″E″, *júntense de dos en dos* los puntos consecutivos A, B, C,..., en que las rectas OA″, OB″, OC″,..., tiradas desde el centro á los vértices del polígono, encuentran á la circunferencia.

El polígono ABCDE es regular, porque siendo iguales los ángulos en el centro, lo son tambien los arcos que los miden, y por consiguiente las cuerdas que estos subtenden.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 107.) Fig. 107.

N.º 166. *Dados dos polígonos regulares*, uno *inscrito* y otro *circunscrito*, *de un mismo número de lados*, *inscribir y circunscribir los polígonos regulares de* DOBLE *ó* SUBDOBLE *número de lados.*

Sean AB y MN dos lados de los polígonos dados.

1.º Para obtener el polígono *inscrito* de *doble* número de lados, basta evidentemente *juntar* los puntos A y B con I, punto medio del arco AB, repitiendo la misma operacion respecto de cada uno de los arcos BC, CD,...

Las cuerdas AI, IB, BL,..., son iguales por corresponder á arcos iguales.—*Luego*, &c.

2.º Se obtiene el polígono *circunscrito* correspondiente, *tirando* por los puntos A y B dos tangentes, que terminen en los puntos *m*, *n* de la tangente MN; *repitiendo* la misma operacion en los demas puntos C, D,...

La recta *mn* es el lado del polígono circunscrito de duplo número de lados; y A*m*, *n*B, son semi-lados del mismo.

En efecto, los triángulos rectángulos OA*m*, OI*m*, son iguales por tener iguales las hipotenusas y uno de los catetos, OA = OI; de donde se infiere que A*m* = I*m*, y que *áng.* IO*m* = *áng.* AO*m*.

Del mismo modo se demostraria que B*n* = *n*I = I*m* = *m*A, y que *áng.* BO*n* = *áng.* IO*n* = *áng.* IO*m* = *áng.* AO*m*.

Asi se ve que el ángulo *m*O*n*, que es la mitad del ángulo en el centro de cada uno de los polígonos dados, es *el ángulo en el centro* del polígono buscado.

Luego finalmente, *mnp*... es el polígono pedido.

3.° Los polígonos inscrito y circunscrito de ***sub-doble*** número de lados, se obtienen *juntando* por los puntos alternados A, C, E,..., por medio de las cuerdas AC, CE,..., y *tirando* tangentes por los puntos A, C, E,..., sin hacer caso de los intermedios B, D, F,...

Advert. En este último caso, para que sea ***posible*** el problema es absolutamente necesario que tenga el polígono un *número* PAR de lados.

OBSERVACIONES IMPORTANTES *sobre la determinacion de un polígono en virtud de ciertos datos.*

N.° 167. Dijimos (n.° 90.) que [salvas algunas restricciones ya indicadas en la mayor parte] dos polígonos de n lados son iguales cuando tienen iguales respectivamente $(2n—3)$ de sus elementos.

De aqui resulta que por lo general queda *determinado* un polígono cuando se dan $(2n—3)$ de sus elementos, *ángulos*, *lados*, ó *diagonales.*

Se concibe tambien cuán considerable debe ser el número de los problemas que tienen por objeto—*Construir un polígono por medio de ciertos datos.*

Ademas, si nada dice el enunciado sobre la mutua disposicion de las partes, puede suceder que sea muy grande el número de soluciones de un mismo problema.

Sírvanos de ejemplo la cuestion siguiente:

Fig. 108. *Dados de posicion dos puntos*, A, B (*fig.* 108), *sobre una recta indefinida*, LL′, *hallar un tercer punto cuyas distancias á los dos primeros sean iguales á dos líneas dadas*, m, n.

Esta cuestion equivale á — *Construir un triángulo, conocidos los tres lados*, AB, m, y n.

Para esto (n.° 157.), haciendo centro en A y en B con radios respectivamente iguales á las líneas dadas m y n, *trácense* dos circunferencias que generalmente se cortarán en dos puntos C y C′; los cuales satisfarán á la vez al enunciado, porque, en virtud de la construccion, tenemos

$$CA=C'A=m, \quad \text{y} \quad CB=C'B=n.$$

Si ahora trocamos los radios, es decir, si hacemos centro en A con el radio n, y en B con el m, para trazar las respectivas circunferencias, se obtendrán otros dos puntos, D, D′, que tambien satisfarán á la cuestion, puesto que nada dice el enunciado, sobre si el punto buscado debe estar mas lejos del punto A que del punto B.

Es verdad que juntando los puntos C, C′, D, D′, con los A y B, resultan *cuatro* triángulos *iguales* y *superponibles*, por tener sus tres lados respectivamente iguales; de modo, que si se tratara de construir un triángulo por medio de sus tres lados, hablando con propiedad, no tendria mas que *una solucion*. Pero tratándose de determinar *la posicion de un punto* en un plano bajo ciertas condiciones, ofrece el problema *cuatro soluciones* distintas.

La cuestion que acabamos de resolver, hace comprender la necesidad de especificar en el problema del n.° 164, de qué modo deben estar colocados unos respecto de otros los vértices del polígono buscado; pues de lo contrario se podrian construir muchísimos con las demas condiciones indicadas.

Por esta razon, al enunciado del tercer caso de igualdad demostrado en el n.° 92, debemos añadir estas palabras: *dispuestos* ó *reunidos de la misma manera*.

N.° 168. Hay otras muchas observaciones que hacer sobre la construccion de los polígonos en general; pero como no debemos entrar en tantos pormenores, nos reduciremos á advertir que, cuando se conoce de antemano la especie del polígono que se manda construir, puede disminuirse considerablemente el número $(2n-3)$ de datos que se requieren ordinariamente.—Asi es como, por ejemplo (n.° 161.), bastan dos datos para un triángulo *isósceles* ó *rectángulo*.—En los cuadriláteros, que generalmente exigen $(2\times4-3)$ ó 5 datos, si la figura debiera ser un *paralelógramo*, bastaria con *tres* datos, porque la condicion del paralelismo de los lados opuestos vale por *dos*.—En el *rombo*, basta con *dos*; en el *cuadrado*, con *uno*, su lado ó su diagonal.

Finalmente, en un polígono *regular* bastan absolutamente el *lado* y otro dato cualquiera, como el *ángulo en el centro*, ó el *ángulo* mismo del *polígono*, ó el *número de lados*, ó la especie del polígono, porque para obtenerle, solo se necesita *construir* (n.° 161.) *un triángulo isósceles, conociendo un lado y el ángulo opuesto*, ó *un lado y uno de los ángulos adyacentes*, mitad del ángulo del polígono.

Fig. 109 y 110.

PROBLEMA. (*Fig.* 109 y 110.)

N.° 169. *Dados en un triángulo, un lado* AB, *el ángulo opuesto* [igual á el ángulo M], *y la suma* s *ó la diferencia* d *de los otros dos lados, construir el triángulo.*

PRIMER CASO. ANALÍSIS.—Observemos lo primero que el vértice C del triángulo debe pertenecer á el arco ACB descrito sobre AB, y capaz de contener al ángulo dado M. Por otro lado, si se prolonga AC de modo que CD=CB, y se tira la DB, el triángulo CDB es isósceles, y da (n.° 58.)

$$\textit{ángulo } \mathrm{CDB} = \textit{ángulo } \mathrm{CBD},$$

de donde (n.° 55.)

$$\textit{ángulo } \mathrm{CDB} = \tfrac{1}{2}\, \textit{ángulo } \mathrm{ACB} = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{M}.$$

Se ve pues que el punto D [cuya posicion, una vez determinada, hará conocer facilmente la del punto C sobre el arco ACB] es la interseccion de un arco de círculo, capaz del ángulo $\frac{1}{2}$ M y construido sobre AB, con una circunferencia de círculo descrita desde el punto A como centro con un radio igual á la suma dada *s*.

Asi pues, se conseguiria la resolucion del problema, *construyendo* separadamente sobre AB (n.° 156.) dos arcos de círculo capaces, uno del ángulo M, y otro del ángulo $\frac{1}{2}$ M, y *describiendo* despues desde el punto A como centro, con *s* por radio, otro arco de círculo que cortará al segundo en un punto D.—La recta AD encontraria al primer arco en un punto C; y el triángulo ACB sería el triángulo pedido.

Pero esta construccion no es la mas facil que puede emplearse.—En efecto, observemos que el punto I, en que la perpendicular levantada en la mitad de AB, encuentra al primer arco, es necesariamente el *centro* del segundo; porque si, desde dicho punto como centro, y con IA por radio, se describe una circunferencia, el ángulo que tenga su vértice en esta, será la mitad del ángulo en el centro AIB, y valdrá, por consiguiente, la mitad de M.—En esto se funda la construccion siguiente.

SÍNTESIS.—1.°—Sobre AB trácese un arco de círculo capaz del ángulo dado M: la perpendicular levantada en el punto medio G de AB [que ha debido servir en esta primera construccion] encuentra al arco en un punto I;—2.°—desde el punto I como centro, con el radio IA, *trácese* una circunferencia de círculo; — 3.° — desde el punto A como centro, con un radio igual á la recta dada *s*, *descríbase* un arco de círculo que corte á la circunferencia segunda en un punto D; — 4.° — *tírese* la recta DA, y *júntese* el punto B con el C en que DA encuentra al arco ACB:

El triángulo ACB, que resulta, es el triángulo pedido.

En efecto, en virtud de la construccion, el ángulo ACB es doble del ADB, ó CDB, y por consiguiente es igual á M. Ademas, siendo $ACB = CBD + CDB$ (n.° 55.), resulta $CBD = CDB$; de donde (n.° 60.) $CD = BC$.

Luego finalmente $\quad AC + CB = AC + CD = s.$

L. C. D. D.

Discusion. Para que el problema sea *posible*, es necesario que la suma dada *s no sea mayor que el diámetro* AH del círculo descrito desde el punto I como centro; — suponiendo que se tenga $s < AL$, habrá dos puntos de interseccion, D, D′, y por consiguiente, *dos triángulos*, ACB, AC′B, que satisfagan igualmente á la cuestion. Sería sin embargo facil probar que son los dos iguales, por tener los tres lados respectivamente iguales.

Si tenemos $s = AL$, las *dos soluciones* se reducen *á una sola*, á saber, al triángulo AIB.

Esto nos manifiesta que,

De todos los triángulos construidos sobre una misma recta AB, *con un mismo ángulo opuesto á ella como lado, es el triángulo isósceles* AIB *el que tiene mayor perímetro* (n.° 35.).

Segundo caso. Analísis. — En este caso, como en el precedente, el vértice C del triángulo (*fig.* 110), pertenece al arco descrito sobre AB, capaz de contener al ángulo dado M. — Tomando pues en CA una parte $CD = CB$, para obtener el punto C en este segmento, no hay mas que fijar la posicion del punto D. Para esto, siendo $CD = CB$, resulta (n.° 58.) $DBC = BDC$; Fig. 110.

de donde $\quad DBC + BDC = 2BDC,\quad$ y por consiguiente (n.° 55.)

$$2BDC + DCB = 2 \textit{ rectos};$$

luego $\quad BDC = 1 \textit{ recto} - \tfrac{1}{2}DCB = 1 \textit{ recto} - \tfrac{1}{2}M;$

lo cual da para ADB, suplemento de BDC,

$$ADB = 2 \textit{ rectos} - (1 \textit{ recto} - \tfrac{1}{2} M) = 1 \textit{ recto} + \tfrac{1}{2} M.$$

Se ve, segun esto, que el punto D es la interseccion de un segundo arco de círculo descrito sobre AB capaz del ángulo *obtuso* (1 *recto* $+ \frac{1}{2}$ M), con la circunferencia descrita desde el punto A como centro, con un radio igual á la *diferencia* dada *d*.

Pero ahora digo que, como en el primer caso, el centro de este segundo arco no es otra cosa que el punto I en que la perpendicular levantada en la mitad de AB, encuentra á la segunda parte de la circunferencia, cuya parte primera es el arco capaz del ángulo M.—En efecto, haciendo centro en I, con el radio IA, descríbase una circunferencia: el ángulo *en el centro* AIB es *doble* del ángulo *inscrito* ALB, lo cual da ALB $= \frac{1}{2}$ AIB. Por otro lado, el mismo ángulo AIB, considerado con relacion á la circunferencia AIBH, es suplemento de AHB (n.° 122.) ó del ángulo M; luego tenemos AIB $=$ (2 *rectos* $-$ M); y por consiguiente, el ángulo ALB vale (1 *recto* $- \frac{1}{2}$ M), y su suplemento ADB valdrá

$$2 \textit{ rectos} - (1 \textit{ recto} - \tfrac{1}{2} M), \quad ó \quad 1 \textit{ recto} + \tfrac{1}{2} M.$$

L. C. D. D.

De aqui resulta la construccion siguiente:

Síntesis.—1.°—Sobre la recta AB *descríbase* un arco de círculo capaz del ángulo M, *trazando* entera la circunferencia: la perpendicular levantada en la mitad de AB encuentra á la parte AIB de esa circunferencia en un punto I;—2.°—desde este punto como centro, con un radio igual á IA, *descríbase* otra circunferencia (considerando solo el segmento situado al mismo lado que el de la primera, respecto de AB);—3.°—haciendo centro en A, con un radio igual á *d*, *descríbase* un arco de círculo que corte al precedente en el punto D;—4.°—*tírese* la cuerda AD prolongándola hasta encontrar al primer arco en C.

El triángulo ACB que de este modo se obtiene, es el triángulo pedido; lo cual se demostraria facilmente reproduciendo en orden inverso los raciocinios del *analísis*.

Escolio. No entraremos en pormenores sobre la discusion de este caso; pero haremos observar que las dos partes del problema que acabamos de resolver, dan ejemplo de una cuestion en que, el primer analísis, conduce á una construccion que no es la mas sencilla, y que despues se consigue simplificar por consideraciones delicadas que, á primera vista, habian pasado desapercibidas.

§. III. *Problemas sobre los contactos.*

PROBLEMA I. (*Fig.* 111 y 112.) Fig. 111 y 112.

N.° 170. ***Por un punto* A *dado fuera de un círculo, tirar á este una tangente.***

[El caso de estar en la circunferencia el punto dado no ofrece dificultad alguna, pues basta (n.° 102.) levantar una perpendicular en el estremo del radio.]

ANALÍSIS. El punto de contacto [y por lo tanto la tangente] quedaria determinado si se pudiera hallar en la circunferencia un punto M (*fig.* 111), tal que juntándole con los puntos O y A, resultara en M un ángulo *recto*. Fig. 111.

SÍNTESIS.—1.° — *Tírese* la recta OA; — 2.° — sobre ella, como diámetro (n.° 153, 1.°), *descríbase* una circunferencia que encontrará á la primera en dos puntos, M y M′; — 3.° — *tiremos* las rectas AM, AM′.

Asi obtenemos *dos soluciones* de la cuestion.

Porque los ángulos OMA, OM′A, son rectos (n.° 123.); y por consiguiente, AM, AM′, son tangentes al círculo (n.° 102.).

DISCUSION. El problema es evidentemente *posible* en todos casos mientras el punto dado es esterior al círculo O, porque, con arreglo á la construccion, los puntos O y A de la segunda circunferencia deben ser uno *interior* y otro *esterior* á la primera (n.° 136.).

Si el punto dado fuera el A′ situado en la primera circunferencia, los dos círculos se tocarian en el punto A′, que entonces sería el punto de contacto.

SEGUNDA CONSTRUCCION. ANALÍSIS. — Suponiendo resuelto el problema, prolónguese el radio OM (*fig.* 112) que pasa por el punto de contacto, hasta tener MC = MO, y tírense las rectas OA, y CA: estas rectas serán iguales (n.° 40.), y el punto C [que, determinado, dará á conocer el M] se halla segun esto situado á una distancia de O igual al duplo del radio OM, y á una distancia de A igual á OA. Fig. 112.

SÍNTESIS.—1.° — *Tírese* la recta OA [prolongándola hasta encontrar en B á la circunferencia dada]; — 2.° — desde los puntos O y A como centros, y con los radios respectivamente iguales á 2OB y AO, *descríbanse* dos circunferencias que se corten en dos puntos C, C′; — 3.° — *tírense* las OC, OC′, que encontrarán á la circunferencia dada en los puntos M, M′;— 4.° — en fin, *trácense* las rectas AM y AM′:

Las cuales serán las dos tangentes pedidas.

En efecto, los dos triángulos AOC, AOC′ son isósceles; y ademas, se tiene CM = MO, y C′M′ = M′O; luego (n.° 61.) las dos rectas AM, AM′, son perpendiculares á los radios OM, OM′, y por consiguiente tangentes al círculo.

Discusion. Mientras el punto dado A sea esterior al círculo dado, las dos circunferencias *descritas* se cortarán necesariamente: en efecto, el punto O de la circunferencia AO es evidentemente *interior* á la *circunferencia* trazada con el radio 2OB; y es facil ver que para cualquier posicion del punto A sobre OA, mientras sea OA > OA′, la *circunferencia* descrita con el radio OA tendrá un segundo punto D, situado en la prolongacion de OA, *esteriormente* á la circunferencia 2OB. Asi pues (n.° 136.), los dos círculos se cortarán, y el problema será *siempre posible*.

Si el punto A está en A′ sobre el círculo, las dos circunferencias se tocarán en un punto E en el cual se tendrá EA′ = A′O; y el punto A′ es entonces el punto de contacto.

Advert. En la práctica es la segunda construccion mas facil que la primera, porque los radios de las dos circunferencias que se tienen que describir, 2OB y OA, son dados *à priori*; mientras en la otra se necesita determinar de antemano el *punto medio* (n.° 150.) de la distancia AO.

Fig. 113. Problema II. (*Fig.* 113.)

N.° 171. *Tirar una tangente comun á dos círculos dados.*

Analísis. Sea MNC la tangente comun á las dos circunferencias dadas; tírense los radios OM, O′N, y por el punto O′ tírese la O′D paralela á MC. — Esto supuesto, observemos que siendo los radios OM, O′N, perpendiculares á la tangente MC, son paralelos entre sí; y como O′D es tambien paralela á MC, resulta que la figura DMNO′ es un paralelógramo, y da (n.° 74.) DM = O′N; asi pues, OD es igual á *la diferencia de los radios* de los dos círculos. Ademas, la misma figura DMNO′ es un rectángulo, puesto que son rectos los ángulos en M y en N; luego la recta MN es perpendicular á la OD, y por consiguiente tangente al círculo descrito desde el punto O como centro con un radio igual á la diferencia de los radios dados.

De esto resulta la siguiente construccion:

Síntesis.—1.° —Desde el punto O como centro, con un radio igual á la diferencia de los radios de los círculos dados, *descríbase* una circunferencia;—2.° —*tírese* desde el puntó O′ (n.° 170.) una tangente á dicha circunferencia;—3.°—*júntese* el centro O con el punto de contacto D, y *prolónguese* la recta OD hasta M;—4.° —*tírese* desde el punto O′ el radió O′N paralelo á OM (n.° 154.);—5.°—*tírese*, finalmente, la recta MN:

Y tendremos en ella la tangente pedida.

En efecto, en virtúd de la construccion, DM es igual y paralela á O′N, puesto que OD es la diferencia de los radios; luego la figura DMNO′ es un paralelógramo (n.° 74.), y ademas un rectángulo, á causa de ser OD perpendicular á O′D; por consiguiente la recta MN es perpendicular á los radios OM, O′N; &c.

Advert. Como, desde el punto O′, se pueden tirar dos tangentes O′D, O′D′, á la circunferencia OD, se tienen tambien *dos* rectas MN, M′N′, que dan solucion al problema.

Escolio. Es facil ver que en caso de ser los círculos esteriores el uno al otro, como en la *figura* 113, existen todavía *otras dos* soluciones *mn*, *m′n′*, que pueden llamarse *tangentes interiores*, porque encuentran la línea de los centros entre los puntos O y O′ en un punto C′; mientras las otras dos MN, M′N′, llamadas *tangentes esteriores*, la encuentran en un punto C situado en su prolongacion. Fig. 113.

Para obtener esas otras dos soluciones [sobreentendiéndose el analísis], se debe—1.°—*describir* una circunferencia, haciendo centro en O, con un radio igual á la suma de los radios de los círculos dados;—2.°—desde el punto O′ *tírense* dos tangentes O′*d*, O′*d′*;—3.°—*tírense* los radios O*d*, O*d′*;—4.°—*tírense* desde el punto O′ los radios O′*n*, O′*n′*, paralelos á O*d*, O*d′*, ó á los radios O*m*, O*m′*;—5.°—finalmente *trácense* las rectas *mn*, *m′n′*:

Y tendremos las dos tangentes pedidas.

La demostracion es igual á la anterior.

Nos dispensamos de discutir este problema, que es evidentemente susceptible de *cuatro*, *tres*, *dos*, ó solo *una* solucion, ó bien de [illegible]ener *ninguna*, segun la posicion de las *cinco* relativas de dos circunferencias, que tengan los círculos propuestos.

Fig. 114. **Problema III.** (*Fig.* 114).

N.° 172. ***Trazados en un plano dos círculos* O, O′, *tirar una transversal* MC, *tal, que cada una de las partes* MN, mn, *de ella, comprendidas en lo interior de dichas circunferencias, sea igual á una línea dada* a.**

Analísis. Supongamos resuelto el problema; y sea MN*mn*C la recta pedida. Trácense á voluntad, en los círculos dados, otras dos cuerdas DE, *de*, iguales entre sí y á la recta dada *a*; despues desde los centros O, O′, bájense las perpendiculares respectivas OG, OI, y O′*g*, O′*i*, á MN, DE, y *mn*, *de*.

Esto supuesto, puesto que DE = MN = *de* = *mn*, se tiene (n.° 109.) OG = OI, O′*g* = O′*i*; ademas, las dos circunferencias descritas desde los puntos O, O′, como centros, con los radios respectivos OG, O*g*, serán (n.° 102.) tangentes en G, I, y *g*, *i*, á las citadas cuerdas iguales.

De donde resulta evidentemente la siguiente construccion:

Síntesis. Despues de haber *tomado* con el compas, en las dos circunferencias, las cuerdas DE, *de*, iguales á *a*, y *bajado* (n.° 149.) las perpendiculares OG, O′*g*, *trácense* desde los puntos O, O′, como centros, y con los radios respectivos OG, O′*g*, otras dos circunferencias; *tíreseles* una tangente comun M*n*C (n.° 170.):

—Y asi obtenemos la recta pedida.

En efecto, en virtud de la construccion, las dos partes MN, *mn*, de esta tangente, comprendidas en los círculos dados, estan á la misma distancia de sus centros respectivos O, O′, que las cuerdas DE, *de*; luego se tiene

MN = DE = *a*, y *mn* = *de* = *a*.

Advert. Este problema puede tener, como el precedente, *cuatro*, *tres*, &c., soluciones, segun la posicion relativa de las circunferencias; y, para que sea *posible*, es evidentemente necesario que *la recta dada no sea mayor* que el diámetro del menor de los círculos. Pero no basta con esa condicion, como podria verse con una discusion mas circunstanciada.

Escolio. Al problema 1.° y á este se enlaza como caso particular el siguiente:

Por un punto dado en el plano de un círculo, tirar una *recta que le corte de tal modo que la parte de ella, interceptada por el círculo, sea igual á una línea dada.*

Despues de haber *trazado* en el círculo una cuerda igual á la línea dada, *descríbase*, como en el caso anterior, una circunferencia que le sea tangente; despues, desde el punto dado, *tírese* una tangente á este nuevo círculo; y tendremos la recta pedida.

Este problema ofrece una discusion de bastante interes que sin embargo tenemos que suprimir aqui, reduciéndonos á observar que, en el caso de ser interior el punto dado, para ser *posible* la cuestion, debe hallarse la recta comprendida entre dos límites, — 1.° — el diámetro del círculo; — 2.° — la cuerda perpendicular á la recta tirada desde el centro al punto dado. (*Véase* el n.° 112.)

Problema IV. (*Fig.* 60.)

Fig. 60.

N.° 173. *Describir un círculo tangente á tres rectas dadas de posicion en un plano.*

La resolucion de este problema es una consecuencia inmediata de los teoremas establecidos en los n.os 95 y 127:

Constrúyanse (n.° 153, *escolio* 1.°) las bisectrices de los dos ángulos CAB, CBA; despues desde el punto O, en que estas rectas se cortan necesariamente (n.° 34.), *bájese* una perpendicular á AB; y desde el mismo punto como centro, con un radio igual á la perpendicular, *descríbase* un círculo: su circunferencia será tangente á los tres lados del triángulo ABC, puesto que (n.° 127.) son iguales entre sí las perpendiculares tiradas á ellos desde el punto O.

Pueden ademas obtenerse otras soluciones de este mismo problema, trazando, por ejemplo, las bisectrices de los ángulos BCL, CBI, respectivamente suplementos de los ángulos C y B del triángulo.

De este modo se hallarian, en general, *cuatro* soluciones, á saber: un círculo *interior* al triángulo determinado por las tres rectas, que se llama, por esta razon, *círculo inscrito*; y despues otros *tres* círculos *esteriores* á dicho triángulo, que se llaman círculos *ex-inscritos*.

Cuando dos de las tres rectas dadas son paralelas, no pueden existir mas que *dos* soluciones.

En el caso general, los centros de los cuatro círculos y los vértices del triángulo forman *seis* sistemas de *tres puntos* situados *en una misma línea recta*; y las *seis* líneas rectas que determinan son *perpendiculares de dos en dos.*

Basta para comprobarlo, ejecutar por completo la construccion.

Fig. 115. **Problema V.** (*Fig.* 115.)

N.° 174. *Trazar una circunferencia que toque á una recta dada en un punto dado* B, *y que pase por otro punto dado* fuera de la recta.

Es evidente que el centro del círculo buscado debe hallarse en el encuentro de la perpendicular levantada sobre LM por el punto B, con la perpendicular tirada á AB por su punto medio C.

Síntesis. *Constrúyanse* esas dos perpendiculares (n.os 149, 150.); y desde el punto O en que se cortan, con el radio OA ú OB, *descríbase* una circunferencia; que será la pedida.

Este problema es siempre *posible*, y solo admite *una solucion.*

Si los puntos A y B se dieran sobre una misma recta perpendicular á LM, el centro se hallaria á la mitad de la distancia AB.

Fig. 116. **Problema VI.** (*Fig.* 116.)

N.° 175. *Describir un círculo que toque á una recta dada* LM *y á una circunferencia dada* O, *conociendo el punto* I *de contacto con la recta.*

Por el analísis se conoceria facilmente que este problema puede referirse al anterior.

Síntesis. Suponiendo primero que el círculo buscado deba ser esterior al círculo O,

1.° — *levántese* en el punto I una perpendicular indefinida IK; — 2.° — *tómese* en IK, y por el lado de la recta LM opuesto al punto O, una parte II′ igual al radio OB del círculo dado; — 3.° — *tírese* por el punto I′ la recta L′M′ paralela á LM; — 4.° — *determínese* (n.° 174.) el centro O′ de un círculo que pase por el punto O y que sea tangente á L′M′ en el punto I′; — 5.° — finalmente, desde este punto O′ como centro, y con un radio igual á O′I, *descríbase* un círculo.

Este círculo será á un mismo tiempo tangente á la recta LM y al círculo O.

Desde luego, es tangente á LM, porque el radio O′I es perpendicular á esta recta; — ademas, siendo la *distancia de los centros* O′O, igual á O′I′ por construccion, se compone del radio O′I mas el radio OB, es decir, que es *igual á la suma de los radios*; luego los dos círculos se tocan en un punto C.

Advert. La discusion de este problema presenta algun interes bajo el aspecto del *número de soluciones* de que es susceptible, segun las posiciones relativas del círculo, de la recta y el punto dados. — Segun los casos, asi se puede obtener un círculo *tangente esteriormente* al círculo dado, ó que le *envuelva*, ó que le sea *interior*.

PROBLEMA VII. (*Fig.* 117.) Fig. 117.

N.º 176. *Describir un círculo que toque á una recta dada* AB *y á una circunferencia dada* O, *conociendo el punto* C *de contacto con la circunferencia.*

Tírese al punto C la tangente LM; y *prolónguese* el radio OC hasta encontrar en O′ con la bisectriz MK del ángulo LMB:

El punto O′ podrá tomarse por centro de un círculo tangente á la recta AB en un punto determinado, y á la recta LM en el punto C, y por consiguiente tambien al círculo dado.

Advert. Este problema es *susceptible de dos* soluciones, de las cuales la segunda se obtiene tirando la *bisectriz* MK′ del ángulo suplementario LMA.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 118.) Fig. 118.

N.º 177. *Describir un círculo que toque en un punto dado* A *á una circunferencia dada* OA, *y que pase por otro punto tambien dado* B [esterior ó interior á dicha circunferencia].

ANALÍSIS y SÍNTESIS reunidas. *Júntese* el punto O con el punto A: el centro del círculo buscado debe hallarse en la recta indefinida OAL. — Despues, en el punto medio de AB ó AB′, *levántese* la perpendicular IK ó I′K′: las dos rectas OL é IK, ú OL é I′K′, se encuentran necesariamente (n.º 50.) en un punto O′ ú O″. — En fin, haciendo centro en ese punto y con el radio O′A ú O″A, *descríbase* una circunferencia, y esta tocará al círculo dado *interior* ó *esteriormente*, segun sea el punto dado *interno* ó *esterno* á la circunferencia O, y á la vez pasará, ó por el punto A, ó por el punto A′.

Advert. Este problema es *siempre posible.* — Sin embargo, si el punto dado B ó B′, y el punto A, se hallaran situados en una misma línea perpendicular á OL, el círculo buscado se reduciria á la tangente AB.

Fig. 119.

PROBLEMA IX. (*Fig.* 119.)

N.° 178. *Describir un círculo de un radio dado que toque á una recta dada* AB *y á una circunferencia tambien dada* O.

Es facil conocer que el centro O′ del círculo buscado debe hallarse en una recta, A′B′, paralela á la AB, distante de esta una magnitud igual al radio dado, y en una circunferencia concéntrica al círculo dado, descrita con un radio R′ igual á la suma ó á la diferencia de los dos radios que se dan, segun se verifique la tangencia. — Una vez determinado el centro, podrá describirse inmediatamente el círculo, pues se conoce su radio R′.

Habrá en general *cuatro* soluciones, cuando la recta sea *esterior* ó *tangente* al círculo dado. — Podrán llegar á *ocho*, cuando la recta corte á la circunferencia; y podrá suceder que este número disminuya en algunas circunstancias, pudiendo llegar á reducirse á *cero*.

Fig. 120.

PROBLEMA X. (*Fig.* 120.)

N.° 179. *Describir un círculo de un radio dado que toque á dos circunferencias dadas* O *y* O′.

Reduciéndonos á la construccion del círculo que debe ser *esterior* á los dos círculos dados, necesitamos, para obtenerle, *describir* desde los puntos O, O′, como centros, con radios respectivamente iguales á (R+R″), (R′+R″), [designando R, R′, R″, los radios de los círculos dados y del círculo buscado], dos circunferencias que se cortarán generalmente en dos puntos O″, O‴, que serán los centros de dos círculos, los cuales descritos con el radio R″, satisfarán igualmente á la cuestion.

ESCOLIO GENERAL *sobre los contactos.*

N.º 180. Hemos creido que debiamos abreviar en estos últimos problemas el análisis, la síntesis y la discusion, porque todas estas partes, y en particular la *discusion*, exigian mucho detenimiento; pues deberian tenerse en cuenta no solo la posicion relativa de las líneas dadas, sino tambien *las diversas soluciones* de que es susceptible la cuestion propuesta, y las circunstancias en que cada una de ellas puede verificarse.

Nos limitaremos á observar que, cuando dos círculos estan dados de posicion en un plano, puede haber diversas clases de círculos que les sean tangentes, á saber: círculos *esteriores á entrambos*, círculos *esteriores al uno* y *comprensores del otro*, círculos *interiores á entrambos*, &c. — De donde se deduce que, en las diferentes *construcciones* que pueden emplearse, siempre debe tenerse presente la condicion de contacto de dos circunferencias, á saber: que *la distancia de los centros es igual á la suma ó á la diferencia de los radios*, segun debe ser *esterior* ó *interior* al contacto.

Podemos añadir que si un gran número de problemas sobre los contactos pueden resolverse por medio de los principios establecidos hasta aqui, hay otros muchos que suponen el conocimiento de ciertas *relaciones numéricas* entre los datos y las incógnitas. Pero estas relaciones no pueden esplicarse y demostrarse sino en el *segundo libro*, ó en el *apéndice* á los dos libros primeros.

LIBRO SEGUNDO.

DE LA ESTENSION CONSIDERADA EN UN PLANO.

Introduccion.—Segun ya hemos dicho (n.º 23.), este libro se dividirá como el primero en *tres* capítulos: el primero tratará de las *líneas proporcionales*, de la *semejanza* de la determinacion de las *areas* y de su *comparacion* en las figuras *rectilíneas*; el segundo, tratará de las *líneas proporcionales* considerados en el círculo, de la determinacion de las *areas circulares*, y de la *relacion de la circunferencia al diámetro*; el tercero, en fin, quedará consagrado á la resolucion de *problemas*.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA ESTENSION EN LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

§. I. *De las líneas proporcionales.*

Fig. 121. **Teorema I.** (*Fig.* 121.)

N.º 181. *Trazadas en un plano dos rectas indefinidas*, LM, L′M′, *si en la primera* LM *se toman distancias consecutivas iguales*, AB, BC, CD,..., *y por los puntos de division* A, B, C, D,..., *se tiran paralelas en una direccion arbitraria*, *estas paralelas determinarán en la otra recta* L′M′, *unas partes* A′B′, B′C′, C′D′,..., *iguales tambien entre sí.*

Esta proposicion comprende como caso particular el teorema, ó mas bien, la recíproca del teorema del n.º 81; y se demuestra de un modo enteramente análogo.

Por los puntos A, B, C, D,..., tírense las rectas Aa, Bb, Cc,... paralelas a L'M', y terminadas respectivamente en las rectas BB', CC', DD',...; así se obtiene una serie de triángulos ABa, BCb, CDc,...; todos iguales entre sí, por tener un lado igual $AC=BC=CD=$..., adyacente á ángulos respectivamente iguales; de donde se deduce $Aa=Bb=Cc=Dd=$..., y por consiguiente $A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=$... (n.º 72.)

TEOREMA 11. (*Fig.* 122.) Fig. 122.

N.º 182. *En todo trapecio* ABCD, *una recta cualquiera* EF, *tirada paralelamente á las bases, divide á los otros dos lados en partes directamente proporcionales*; — es decir, en partes que dan

$$AE : EB :: CF : FD.$$

Supongamos primero que los segmentos AE, EB, son *conmensurables* entre sí, y que dan, por ejemplo,

$$AE : EB :: 7 : 11;$$

digo que los otros dos segmentos guardan la misma razon.

Para probarlo, concibamos la recta entera AB dividida en (7+11) ó 18 partes iguales, y tiremos por los puntos de division líneas paralelas á BD: la recta CD resultará con esto dividida tambien en 18 partes iguales (n.º 181.), 7 de las cuales pertenecerán á CF, y las otras 11 á FD. Luego tambien se tiene

$$CF : FD :: 7 : 11.$$

Sean ahora AE, EB, *inconmensurables* entre sí; y designemos (n.º 118.) por $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$,..., los valores aproximados sucesivos de la razon entre AE y EB. Vamos á probar que esos mismos números representan, con el mismo grado de aproximacion, los sucesivos valores aproximados de la razon entre CF y FD; con lo cual quedará demostrada la proposicion general.

Divídase el segmento BE en n partes iguales, y pongamos una de esas partes m veces sobre el segmento EA; despues, por todos los puntos de division, tírense rectas paralelas á BD. —

Como, por hipótesis, la razon entre AE y EB, está comprendida entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, resulta que el segmento EA, además de las m partes iguales tomadas en él, contiene un resíduo menor que una parte.—Del mismo modo, considerando la recta CD, se tienen, en DF, n partes iguales (n.º 181.), y en FC, m partes de las mismas, con un *resíduo* que debe necesariamente valer menos de una parte; de donde se infiere que la razon entre CF y FD se halla comprendida entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$; lo cual prueba que $\frac{m}{n}$ representa las razones entre AE y EB, entre CF y FD, con el mismo grado de aproximacion.

Análogo razonamiento se haría respecto de los otros números $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ...—Luego, &c.

Fig. 123.

TEOREMA III. (*Fig.* 123.)

N.º 183. *En un triángulo cualquiera, ABC, toda recta DE, tirada paralelamente á uno de los lados BC, dividirá los otros dos en partes directamente proporcionales*;—[es decir, en partes que dan

$$AD : DB :: AE : EC].$$

Tírese por el punto A una paralela á BC, por un punto cualquiera de la paralela, tírese la GK, paralela á AB, y prolónguese la DE hasta F.—En virtud del teorema precedente, tenemos

$$AD : DB :: GF : FK;$$

pero á causa de las paralelas AC, GK, sabemos que GF = AE, FK = EC; luego tendremos

$$AD : DB :: AE : EC.$$

RECÍPROCAMENTE:—*Si una recta divide á dos de los lados de un triángulo en partes directamente proporcionales, es paralela al tercer lado.*

Porque si asi no fuera, por el punto D podriamos tirar otra recta DI, paralela á BC; lo cual, en virtud de la proposicion directa, daria

$$AD : DB :: AI : IC;$$

pero por el supuesto

$$AD : DB :: AE : EC;$$

luego, á causa de la razon comun, tendremos

$$AI : IC :: AE : EC, \quad ó \quad AI : AE :: IC : EC,$$

resultado absurdo, por ser

$$AI < AE, \quad y \quad IC > EC.$$

N.º 184. Escolio I.—Aunque este teorema es un corolario casi inmediato del teorema II, hemos creido oportuno presentarle como proposicion principal, en atencion á su propia importancia, y á las numerosas consecuencias suyas que desde ahora vamos á ver, y que serán de contínuo uso en adelante.

Corolario. De la proporcion

$$AD : DB :: AE : EC,$$

se deduce, en virtud de una propiedad de las proporciones,

$$AD + DB : AD : DB :: AE + EC : AE : EC,$$

lo cual da las dos nuevas proporciones

$$AB : AD :: AC : AE, \quad y \quad AB : DB :: AC : EC.$$

Recíprocamente, si una recta DE está situada de tal modo que dé

$$AB : AD :: AC : AE,$$

como de aqui se deduce

$$AB - AD : AD :: AC - AE : AE,$$

ó bien

$$BD : AD :: EC : AE, \quad ó \quad AD : BD :: AE : EC,$$

resulta que la recta DE es paralela á BC (n.º 183, *recip.*).

N.º 185. Escolio II.—Cuando se aplica á la proporcion

$$AD : DB :: AE : EC,$$

la propiedad fundamental de las proporciones, se obtiene la igualdad

$$AD \times EC = DB \times AE.$$

Para comprender lo que significan estas palabras: *el producto de dos líneas*, $AD \times EC$, ó $DB \times AE$, es necesario suponer que las rectas AD, EC, DB, AE, se han referido á una misma *unidad lineal*; y en lugar de líneas, solo tienen ya que considerarse entonces los *números abstratos* que espresan la razon entre cada línea y la unidad elegida, cuyos números pueden perfectamente multiplicarse entre sí. Aquí pues, como en Aritmética, la palabra *producto* supone una multiplicacion de dos ó mas números.

En adelante se presentarán casos de tener que multiplicar *una superficie por una línea, una superficie por otra superficie*, y hasta *un volumen por otro*, &c. Pero en todas estas ocasiones debe tenerse entendido que se *multiplican* entre sí las *razones* de estas magnitudes ó cantidades geométricas á su *unidad* respectiva.

En virtud de esto, si se tiene que *multiplicar una recta* AB *por sí misma*, se escribirá $AB \times AB$, ó, para abreviar, AB^2; cuya espresion representará el *cuadrado* ó mas bien la *segunda potencia* del número abstracto que representa la razon entre la recta y su unidad.

Igualmente, $2AB^2$. $3AB^2$,..., representan *el duplo, el triplo*,... de la segunda potencia de AB.

Asi tambien, $\sqrt{AB \times CD}$, $\sqrt{AB^2 + CD^2}$,..., serán las *raices cuadradas* de los números abstractos espresados por $AB \times CD$, $AB^2 + CD^2$,..., y asi sucesivamente.

Los principiantes deben familiarizarse con estas notaciones, que son de contínuo uso en el segundo libro.

§. II. *Caractéres y propiedades de las figuras semejantes.*

N.° 186. Nociones preliminares.—Nadie hay que no tenga idea de la *semejanza*, y por consiguiente al decir *figuras semejantes*, todos entienden que se trata de figuras unas de las cuales son *en pequeño* lo que las otras *en grande*; de modo que no hay un punto en una de ellas que no tenga su *correspondiente* en la otra, ó, como se dice en Geometría, su *homólogo*; de modo que si se imaginan tiradas de todos los modos posibles, rectas que junten de dos en dos todos los puntos de la primer figura, y despues se ejecuta la misma operacion en la segunda, las razones numéricas de cada par de líneas homólogas son todas iguales entre sí.—Esa razon comun se llama la *razon de semejanza* de las dos figuras.

En la teoría que vamos á esponer se verá que todas estas condiciones, en número infinito al parecer, vienen á reducirse luego á un corto número de condiciones realmente distintas.—Se concibe, en efecto, que refiriéndose siempre la determinacion completa de una figura de *una especie dada* [segun se ha visto en el segundo párrafo del capítulo precedente] á la determinacion de ciertas *líneas principales* de que dependen todas las otras, debe resultar que el número de razones cuya igualdad deba fijarse, no debe ser otro mas que el número mismo de esas líneas principales.

En virtud de esta consideracion, y vista la imposibilidad de reconocer directamente si son proporcionales todas las líneas correspondientes ú homólogas que pueden imaginarse en dos figuras, se adopta por lo pronto una *definicion geométrica* reducida y puramente *convencional*, fundada solo en los elementos necesarios para la determinacion de cada figura, y que se aplica primero á los *triángulos* y despues á todos los polígonos, reservando para despues el demostrar que las figuras que satisfacen á esa definicion son semejantes en el sentido mas general arriba dicho.

N.° 187. Esto supuesto, determinado un triángulo por sus tres lados (n.° 160.), diremos que

Dos triángulos, ABC, A'B'C' (*fig.* 124), *son semejantes cuando tienen los lados proporcionales*;—es decir, cuando dan Fig. 124.

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'.$$

Ademas, siendo todos los polígonos descomponibles en triángulos, y hallándose determinado un polígono cuando se conoce el conjunto de triángulos que le forman ó componen, resulta que

Dos polígonos son semejantes cuando pueden descomponerse [de cualquier modo (n.° 83.)] *en un mismo número de triángulos semejantes respectivamente, y unidos de la misma manera*;—estas últimas palabras deben tomarse aqui en el mismo sentido que en el n.° 92.

Tal es pues la definicion geométrica de los polígonos semejantes, reducida á solo las condiciones estrictamente necesarias; y de ella se infiere que la teoría de la semejanza de las figuras planas se refiere completamente en todos sus casos á la de los triángulos semejantes.

N.° 188. Arriba (n.° 186.) hemos definido los *puntos homólogos,* contentándonos con decir que eran los puntos *correspondientes* en ambas figuras; definicion bastante clara. Sin embargo, para hacer mas preciso y rigoroso nuestro lenguage, debemos dar una definicion geométrica de la palabra *homólogo,* aplicada á los *puntos,* á las *líneas* ó á los *ángulos.*

En los triángulos, *lados homólogos* son aquellos cuya razon es la *razon de semejanza* de los triángulos mismos.—Asi, en
Fig. 124. los triángulos semejantes ABC, A'B'C' (*fig.* 124), como por hipótesis tenemos

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C',$$

los lados AB y A'B' son lados *homólogos*, lo mismo que los AC, A'C', y los BC, B'C'.

En los polígonos,

1.° Los **lados homólogos** son los lados *homólogos* de los diferentes triángulos semejantes que componen los polígonos, segun la definicion (n.° 187.);

2.° **Vértices homólogos** son los vértices comunes á cada dos lados *homólogos*;

3.° **Ángulos homólogos** son los formados por lados *homólogos*;

4.° **Diagonales homólogas** son las que juntan vértices *homólogos*;

5.° En general, se llaman *puntos homólogos* los colocados de igual manera en los planos de los dos polígonos, es decir, los puntos enlazados á lados *homólogos* por medio de triángulos semejantes [y semejantemente dispuestos];

6.° En fin, **líneas homólogas** son las que juntan de dos en dos puntos *homólogos* cualesquiera.

N.° 189. De los principios arriba establecidos es facil deducir, que la igualdad de los polígonos es sólo un caso particular de su semejanza; lo cual quedará probado generalmente con solo poder demostrarse respecto de los triángulos. Volva-
Fig. 124. mos pues á la relacion sentada arriba (n.° 187, *fig.* 124),

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C',$$

si aquí hacemos $AB = A'B'$, resulta necesariamente $AC = A'C'$, $BC = B'C'$; y entonces los triángulos son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales.

Así pues — *Dos triángulos* — y por consiguiente — *dos polígonos semejantes son iguales cuando tienen igual un lado homólogo.*

Puede tambien verse fácilmente que

Dos triángulos, ABC, A'B'C', *semejantes á un tercero* A''B''C'', *son semejantes entre sí.*

Porque de las dos relaciones supuestas

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{BC}{B''C''},$$

y

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{A'C'}{A''C''} = \frac{B'C'}{B''C''},$$

se deduce dividiéndolas miembro á miembro,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'};$$

luego los dos triángulos ABC, A'B'C', son semejantes.

Luego tambien, en virtud de la definicion (n.º 187.),

Dos polígonos semejantes á un tercero son semejantes entre sí.

N.º 190. Finalmente, para facilitar el estudio de las propiedades de las figuras semejantes, supondremos que los dos polígonos se hallan colocados en su plano, de tal modo que cada dos *lados homólogos* son *paralelos y están situados en el mismo sentido*; lo cual siempre es permitido con arreglo al lema del n.º 62. Por este medio, los puntos, las líneas, los ángulos *homólogos* se hallarán naturalmente dispuestos del mismo modo en ambos polígonos.

Empecemos por los triángulos.

Propiedades de los triángulos semejantes.

LEMA. (*Fig. 125.*) Fig. 125.

N.º 191. *Toda recta DE, tirada paralelamente á uno de* *los lados de un triángulo* ABC, *determina otro triángulo* ADE *semejante al primitivo*;

[es decir, que se tiene

$$AB : AD :: AC : AE :: BC : BE].$$

En efecto, puesto que DE es paralela á BC, se tiene desde luego (n.º 184., *escol.* 1.º),

$$AB : AD :: AC : AE.$$

Tracemos despues la EF paralela á AB; y tendremos (número 184., *escol.* 1.º)

$$AC : AE :: BC : BF \text{ ó } DE;$$

luego, formando una serie de razones iguales, resultará

$$AB : AD :: AC : AE :: BC : DE.$$

Fig. 124.

Teorema I. (*Fig.* 124.)

N.º 192. *Dos triángulos semejantes* ABC, A′B′C′ [es decir, dos triángulos que tienen los lados proporcionales], *tienen los ángulos homólogos respectivamente iguales.*

Tómese en AB una parte AB″ = A′B′, y tírese la B″C″ paralela á BC; los dos triángulos A′B′C′, AB″C″, son semejantes al ABC, uno por hipótesis, y otro en virtud del lema precedente; por consiguiente, son semejantes entre sí (n.º 189), y ademas son iguales entre sí (n.º 189), á causa de tener AB″ = A′B′ por construccion. Ahora bien, á causa del paralelismo de las rectas BC, B″C″, los ángulos del triángulo AB″C″ son respectivamente iguales á los del triángulo ABC, siendo el ángulo A comun, B″ = B, C″ = C; luego tambien

$$A' = A,\ B' = B,\ C' = C.$$

Advert. Por la naturaleza misma de la demostracion se ve que los *ángulos iguales* en los dos triángulos, estan opuestos á *lados homólogos*.

Fig. 124.

Teorema II. (*Fig.* 124.)

N.º 193. **Recíprocamente; —** ***Dos triángulos,*** ABC, A′B′C′, *que tienen los ángulos respectivamente iguales, son semejantes; y los lados opuestos* á los ángulos iguales son *lados homólogos.*

Sean A = A′, B = B′, C = C′. Tomemos como arriba AB″ = A′B′, y tiremos la B″C″ paralela á BC. — Los dos triángulos A′B′C′, AB″C″, son iguales por tener un lado igual, adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, que son: A′ = A, B′ = B = B″. Ahora bien, el triángulo AB″C″ es semejante al ABC (n.° 191.); luego tambien son semejantes los dos triángulos A′B′C′, ABC; y por consiguiente dan la serie de razones iguales

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'.$$

Advert. Los lados homólogos AB y A′B′, AC y A′C′, BC y B′C′, estan, como se ve, opuestos á los ángulos iguales C = C′, B = B′, A = A′.

TEOREMA III. (Sin figura.)

N.° 194. *Dos triángulos son semejantes cuando los lados del uno son respectivamente paralelos ó perpendiculares á los del otro;* — en cuyos casos son *lados homólogos* los que se hallan colocados paralela ó perpendicularmente.

En virtud del teorema precedente, todo se reduce en este caso á probar qué tienen los ángulos iguales respectivamente.

Sean AB y A′B′, AC y A′C′, BC y B′C′, respectivamente paralelos ó perpendiculares; digo que deben ser

$$C = C', \quad B = B', \quad A = A'.$$

En efecto, ya sabemos (n.° 70.) que los ángulos C y C′, B y B′, A y A′, no pueden ser sino iguales ó suplementarios: pero no puede admitirse que los seis ángulos sean de dos en dos suplementarios; porque entonces tendriamos

$$A + A' + B + B' + C + C' = 6 \textit{ rectos},$$

lo cual es un *absurdo* (n.° 55.).

Tampoco puede admitirse que solo *cuatro* ángulos, por ejemplo, A y A′, B y B′, sean suplementarios de dos en dos, porque resultaria

$$A + A' + B + B' = 4 \textit{ rectos},$$

lo cual es tambien *absurdo*.

Luego dos ángulos al menos del primer triángulo han de ser forzosamente iguales á sus correspondientes en el segundo; y por consiguiente (n.° 55.) el tercer ángulo del uno ha de ser igual al tercero del otro. Se tiene pues

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C';$$

y de aqui (n.° 193.) la serie de razones iguales,

$$BC : B'C' :: AC : A'C' :: AB : A'B'.$$

Advert. Los lados *homólogos* BC y B'C', AC y A'C', AB y A'B', son los respectivamente *paralelos* ó *perpendiculares.*

Fig. 124. TEOREMA IV. (*Fig.* 124.)

N.° 195. *Dos triángulos*, ABC, A'B'C', *son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por dos lados proporcionales.*

Supongamos que sea

$$A = A', \quad y \quad AB : A'B' :: AC : A'C';$$

tomemos en AB, AC, dos partes AB'' = A'B', AC'' = A'C'; y tiremos la recta B''C''. Los dos triángulos A'B'C', AB''C'', son iguales por tener un ángulo igual formado por dos lados respectivamente iguales. Ahora bien, por hipótesis tenemos

$$AB : A'B' :: AC : A'C',$$

y por consiguiente,

$$AB : AB'' :: AC : AC'';$$

luego (n.° 183, *recíp.*) B''C'' es paralela á BC; y el triángulo AB''C'' es semejante á ABC (n.° 191.); luego tambien A'B'C' es semejante á ABC.

Escolio. Los cuatro teoremas precedentes constituyen los casos *principales* de la semejanza de los triángulos.—Hay ademas otro que corresponde al cuarto caso de igualdad (n.° 159.), y puede enunciarse así:

Dos triángulos son semejantes cuando son dos lados del uno proporcionales con dos del otro, y de los cuatro ángulos *respectivamente opuestos á dichos lados, dos son iguales y los otros dos son de la misma especie.*

Pero este caso se presenta rara vez en las aplicaciones.

De los polígonos semejantes.

TEOREMA VI (*Fig.* 126.) Fig. 126.

N.º 196. *Dos polígonos semejantes,* ABCDEF, A′B′C′D′E′F′, *tienen los lados homólogos proporcionales, y los ángulos homólogos iguales respectivamente.*

Porque, 1.º—de la semejanza de los triángulos ABC y A′B′C′, ACD y A′C′D′, ADE y A′D′E′,..., se deducen las siguientes razones iguales,

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C' ::...,$$
$$AC : A'C' :: AD : A'D' :: CD : C'D' ::...,$$
$$AD : A'D' :: AE : A'E' :: DE : D'E' ::...,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ó, suprimiendo las razones comunes á estas series,

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' ::...$$

2.º—De la misma semejanza se deduce la igualdad de los ángulos de los triángulos (n.º 192.), y por consiguiente la de los ángulos respectivos de los dos polígonos, ángulos que no son mas que conjuntos de ángulos parciales iguales respectivamente: [por ejemplo,

DCB = D′C′B′, puesto que ACB = A′C′B′, ACD = A′C′D′].

Asi pues, se tiene A = A′, B = B′, C = C′, D = D′,...;

L. C. D. D.

N.º 197. ESCOLIO.—Haremos aqui dos observaciones importantes:

La *primera* es que en el caso de hallarse, como hemos supuesto, dos lados homólogos, AB, A′B′, paralelos y en el mismo sentido, todos los demas *lados homólogos* BC y B′C′, CD y C′D′, DE y D′E′,..., se encuentran tambien *paralelos y en* *el mismo sentido*; y lo mismo las *diagonales homólogas* AC y A′C′ AD y A′D′,...

Esto es una consecuencia necesaria de la igualdad de los ángulos homólogos en los polígonos y en los diferentes triángulos. (*Véase* ademas lo dicho, n.º 62.)

La *segunda* observacion es que la demostracion dada arriba no es peculiar de la forma de descomposicion empleada en esta figura; sino que se aplicaria igualmente á cualquier otra clase de descomposicion de los polígonos en triángulos. (*Véase* el n.º 83.)

Fig. 126.

TEOREMA VI. (*Fig.* 126.)

N.º 198. Recíprocamente: — *Dos polígonos son semejantes cuando tienen los lados* [dispuestos en el mismo orden] *proporcionales*, *y los ángulos* [tambien dispuestos en el mismo orden] *iguales respectivamente*; es decir, cuando dan

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: \ldots,$$

y
$$A = A', \ B = B', \ C = C', \ D = D', \ldots$$

[Se entenderá bien la espresion *dispuestos en el mismo orden*, si se observa que puestos los lados AB y A′B′, en la posicion de dos rectas paralelas y dirigidas en el mismo sentido (n.º 190.), todos los lados supuestos proporcionales son por necesidad paralelos y se hallan dirigidos en el mismo sentido, á consecuencia de la igualdad supuesta de los ángulos A y A′, B y B′,...]

Para desmostrar la proposicion, concibamos los dos polígonos descompuestos en triángulos por medio de rectas tiradas desde los vértices de dos ángulos iguales A y A′. — Desde luego se tienen dos triángulos ABC, A′B′C′, semejantes entre sí (n.º 195.), por tener un ángulo igual B = B′, formado por lados proporcionales, AB y A′B′, BC y B′C′; de donde resulta

$$\textit{ángulo}\ ACB = \textit{ángulo}\ A'C'B', \quad y \quad AC : A'C' :: BC : B'C',$$

ó, en virtud del enunciado, $AC : A'C' :: CD : C'D'$.

Si ahora comparamos los dos triángulos ACD, A′C′D′, veremos que los ángulos ACD, A′C′D′, son iguales por ser diferencias entre los ángulos iguales BCD y B′C′D′, ACB y A′C′B′;

además, tenemos

$$AC : A'C' :: CD : C'D',$$

como acaba de verse. Luego estos triángulos son tambien semejantes por tener un ángulo igual formado por lados proporcionales; y así lo mismo para los demas pares de triángulos, ADE y A'D'E', AEF y A'E'F'.

Luego finalmente los polígonos son semejantes (n.° 187.).

TEOREMA VII. (*Fig.* 127.) Fig. 127.

N.° 199. *En dos polígonos semejantes, las líneas homólogas son proporcionales con los lados homólogos.*

Sean PQ, P'Q', dos rectas tiradas por los puntos homólogos P y P', Q y Q'.

Con arreglo á la definicion de las líneas homólogas (n.° 188.), los puntos P y P', Q y Q', estan unidos á dos lados homólogos [AB y A'B' por ejemplo] por *dos pares* de triángulos semejantes y dispuestos del mismo modo, PAB y P'A'B', QAB y Q'A'B'; de donde puede concluirse la semejanza de los dos triángulos PBQ, P'B'Q' y por consiguiente la proporcion

$$PQ : P'Q' :: BP : B'P'$$

ó, á causa de la proporcion,

$$BP : B'P' :: AB : A'B',$$

tendremos $$PQ : P'Q' :: AB : A'B';$$

L. C. D. D.

ESCOLIO 1.° Cómo caso particular del teorema precedente, tomemos en los lados homólogos AF y A'F', BC y B'C', dos puntos M, N, que dividan á estas rectas *en partes* directamente *proporcionales*, es decir, tales que den

$$AM : A'M' :: AF : A'F' \quad y \quad BN : B'N' :: BC : B'C';$$

los puntos M y M', N y N', formarán tambien dos pares de puntos homólogos; y digo que se tendrá

$$MN : M'N' :: AB : A'B'.$$

Esto se infiere evidentemente de la comparacion de los triángulos semejantes AMN y A'M'N', ABN y A'B'N'.

Fig. 58. Escolio 2.° Si en el enunciado del teorema n.° 89 (*fig. 58*), las rectas AF, A′F′, en lugar de ser iguales, tienen entre sí una razon cualquiera $m : n$, y las distancias respectivas AE y A′E′, AD y A′D′,..., BE y B′E′, BD y B′D′,..., guardan la misma razon $m : n$, se obtendrian, hecha la construccion, dos polígonos, no ya iguales, sino *semejantes entre sí.*

Omitimos de intento la demostracion del teorema casi variado, porque puede deducirse facilmente de lo que acaba de esponerse.

N.° 200. Escolio general *sobre los polígonos semejantes.*

Terminaremos esta teoría con una observacion sobre el *número total* de condiciones estrictamente necesarias para que sean *semejantes* dos polígonos de *n* lados.

Puesto que se pasa del caso de igualdad de dos polígonos al caso de semejanza, suponiendo que dos lados homólogos en vez de ser *iguales*, estan en una *razon cualquiera* (*escol.* precedente, y n.° 189, 1.er *pr.*), resulta que siendo $(2n-3)$ el número de condiciones necesarias para la igualdad, segun hemos visto (n.° 90.), vendrá á ser $(2n-4)$ el número de condiciones necesarias para la semejanza.

Asi es como, en los triángulos, la relacion

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'$$

equivale á las dos condiciones

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Sin embargo, cuando se da la *especie* del polígono, todavía puede reducirse más el número de condiciones.

Asi, en el *paralelógramo* bastan *dos* condiciones; por ejemplo: — *Dos paralelógramos son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por dos lados proporcionales* [$A = A'$, y $AB : A'B' :: AC : A'C'$].

En el *rombo*, basta *una* condicion [*ángulo* A = *ángulo* A′, por ejemplo].

Todos los cuadrados son figuras *semejantes*; proposicion evidente por sí misma, pues los ángulos de cada uno son iguales entre sí y lo mismo los lados.

Todos los polígonos regulares DEL MISMO NÚMERO DE LADOS *son* figuras *semejantes*, &c.

§. III. *Otros teoremas sobre las líneas proporcionales.—Propiedades de los triángulos, rectángulos y oblicuángulos.*

TEOREMA I. (*Fig.* 128.) Fig. 128.

N.º 201. *Las partes de paralelas,* AL, A'L', *interceptadas entre un número cualquiera de rectas,* PA, PB, PC, PD,... *concurrentes* [en un punto P], *son proporcionales.*

[El punto P puede indiferentemente estar situado fuera de las paralelas ó entre ambas.]

La comparacion de los diversos pares de triángulos semejantes PAB y PA'B', PBC y PB'C',..., dá lugar á las series de razones iguales

1.ª PA : PA' :: AB : A'B' :: PB : PB',

2.ª PB : PB' :: BC : B'C' :: PC : PC',

3.ª PC : PC' :: CD : C'D' :: PD : PD',

4.ª . . . .

Todas estas razones son iguales, porque la última de cada serie es la primera de la siguiente inmediata; luego, atendiendo solo á las intermedias, podemos obtener la nueva serie

AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' :: ...;

lo cual demuestra la proposicion.

Advert. Cuando el punto P es *interior* á las paralelas, la proposicion es igualmente verdadera; pero los segmentos de la recta A'L' correspondientes á los de la AL, se hallan colocados *en sentido contrario* respecto de estos.

RECÍPROCAMENTE:—*Un número cualquiera de rectas,* AA', BB', CC', DD',..., *que dividen á dos paralelas,* AL, A'L', *en partes proporcionales, son concurrentes.*

En efecto, consideremos primero solamente las tres rectas AA', BB', CC' (*fig.* 129); y supongamos que P es el punto de Fig. 129.
encuentro de las dos primeras.—Si la recta CC' no pasara por el mismo punto P, podria juntarse este punto con el C, por medio de una recta PC que encontraria á A'L' en un punto C'' diferente á C'; y entonces, en virtud de la proposicion directa, tendriamos

AB : A'B' :: BC : B'C'';

pero por el supuesto tenemos tambien

$$AB : A'B' :: BC : B'C';$$

luego deberia ser $B'C'' = B'C'$, resultado *absurdo*.

Deben pues las tres rectas AA', BB', CC', concurrir en un mismo punto P. — Del mismo modo se demostraria que DD' debe concurrir en el mismo punto que las tres primeras; *luego*, &c.

Escolio 1.° Algunas veces se presenta la anterior serie de razones bajo la forma

$$AB : BC : CD : DE : \ldots :: A'B' : B'C' : C'D' : D'E' : \ldots,$$

escribiendo primero todos los antecedentes, y despues todos los consecuentes de las razones iguales; lo cual es permitido, segun la teoría de las proporciones, y facilita alguna abreviacion.

De aqui se deduce inmediatamente que si fuera

$$AB = BC = CD = DE = \ldots,$$

sería tambien

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = \ldots$$

Escolio 2.° Si en las primeras series de razones establecidas al principio de este número, se tienen solo en cuenta las razones de los estremos, se obtiene esta nueva serie

$$PA : PA' :: PB : PB' :: PC : PC' :: PD : PD' :: \ldots,$$

ó bien (n.° 184.)

$$PA' : AA' :: PB' : BB' :: PC' : CC' :: PD' : DD' :: \ldots;$$

lo cual demuestra que

Las rectas PA, PB, PC, PD,..., *que, partiendo de un mismo punto* P, *estan cortadas por dos paralelas*, AL, A'L', *quedan divididas en partes proporcionales*; — proposicion que es la *general* de la del n.° 183.

Fig. 130. Teorema II. (*Fig.* 130.)

N.° 202. *En todo triángulo* ABC, *la bisectriz* AD *de cada ángulo* A *divide al lado opuesto* BC *en dos segmentos* BD, DC, *directamente proporcionales con los lados adyacentes;*— y *recíprocamente.*

Esta proposicion solo necesita demostrarse en el caso de ser desiguales los lados, AB, AC, y de ser por consiguiente AD oblicua á BC (*Véase* el n.º 61.).

En esta hipótesis, bajemos sobre AD, desde los vértices B, C, las perpendiculares BE, CF; y tendremos dos triángulos ABE, ACF, semejantes por ser equiángulos (n.º 193.); de los cuales deduciremos la proporcion

$$AB : AC :: BE : CF.$$

Pero los otros dos triángulos BDE, CDF, semejantes tambien por la misma razon, dan

$$BE : CF :: BD : DC;$$

luego $$AB : AC :: BD : DC;$$

L. C. D. D.

La *recíproca* es *evidente* (n.º 21.), pues solo hay una recta que, tirada hasta BC desde el punto A, puede dividir á BC en dos partes que tengan entre sí la razon dada AB : AC.

Escolio 1.º La bisectriz, AD′, del ángulo B′AC, suplemento del ángulo A, es decir (n.º 43., *escol*. 3.º), la perpendicular á la bisectriz AD, determina tambien en el lado BC prolongado, dos segmentos BD′, CD′, tales que dan la proporcion

$$AB : AC :: BD' : CD';$$

para demostrarlo, bastaria bajar desde los puntos B, C, dos líneas perpendiculares á AD′; y se hallaria sucesivamente

$$AB : AC :: BE' : CF', \qquad BE' : CF' :: BD' : CD';$$

de donde se deduciria la proporcion antes puesta.

Escolio 2.º De las dos proporciones demostradas, se saca la siguiente:

$$BD : CD :: BD' : CD';$$

y la recta BC se dice *dividida armónicamente* en los puntos D y D′.

Mas adelante volveremos á tratar de la division *armónica* de las líneas.

Fig. 131. TEOREMA III. (*Fig.* 131.)

N.º 203. *Si desde el vértice* A *del ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC, *se baja una perpendicular á la hipotenusa*, la perpendicular dividirá al triángulo total en dos triángulos parciales tambien rectángulos, y á la hipotenusa en dos segmentos;—Esto supuesto:

1.º *Los dos triángulos parciales,* ABD, ACD, *son semejantes al triángulo total, y* por consiguiente (n.º 189.), *semejantes entre sí*:

2.º Suponiendo las líneas valuadas en números (n.º 185.), —*La perpendicular* AD *es media proporcional entre los dos segmentos*, BD, CD, *de la hipotenusa*:

3.º *Cada cateto*, AB ó AC, *es medio proporcional entre el segmento adyacente de la hipotenusa*, BD ó DC, *y la hipotenusa entera* BC.

En efecto, 1.º—Los triángulos ABC, ABD, tienen un ángulo comun B, y cada uno un ángulo recto; luego son semejantes (n.º 193.). Lo mismo sucede con los triángulos ACB, ACD; luego tambien son semejantes.—Tambien se puede observar que los triángulos parciales tienen sus lados respectivamente *perpendiculares*; lo cual hará mas facil la comparacion de sus lados homólogos (n.º 194.).

2.º—Comparando los dos triángulos parciales ABD, ACD, y aprovechando la última observacion que acaba de hacerse, se tiene

$$BD : AD :: AD : DC.$$

3.º—Comparando el triángulo total ABC con el triángulo parcial ABD, observando que en ellos, BC y AB son homólogos por hipotenusa, y AB y BD homólogos por lados opuestos á ángulos iguales, BCA, BAD, se obtiene la proporcion

$$BC : AB :: AB : BD.$$

La comparacion de los triángulos ABC, ACD; daria igualmente

$$BC : AC :: AC : DC.$$

Advert. Estos mismos triángulos comparados de dos en dos dan lugar á otras proporciones que rara vez se emplean, pero qué se obtienen facilmente cuando se necesitan.

Las *recíprocas* son *verdaderas*; y nos reduciremos á citar la siguiente:

Cuando la perpedicular AD, *bajada desde el vértice* A *de un ángulo cualquiera de un triángulo* ABC, *sobre el lado opuesto* BC, *es media proporcional entre los dos segmentos de este lado* [determinados por la perpendicular], *el ángulo formado por los otros dos lados es* RECTO, *y el triángulo es rectángulo* en A.

En efecto, de la proporcion del supuesto

$$BD : AD :: AD : DC,$$

se deduce la semejanza de los triángulos rectángulos ADB, ADC, por tener un ángulo igual en D, formado por lados proporcionales (n.º 195.); lo cual da entonces

ángulo BAD=*ángulo* ACD, y *ángulo* ABD=*ángulo* CAD.

Pero siendo $BAD + ABD = 1$ *recto* (n.º 56.);

deberá tambien ser $BAD + CAD = 1$ *recto.*

Luego el triángulo ABC es rectángulo en A.

Teorema IV. (*Fig.* 131.)

Fig. 131.

N.º 204. *En un triángulo rectángulo* ABC, *el cuadrado* [ó segunda potencia] del valor numérico *de la hipotenusa*, BC, *es igual á la suma de los cuadrados* de los valores numéricos *de los otros dos lados.*

Esta proposicion se deriva casi inmediatamente de la tercera del *número* precedente. En efecto, de alli se saca

$$AB^2 = BC \times BD, \qquad AC^2 = BC \times DC;$$

sumando miembro á miembro estas dos ecuaciones,

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC \times BC,$$

luego $$AB^2 + AC^2 = BC^2;$$

L. C. D. D.

Corolario. *Cuando* $AB = AC$, *se tiene* $BC^2 = 2AB^2$; luego *en todo triángulo rectángulo isósceles, el cuadrado de* *la hipotenusa* [ó base del triángulo en este caso] *es doble del cuadrado de cualquiera de los catetos.*

Por consiguiente,—*La segunda potencia del valor numérico de la diagonal de un cuadrado es doble de la segunda potencia del valor de su lado.*

Luego—*La diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables entre sí* [pues se hallan en la razon de $\sqrt{2}:1$].

ESCOLIO 1.° De las dos relaciones

$$AB^2 = BC \times BD, \quad AC^2 = BC \times DC,$$

se deduce la proporcion

$$AB^2 : AC^2 :: BC \times BD : BC \times DC, \quad \text{ó} \quad :: BD : DC.$$

Igualmente, la identidad $BC^2 = BC^2$, combinada con las mismas dos relaciones de arriba, da

$$BC^2 : AB^2 :: BC \times BC : BC \times BD, \quad \text{ó} \quad :: BC : BD$$

$$\text{y} \quad BC^2 : AC^2 :: BC \times BC : BC \times DC, \quad \text{ó} \quad :: BC : DC.$$

Donde se ve que

En todo triángulo rectángulo, los cuadrados [ó segundas potencias] *de los catetos y la hipotenusa, son directamente proporcionales con los segmentos de dicha hipotenusa y con la hipotenusa entera*;—[es decir, que se tiene (n.° 201., *escol.*)

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 :: BD : DC : BC].$$

N.° 205. ESCOLIO 2.°—Los segmentos BD, DC, formados por la perpendicular AD en la hipotenusa BC, se llaman *proyecciones* de los catetos AB, AC, sobre la misma hipotenusa.— En general, la PROYECCION de una recta de longitud
Fig. 132. determinada, MN (*fig.* 132.), sobre otra recta indefinida AB, es la *distancia* PQ *de los pies de las perpendiculares* bajadas á la segunda desde los estremos de la primera.

Tirando por el punto M, la recta MR paralela á PQ, tendremos $MR = PQ$ (n.° 72.), y entonces el triángulo rectángulo MNR, en virtud del teorema precedente, dará

$$MN^2 = MR^2 + NR^2 = PQ^2 + (NQ - MP)^2.$$

Luego—*El cuadrado de una recta* [de longitud determinada] *es igual al cuadrado de su proyeccion sobre otra recta, mas el cuadrado de la diferencia de las perpendiculares que determinan dicha proyeccion.*

TEOREMA V. (*Fig.* 133.) Fig. 133.

N.° 206. *En todo triángulo obtusángulo* ABC, *el cuadrado del lado* BC *opuesto al ángulo obtuso* A, *es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados*, MAS *el duplo del producto de uno de estos*, AB por ejemplo, *por la proyeccion* AD *del otro* AC *sobre la prolongacion del primero;*— es decir, que se verifica que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD.$$

En efecto, el triángulo BCD da

$$BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

Pero vemos que $\quad BD = AB + AD,$

y, elevando al cuadrado,

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD \ (*).$$

Sustituyendo pues este valor de BD^2 en la primera igualdad, y observando que el triángulo rectángulo ACD da $CD^2 + AD^2 = AC^2$, se obtiene

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD;$$

L. C. D. D.

TEOREMA VI. (*Fig.* 134.) Fig. 134.

En un triángulo cualquiera, ABC, *el cuadrado de un lado* BC *opuesto á un ángulo agudo* A, *es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados*, MENOS *el duplo del producto de uno de estos*, AB, *por la proyeccion* AD *del otro* AC *sobre el primero* AB [prolongado si fuera necesario (número 57.)].

(*) Segun la fórmula de *Algebra* $(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$.

En efecto, tenemos, como antes,

$$BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

Ahora bien, segun caiga la perpendicular CD dentro ó fuera del triángulo ABC, asi tendremos

$$BD = AB - AD, \quad ó \quad BD = AD - AB;$$

pero en uno y en otro caso, elevando al cuadrado, sale siempre (*), $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$;

de donde, sustituyendo en la primera igualdad, como anteriormente, sale

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AD.$$

Advert. Esta igualdad se verifica siempre, aun en el caso
Fig. 134. de confundirse la perpendicular CD con el lado CB (*fig.* 134); porque entonces, siendo $AD = AB$, la igualdad se reduce á

$$BC^2 = AC^2 - AB^2, \quad ó \quad AC^2 = BC^2 + AB^2,$$

lo cual es cierto (n.º 204.), pues el triángulo ABC es rectángulo en B.

ESCOLIO 1.º Pueden comprenderse estos dos últimos teoremas en el solo enunciado siguiente:

En todo triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, MAS *ó* MENOS *el duplo del producto de uno de estos dos lados por la proyeccion del otro sobre el mismo, segun sea* OBTUSO *ó* AGUDO *el ángulo opuesto al lado que se compara con los otros dos.*

ESCOLIO 2.º En virtud del principio del *número* 21., será un triángulo *rectángulo*, *acutángulo*, ú *obtusángulo*, segun sea el cuadrado de su mayor lado *igual*, *menor*, ó *mayor* que la suma de los cuadrados de los otros dos.

(*) Segun la fórmula de *Algebra* $(p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$.

Sean, por ejemplo,

1.° $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$;... $3^2 + 4^2 = 5^2$;

luego el triángulo es rectángulo [en A].

2.° $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$;... $2^2 + 3^2 < 4^2$;

luego el triángulo es obtusángulo.

3.° $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$;... $4^2 + 5^2 > 6^2$;

luego el triángulo es acutángulo.

4.° $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$;... $5^2 + 12^2 = 13^2$;

luego el triángulo es tambien rectángulo; y asi de los demas casos.

[*Véase* el n.° 94., donde se da otro medio para conocer la *especie* de un triángulo propuesto.]

TEOREMA VII. (*Fig.* 135.) Fig. 135.

N.° 207. *En todo triángulo* ABC, *la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera*, AC, BC, *es igual al duplo del cuadrado de la mitad del tercer lado* AB, *mas el duplo del cuadrado de la recta* AD *que junta el punto medio* D *de este lado con el vértice opuesto* C.

Bajemos desde C la CE perpendicular á AB.

Los dos triángulos ADC, BDC, el uno obtusángulo, y el otro acutángulo en D, dan (n.° 206.),

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \times DE,$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2DB \times DE;$$

ó, sumando y observando que $AD = DB$,

$$AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2;$$

L. C. D. D.

Advert. Cuando $CA = CB$ (n.° 204., *corol.*), la proposicion es evidente.

COROLARIO. *En todo paralelógramo la suma de los cuadrados de los cuatro lados es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales.* Esta proposicion es consecuencia inmediata y facil del teorema precedente, por lo cual no nos detendremos en demostrarla.

Con mas generalidad:—*En todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de los lados es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales, mas cuatro veces el cuadrado de la recta que junta los puntos medios de las mismas diagonales.*

(Proponemos como ejercicio el buscar la demostracion de este teorema.)

§ IV. *Determinacion de las areas.*

N.° 208. *Definicion y nociones preliminares.*—En la valuacion de las superficies, se llaman por convenio **BASES** de un *paralelógramo* dos de sus lados paralelos; y entonces **LA ALTURA** es la perpendicular comun á las dos bases, de las cuales una se llama base *inferior* y otra base *superior* (V. la *observacion* del n.° 147.).

En el *rectángulo*, dos lados consecutivos cualesquiera forman la base y la altura;—puede tomarse indiferentemente por base el lado *mayor* ó el *menor*.

En el *cuadrado*, la base y la altura son *iguales*.

En el *triángulo* se llama *base* uno cualquiera de sus lados; y entonces su *altura* es la perpendicular bajada á dicho lado desde el vértice del ángulo opuesto.

N.° 209. El *area* de una superficie, ó su *estension superficial*, es, como dijimos (n.° 3.), la *razon numérica* entre dicha superficie y su unidad. Facilmente se concibe que figuras *de formas muy diferentes* pueden sin embargo tener *la misma estension superficial*.

Fig. 54. Asi, por ejemplo, en la *figura* 54, perteneciente al teorema del *número* 81., como se ha demostrado la igualdad de los dos triángulos BFG, DFH, resulta que el paralelógramo AGHC *tiene la misma estension superficial* que el trapecio ABDC.

Para espresar esta propiedad de dos figuras que tienen la *misma estension, ó la misma area*, sin ser sin embargo *iguales ó superponibles*, se dice que son *equivalentes*.—En la *fi-*
Fig. 54. *gura* 54, el paralelógramo AGHC y el trapecio ABDC son *equivalentes*: constan de una parte comun, AGFDC, y de dos triángulos que son iguales, BGF, DFH, pero que estan reunidos á la parte comun por ángulos *diferentes*, GFB, FDH; lo cual hace ver por qué no son superponibles.

Asi pues, dos polígonos compuestos de un mismo número de triángulos iguales, pero *no reunidos de la misma manera*, son *equivalentes* como formados por un conjunto de figuras *iguales y superponibles* cada cual á la suya, ó respectivamente.

Un polígono culquiera puede ser equivalente á un triángulo, y tambien á un cuadrado.

N.º 210. Facil es ahora conocer, fundándonos en la teoría de los triángulos iguales, que.

Dos paralelógramos cualesquiera de la misma base y de la misma altura son equivalentes.

En efecto, como siempre podemos suponer colocadas las dos figuras una sobre otra de modo que coincidan sus bases inferiores, sean ABCD (*fig.* 136) el primer paralelógramo, y Fig. 136.
ABEF [ó ABE′F′] el segundo: estos paralelógramos tendrán necesariamente sus bases superiores, CD, EF [ó E′F′], situadas en una misma recta indefinida, LL′, paralela á la base inferior, puesto que, por hipótesis, tienen la misma altura.

Esto supuesto, considerando solo los paralelógramos ABCD, ABEF, vemos desde luego que los triángulos ADF, BCE, son iguales por tener un ángulo igual [DAF = CBE (n.º 52.)] formado por lados iguales [AD = BC, AF = BE n.º 72.)].—Ahora bien, si del cuadrilátero ABED quitamos alternativamente los triángulos ADF, CBE, cuya operacion debe dar resultados iguales en superficie, obtenemos, primero el paralelógramo ABEF, y luego el ABCD; se sigue pues claramente que dichos paralelógramos son *equivalentes.*

Del mismo modo se probaria que ABCD, ABE′F′, son equivalentes.

Como casos particulares, 1.º—*Un paralelógramo es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura.*

2.º—*Dos rectangulos de la misma base y de la misma altura son iguales*, y por lo tanto *equivalentes.*

N.º 211. *Un triágulo cualquiera es la mitad de un paralelógramo* [ó de *un rectángulo*] *de la misma base y de la misma altura.*

Porque si por los vértices B y C del triángulo ABC (*fig.* 137), Fig. 137.
se tiran las rectas BD, CD, paralelas á los lados AC, AB, respectivamente opuestos, se formará un paralelógramo, ABDC, cuya mitad es claramente ABC (n.º 72.); *luego* &c.

Por consiguiente tambien:—*Dos triángulos de la misma* *base y de la misma altura son equivalentes*, por ser mitades de paralelógramos equivalentes.

Asi, todos los triángulos CAB, C′AB, C″AB, C‴AB,..., que tienen la misma base AB, y cuyos vértices C, C′, C″, C‴,..., se hallan situados en una misma recta paralela á AB, son equivalentes, por tener la *altura comun* CH.

Establecidas estas primeras nociones, pasemos á la *valuacion* de las diversas clases de superficies.

Fig. 138.

LEMA. (*Fig.* 138.)

N.° 212. *Dos rectángulos* ABCD, A′B′C′D′, *de la misma base* [AB = A′B′] *son proporcionales á sus alturas*, AD, A′D′; — [es decir, que

$$\text{ABCD} : \text{A'B'C'D'} :: \text{AD} : \text{A'D'}].$$

En efecto, supongamos primero que las alturas son conmensurables, y que estan en la razon de 13 : 7 por ejemplo; digo que los rectángulos estan tambien en la misma razon.

Coloquemos la medida comun 13 veces sobre AD y 7 veces sobre A′D′; tiremos por los puntos de division rectas paralelas á las bases AB, A′B′; y obtendremos, en el primer rectángulo, 13 rectángulos parciales, y en el segundo, 7; que todos serán iguales entre sí, por tener (n.° 210.) la misma base y la misma altura: luego la razon de ABCD á A′B′C′D′ es tambien la de 13 : 7.

Si las alturas fueran inconmensurables, se daria una demostracion análoga á las empleadas en los *números* 118. y 182.

Basta probar que cada uno de los valores aproximados, $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$,..., de la razon de AD á A′D′, espresa con el mismo grado de aproximacion la de ABCD á A′B′C′D′; y para esto, dividiendo primero á A′D′ en n partes iguales, colocando una de ellas m veces sobre AD, y tirando despues por los puntos de division rectas paralelas á AB, A′B′, se consigue hacer ver que la razon de los dos rectángulos se encuentra entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, &c.

Advert. Como se puede tomar (n.º 208.) indiferentemente la altura por la base, y *vice versa*, resulta tambien que

Dos rectángulos de la misma altura son entre sí como sus bases.

Corolario. *Dos rectángulos cualesquiera*, ABCD, AEFG (*fig.* 139.), *son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.* Fig. 139.

Coloquemos para esto ante todo los rectángulos de modo que tengan un ángulo comun A. Esto supuesto, sea I el punto de interseccion de DC con EF [prolongada si fuere necesario]; comparando primero los dos rectángulos ABCD, AEID, que tienen la misma altura AD, tendremos

$$ABCD : AEID :: AB : AE;$$

comparando despues los otros dos AEID, AEFG, que tienen la misma base AE, tendremos

$$AEID : AEFG :: AD : AG;$$

de donde, multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor comun AEID (*véase* n.º 185.), se saca

$$ABCD : AEFG :: AB \times AD : AE \times AG;$$

L. C. D. D.

Escolio. Podria estenderse esta proposicion y el *lema* que le ha servido de fundamento, á dos paralelógramos que tuvieran los *mismos ángulos*, reemplazando en los enunciados la base y la altura por *dos lados consecutivos.*

Teorema I. (*Fig.* 139.) Fig. 139.

N.º 213. *Un rectángulo cualquiera tiene por medida el producto de su base por su altura*; — ó en otras palabras, — *El area de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Estos dos enunciados significan, que el *número abstrato* que espresa la razon del rectángulo á la *unidad de superficie*, ó lo que es lo mismo, la *medida* del rectángulo (n.º 3.º), es igual al producto de los números abstratos que espresan las razones respectivas de su base y de su altura á la *unidad lineal.*

Fig. 138. Si consideraramos dos rectángulos ABCD, *abcd* (*fig.* 138), el corolario precedente daria

$$\mathrm{ABCD} : abcd :: \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} : ab \times ad;$$

esta proporcion conduce á la igualdad

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{abcd} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}}{ab \times ad} = \frac{\mathrm{AB}}{ab} \times \frac{\mathrm{AD}}{ad};$$

de donde podria concluirse, en general, que la razon de un rectángulo á otro tomado por *unidad*, ó la *medida* del primer rectángulo, es igual al *producto de las razones respectivas* de su base á la del segundo tomada por *unidad de base*, y de su altura á la del segundo tomada por *unidad de altura*; de modo que en este caso habria *dos* unidades *lineales* diferentes, una para la base y otra para la altura.

Para evitar este inconveniente se ha elegido como unidad ordinaria de superficie el *cuadrado*, que es la mas sencilla de todas las figuras (n.º 80.).— En este supuesto, basta hacer en la igualdad anterior $\mathrm{ABCD} = 1$, $ab = 1$, $ad = 1$;

para obtener $\mathrm{ABCD} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD}$;

L. C. D. D.

Advert. No se debe sin embargo olvidar que la igualdad precedente, para tener sentido, exige que la base y la altura del rectángulo se refieran *á una misma unidad lineal*, con lo cual el rectángulo se referirá al *cuadrado construido sobre la misma unidad.*

N.º 214. Corolarios.—Siendo un paralelógramo equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura (n.º 210.), resulta que

Todo paralelógramo tiene tambien por medida el producto de su base por su altura; — ó bien que

El area de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.

Luego—*Dos paralelógramos de la misma base son proporcionales á sus alturas*;—y *vice versa.*

TEOREMA II.

N.° 215. *El area de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura;*

Porque todo triángulo (n.° 211.) es la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura.

COROLARIO 1.° *Las areas de dos triángulos de la misma base, son entre sí como sus alturas;* — y *vice uersa.*

COROLARIO 2.° *El area del trapecio* ABCD (*fig.* 54) *es* Fig. 54.
igual al producto de la semi-suma de las bases, AB, CD, *por su altura* IK ó MN, — ó bien — *al producto de su altura* IK *por la recta* EF *tirada á igual distancia de dichas bases.*

En efecto, ese trapecio consta de dos triángulos, CAB, BCD: en virtud del último teorema espuesto, tenemos

$$ABC = \frac{AB \times IK}{2}, \quad BCD = \frac{CD \times IK}{2};$$

luego

$$ABCD = \frac{AB \times IK}{2} + \frac{CD \times IK}{2} = \frac{AB + CD}{2} \times IK;$$

y como ademas se ha probado (n.° 81.) que $EF = \frac{AB + CD}{2}$,

resulta tambien $\quad ABCD = IK \times EF.$

COROLARIO 3.° Pudiendo siempre un polígono descomponerse en cierto número de triángulos (n.° 83.), resulta que

La medida ó area de un polígono cualquiera es igual á la suma de las areas de todos los triángulos de que consta.

Refiriéndose casi siempre á la del triángulo la valuacion de las varias estensiones superficiales, puede ser útil conocer algunas otras espresiones de su *area*. Demostraremos pues con ese objeto los teoremas siguientes.

TEOREMA III. (*Fig.* 140.) Fig. 140.

N.° 216. *El area de un triángulo*, ABC, *es igual á la mitad del producto de su perímetro por el radio del círculo inscrito.*

Sea O el centro del círculo inscrito (n.° 127.). — Bájense desde ese punto las OD, OE, OF, respectivamente perpendiculares á los lados AB, BC, AC, y tírense las rectas AO, BO, CO.

Esto supuesto, se tiene evidentemente

$$ABC = AOB + COB + AOC;$$

pero (n.° 215.)

$$AOB = \frac{AB \times OD}{2},\ COB = \frac{BC \times OE}{2},\ AOC = \frac{AC \times OF}{2};$$

luego, á causa de ser $OD = OE = OF$,

tendremos

$$AOB = \frac{(AB + BC + CA) \times OD}{2};$$

L. C. D. D.

Escolio. Designemos, para abreviar, por s el area del triángulo, por a, b, c, sus tres lados, y por r el radio del círculo inscrito; la igualdad anterior toma la forma

$$s = \frac{a + b + c}{2} \times r,$$

espresion facil de retener, y que, dando ademas

$$r = \frac{2s}{a + b + c},$$

conduce á este otro teorema:

El radio del círculo inscrito á un triángulo tiene por valor numérico el cociente del duplo del area del triángulo dividido por su perímetro.

Fig. 141.

Teorema IV. (*Fig.* 141.)

N.° 217. *El area de un triángulo*, ABC, *es igual al cociente de la division del producto de sus tres lados por el duplo del diámetro del círculo circunscrito.*

Sea O′ el centro del círculo circunscrito (n.° 127.); tírese el diámetro CO'D, y la cuerda AD; y sea ademas CH la altura del triángulo.

Los dos triángulos CAD, CHB, son rectángulos, uno en A (n.° 123.), y otro en H; ademas, los ángulos en D y en B son iguales como inscritos á un mismo segmento ADBC (n.° 126.). Teniendo pues estos triángulos dos ángulos iguales, son semejantes (n.° 193.); y, comparados sus lados homólogos, dan

$$CD : CB :: AC : CH;$$

de donde
$$CH = \frac{CB \times AC}{CD}.$$

Ahora bien, tenemos (n.° 215.)

$$ABC = \frac{AB \times CH}{2};$$

poniendo pues en esta espresion en vez de CH su valor arriba obtenido, resulta

$$ABC = \frac{AB \times CB \times AC}{2CD};$$

L. C. D. D.

Escolio. Conservando las mismas notaciones del *número* precedente, con solo la diferencia de designar por r', en vez de r, el radio del círculo circunscrito, tenemos

$$s = \frac{a \times b \times c}{4r'};$$

de donde
$$r' = \frac{a \times b \times c}{4s};$$

lo cual significa que

El radio del círculo circunscrito á un triángulo tiene por espresion el producto de los tres lados de este dividido por el cuadruplo del area del mismo.

Mas adelante daremos á conocer otras espresiones del area del triángulo.

N.° 218. **Escolio general** *sobre las areas de las figuras rectilíneas.*

Ahora podemos ya esplicar el sentido de ciertas denomimaciones usadas en Geometría (*véase*, en el n.° 8.°, la nota al pie de la página).

Llámanse *dimensiones* de un rectángulo su *base* y su *altura*; y por eso se dice que

Un rectángulo tiene por medida el producto de sus dos dimensiones; ó que—*El area de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.*

De aqui proceden las denominaciones de GEOMETRÍA *de dos dimensiones* y GEOMETRÍA *de tres dimensiones*, dadas á las dos partes principales de esta ciencia (n.° 23.); porque en efecto uno de los principales objetos de la primera parte es la medida de la *estension con dos dimensiones* [la línea es la *estension con solo una dimension*], mientras que la segunda, como veremos mas adelante, para dar la valuacion de un cuerpo, exige el conocimiento de otra *tercer dimension.*

Las dos dimensiones de un *rectángulo* se llaman tambien su *longitud* y su *latitud*, recibiendo ordinariamente la *mayor* el nombre de *longitud.*

En el *paralelógramo*, las dos dimensiones no son dos lados consecutivos, sino uno de los lados elegidos por *bases*, y la *perpendicular* á él. Por bases se eligen ordinariamente los lados *mayores*, que entonces representan la *longitud*, mientras la perpendicular representa la *latitud.*

Las dos dimensiones de un *triángulo* son, el lado tomado por *base*, y la *mitad de la altura.*—Las del *trapecio* son la *altura*, y la *recta tirada á igual distancia de las bases.*

Cuando el polígono es enteramente irregular, no puede formarse idea clara de sus dos dimensiones tomadas separadamente.—Haciendo, como hemos visto mas arriba, la adicion de los números que espresan las areas de los triángulos en que se descompone el polígono, se obtiene un resultado que representa el producto efectuado de las dos dimensiones (*).

(*) Se puede *rodear* al polígono un rectángulo, de modo que cada
Fig. 142. lado de este toque á un vértice de aquel, como manifiesta la *fig.* 142; y entonces suele llamarse, en *Geometría práctica*, *longitud* del polígono á la dimension mayor del rectángulo, y *latitud* á la menor. Pero estas denominaciones son impropias, porque el producto de las dos líneas escede evidentemente al area del polígono.

Para obtenerla, se necesita quitar de la del rectángulo LMNP que envuelve al polígono, las partes escedentes ABCL, CDEM, ENF,..., que por medio de perpendiculares bajadas á los lados del rectángulo, se reducen ó á *triángulos* como APK, ABI,..., ó á *trapecios*, como IBCL,... Este medio de valuar el area de un polígono es el

La operacion que tiene por objeto *determinar el area* de una superficie cualquiera, se reduce en último resultado á una valuacion en cuadrados unitarios, y se llama por eso CUADRATURA.

Aqui es ocasion de esplicar, como en el *nuevo sistema de medidas* de superficie, por ejemplo, en las medidas *agrarias*, los *multiplos* y los *sub-multiplos* de la *unidad principal* se hacen 100 veces *mayores* ó *menores* que dicha unidad, cuando las dimensiones lineales se hacen solo 10 veces *mayores* ó *menores* que la unidad lineal.

Valiendo el *metro* 10 *decímetros*, resulta que el *metro cuadrado* debe valer 10×10, ó 100 *decímetros cuadrados*;

Por lo mismo, el *decímetro cuadrado* vale 100 *centímetros cuadrados*; &c....

El *ara*, ó *decámetro cuadrado*, equivale á 100 *metros cuadrados*; — la *hectara* á 100×100, ó 10000 *metros cuadrados*.

Y asi sucesivamente.

Diremos en fin que las palabras *rectángulo* y *cuadrado*, usadas en las diversas partes de las matemáticas, traen su origen de la geometría; y son, como ya se sabe, sinónimas de *producto de dos números*, y *segunda potencia de un número*, porque en efecto estos dos productos representan en *unidades cuadradas* la superficie de un rectángulo ó de un cuadrado.

§. V. *Comparacion de las areas.*

Comenzaremos por establecer las relaciones que existen entre las areas de las figuras semejantes.

Relaciones entre las areas de las figuras semejantes.

LEMA. (*Fig.* 143.) Fig. 143.

N.° 219. *Las areas de dos triángulos*, ABC, ADE, *que tienen un ángulo igual* A, *son proporcionales á los rectángulos de los lados que forman dicho ángulo.*

único que puede emplearse en ciertas circunstancias; por ejemplo, cuando se trata de medir la superficie de un bosque, estanque, lago, &c.

Despues de haber superpuesto los ángulos iguales, tírese la BE; los triángulos ABC, ABE, se pueden considerar como que tienen por bases respectivas los lados AC, AE, y por altura la perpendicular bajada sobre AC desde el vértice comun B; luego (n.° 215, *corol.* 1.°) son proporcionales á sus bases, y dan

ABC : ABE :: AC : AE.

Comparando del mismo modo los triángulos ABE, ADE, tendremos

ABE : ADE : : AB : AD.

Multiplicando ahora ordenadamente estas dos proporciones, y suprimiendo en los dos términos de la primer razon el factor comun ABE, resulta

$$\text{ABC} : \text{ADE} :: \text{AB}\times\text{AC} : \text{AD}\times\text{AE};$$

L. C. D. D.

Advert. La *recíproca* no es cierta.

Corolario. Si sucede que despues de la superposicion de
Fig. 144. los dos triángulos, resulte el lado DE del uno (*fig.* 144) paralelo al BC del otro, el *triángulo* ABE es entonces *medio proporcional* entre los triángulos ABC, ADE.

En efecto, en este caso tenemos (n.° 183.)

AB : AD :: AC : AE;

y las dos primeras proporciones del lema precedente tienen comun una razon, y dan

ABC : ABE :: ABE : ADE.

Fig. 145.

Teorema I. (*Fig.* 145.)

N.° 220. *Las areas de los triángulos semejantes* ABC, A'B'C', *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

En efecto, siendo equiángulos esos triángulos (n.° 187), tenemos, en virtud del lema precedente,

$$\text{ABC} : \text{A'B'C'} :: \text{AB}\times\text{AC} : \text{A'B'}\times\text{A'C'};$$

pero como ademas (n.º 187.)

$$AC : A'C' :: AB : A'B',$$

multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, y suprimiendo en los antecedentes el factor comun AC y en los consecuentes el A'C', resulta

$$ABC : A'B'C' :: AB^2 : A'B'^2.$$

Escolio. Sean AD, A'D', las alturas de los dos triángulos. Los triángulos rectángulos ABD, A'B'D', son tambien semejantes, por ser *equiángulos*, y dan

$$AD : A'D' :: AB : A'B';$$

y

$$AD^2 : A'D'^2 :: AB^2 : A'B'^2;$$

de donde se deduce, comparando esta proporcion con la antecedente,

$$ABC : A'B'C' :: AD^2 : A'D'^2.$$

Asi pues, — *Las areas de dos triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus alturas.*

Teorema II. (*Fig.* 126.) Fig. 126.

N.º 221. *Los perímetros de los polígonos semejantes* ABCDEF, A'B'C'D'E'F', *son entre sí como sus lados homólogos;* — y — *Sus areas son proporcionales á los cuadrados de los mismos lados.*

Tenemos primero, á causa de la semejanza de los polígonos (n.º 196);

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' :: \ldots;$$

de donde, en virtud de la teoría de las proporciones,

$$\frac{AB + BC + CD + DE + \ldots}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + \ldots} = \frac{AB}{A'B'};$$

ó *perímetro* ABCDE... : *perímetro* A'B'C'D'E'... :: AB : A'B';

lo cual *demuestra* la parte primera de la proposicion.

En segundo lugar, los polígonos, segun su definicion (n.º 187.), estan compuestos de triángulos semejantes, que, comparados entre sí, guardan respectivamente la misma razon, que es la de los cuadrados de los lados homólogos; de aqui resulta, en virtud de las propiedades de las proporciones, que la suma de los triángulos que constituyen el primer polígono, ó lo que es igual, su *area*, es á la suma de los triángulos que constituyen el segundo polígono, ó á su *area*, como son entre sí los cuadrados de sus lados homólogos; de modo que se tendrá

$$ABCDEF : A'B'C'D'E'F' :: AB^2 : A'B'^2.$$

Corolario. *Las areas de las figuras semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas* (n.° 199).

Teorema III.

N.° 222. *Cuando las líneas homólogas de dos figuras semejantes son proporcionales á las líneas homólogas de otras dos figuras semejantes* [entre sí, aunque no lo sean á las primeras], *las areas de las cuatro figuras son proporcionales;* —*y recíprocamente.*

Sean A, B, las dos primeras figuras, y a, b, dos de sus líneas homólogas; tendremos (n.° 221)

$$A : B :: a^2 : b^2.$$

Sean igualmente C, D, las otras dos figuras, y c, d, dos de sus líneas homólogas; tambien tendremos

$$C : D :: c^2 : d^2;$$

pero, por hipótesis, $a : b :: c : d;$

de donde $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2,$

luego $A : B :: C : D.$

Recíprocamente, si cuatro *figuras* semejantes de *dos* en *dos*, estan ligadas por la proporcion

$$A : B :: C : D,$$

como tenemos $A : B :: a^2 : b^2,$

y $C : D :: c^2 : d^2,$

resulta $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2;$

de donde $a : b :: c : d.$

Advert. La proposicion se verifica tambien cuando todas las cuatro figuras son semejantes entre sí.

COROLARIO. Si tres figuras son semejantes, y una *línea* de la una es *media proporcional* entre las líneas homólogas de las otras dos, el *area* de la primera figura será *media proporcional* entre las *areas* de las otras dos; — y *recíprocamente*.

Comparacion de los cuadrados construidos sobre ciertas líneas.

TEOREMA IV. (*Fig.* 146.)

Fig. 146.

N.º 223. *El cuadrado* BCED *construido sobre la hipotenusa* BC *de un triángulo rectángulo* ABC, *es equivalente á la suma de los cuadrados* ABFG, ACIK, *construidos respectivamente sobre los catetos* AB, AC.

Este teorema en el fondo es igual al del n.º 201.; pero su importancia y su fecundidad han hecho buscar demostraciones fundadas únicamente en la *igualdad* y *equivalencia* de las figuras. Nos reduciremos á dar aqui la que generalmente se admite en los Tratados de Geometría.

Suponiendo construidos los cuadrados hácia la parte esterior del triángulo ABC, bajemos desde el vértice A del ángulo recto, una perpendicular AL á la hipotenusa, y prolonguémosla hasta encontrar á DE en M: con esto el cuadrado BCED resulta dividido en dos rectángulos BDML, LCEM. Tiremos ademas las rectas AD y CF.

Esto supuesto; los ángulos ABD, FBC, son iguales, como compuestos de un ángulo recto y de una parte comun ABC; ademas, las líneas AB y BF, BC y BD, son iguales por ser de dos en dos lados de un mismo cuadrado; luego los triángulos BAD, BFC, son iguales (n.º 63., 2.º caso).

Ahora bien, el triángulo BAD es la mitad del rectángulo BLMD (n.º 211.), porque ambos tienen la misma base BD y la misma altura BL; y el triángulo BFC es la mitad del cuadrado ABFG, por tener la misma base BF, y la misma altura AB; luego

$$BLMD = ABFG.$$

Tirando las rectas AE, BI, se probaria del mismo modo que

$$LMEC = ACIK;$$

y como el *cuadrado* BDEC *equivale* á BLMD $+$ LMEC, resulta finalmente *cuadrado* BDEC $=$ *cuadrado* AEFG $+$ *cuadrado* ACIK; *L. C. D. D.*

Fig. 147. COROLARIO 1.° *El cuadrado* MNPQ (*fig.* 147) *construido sobre la diagonal* BD [ó AC] *de otro cuadrado* ABCD, *es duplo de este:*

Esta proposicion se comprueba facilmente en vista de la figura. — En efecto, los cuatro cuadrados AOBM, BOCQ, AODN, DOCP, son iguales, y respectivamente dobles que los triángulos AOB, BOC, AOD, DOC, cuya suma es igual al cuadrado ABCD.

COROLARIO 2.° Acabamos de ver que los cuadrados ABFG, Fig. 146. ACIK (*fig.* 146), son respectivamente equivalentes á los rectángulos BLMD, LMEC; ademas, estos rectángulos y el cuadrado BCED tienen por altura comun la recta BD; luego, en virtud del lema demostrado en el n.° 212., son entre sí como sus bases BL, LC, BC. Por consiguiente, existe la relacion

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 :: BL : LC : BC.$$

COROLARIO 3.° De ser los cuadrados ABFG, ACIK, equivalentes á los rectángulos BLMD, LMEC, se deduce tambien separadamente (n.° 213.)

$$AB^2 = BC \times BL, \qquad AC^2 = BC \times LC,$$

y de aqui las proporciones

$$BC : AB :: AB : BL, \qquad BC : AC :: AC : LC;$$

que, unidas á la relacion del corolario precedente, reproducen la tercera parte del teorema del n.° 203., y la proposicion que sirve de corolario al n.° 204. — Asi se viene á parar por otros caminos á las propiedades ya demostradas.

COROLARIO 4.° En fin, si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo ABC, se suponen construidos tres polígonos *semejantes* entre sí, siendo estos proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (n.° 221.), y existiendo entre sus lados la relacion

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

resulta que

El polígono construido sobre la hipotenusa es *equivalente* á la suma de los polígonos construidos sobre los catetos.

Las dos fórmulas de álgebra

$$(p+q)^2 = p^2+q^2+2pq,\ (p-q)^2 = p^2+q^2-2pq,$$

que han servido de base á las demostraciones del n.º 206., y esta otra

$$(p+q)(p-q) = p^2-q^2,$$

que tambien es conocida, cuando se traducen al lenguaje geométrico, dan lugar á nuevos teoremas sobre las areas, con los cuales terminaremos este párrafo.

Teorema V. (*Fig.* 148.)

Fig. 148.

N.º 224. *El cuadrado construido sobre la suma ó la diferencia de dos líneas es equivalente á la suma de los cuadrados construidos respectivamente sobre las mismas líneas, mas ó menos el duplo de su rectángulo.*

La sola inspeccion de la figura es casi bastante para reconocer la verdad de esta proposicion.

Sean, *en primer lugar*, AE la mayor de las rectas, y EB la mas pequeña; constrúyanse los cuadrados AEIG, ABCD; despues prolónguese la EI hasta su encuentro en F con CD.

El cuadrado construido sobre AB, suma de las dos líneas, se compone evidentemente de los cuadrados AEIG, IKCF, construidos sobre la línea AE y sobre la línea IK=EB, y ademas de los rectángulos BEIK, GIFD, que tienen por bases respectivas GI = AE, EI = AE, y por alturas GD = EB, IK = EB.

Tenemos pues

$$\textit{cuadrado}\ AB = \textit{cuadrado}\ AE + \textit{cuadrado}\ EB + 2.\ \textit{rect.}\ AE \times EB;$$

lo cual demuestra el *primer caso* de la proposicion.

En *segundo lugar*, sean AB la línea mayor, y BE la menor, siendo por lo tanto AE su diferencia: constrúyase la misma figura de antes, con solo agregarle á la parte esterior un cuadrado GDLM igual á IKCF.

Esto supuesto, el cuadrado AEIG es igual al cuadrado ABCD, *mas* el cuadrado GDLM, *menos* los dos rectángulos EBCF, MIFL. Estos rectángulos tienen por bases respectivas FE=AB, IM=GK=AB, y por alturas BE=IK=IF; luego finalmente,

cuadr. AE = *cuadr.* AB + *cuadr.* EB — 2 veces *rect.* AB × BE;

lo cual demuestra el *segundo caso.*

Fig. 149

Teorema VI. (*Fig.* 149.)

N.º 225. *El rectángulo construido con la suma y la diferencia de dos líneas, es igual á la diferencia de los cuadrados construidos con cada una de ellas.*

Sean AB la línea mayor, BE = BE′ la menor, de modo que AE represente la suma de las dos, y AE′ su diferencia. Constrúyase sobre AE como base, y AG = AE′ por altura el rectángulo AENG, y el cuadrado ABCD; levántese ademas la perpendicular E′IF, que da el cuadrado AE′IG.

Esto supuesto, los dos rectángulos BENK, GIFD, son iguales por tener la misma base y la misma altura, á saber: BK = AG = GI = AE′, EB = E′B = IK = DG; de donde se sigue que el rectángulo AENG es equivalente á la figura DFIKBA. Pero esta es la diferencia de los cuadrados construidos sobre AB y sobre IK = BE′ = BE; luego tenemos

rectángulo AENB = *cuadrado* AB — *cuadrado* BE;
L. C. D. D.

CAPITULO II.

DE LA ESTENSION EN LAS FIGURAS CIRCULARES.

Este capítulo tendrá *tres* párrafos, á saber: — 1º. — la teoría de las líneas *proporcionales* consideradas en el *círculo*; — 2.º — la *valuacion de los lados y las areas* de los polígonos regulares; — 3.º — *la medida del círculo* bajo el doble aspecto de su *estension lineal* y de su *estension superficial.*

§. I. *De las líneas proporcionales consideradas en el círculo.*

TEOREMA I. (*Fig.* 150.) Fig. 150.

N.º 226. ***Los segmentos de dos cuerdas AA′, BB′, que se cortan en un punto P interior á un círculo, son inversamente proporcionales*:**

[Lo cual significa que los segmentos de una de las cuerdas forman *los estremos* de una proporcion cuyos *medios* son los segmentos de la otra.]

Tirando las cuerdas ausiliares AB, A′B′, se obtienen dos triángulos, PAB, PA′B′, semejantes entre sí por tener los ángulos iguales (n.º 193.), 1.º en P, 2.º en A y en B′, 3.º en A′ y en B (n.º 122.).

Comparando pues sus lados homólogos, se forma la proporcion $AP : PB' :: PB : PA'$; *L. C. D. D.*

ESCOLIO 1.º Si una de las dos cuerdas es un diámetro AA′ (*fig.* 151), y la otra cuerda, BB′, le es perpendicular, como entonces se tiene $BP = PB'$ (n.º 105.), la proporcion se transforma en esta otra Fig. 151.

$$AP : PB :: PB : PA'.$$

La recta PB perpendicular al diámetro AA′ toma el nombre de *su ordenada*. De donde resulta que,

En el círculo, toda ordenada á un diámetro es medio proporcional entre los dos segmentos de este.

Esta propiedad puede tambien deducirse de las de los triángulos rectángulos; porque, juntando los puntos A, A′, con el punto B, se forma un triángulo ABA′ rectángulo en B (n.º 123.); que da la proporcion (n.º 203, 2.º)

$$AP : PB :: PB : PA'.$$

ESCOLIO 2.º El mismo triángulo rectángulo ABA′ da (n.º 203, 3.º) la proporcion

$$AA' : AB :: AB : AP;$$

la cual nos dice que — *Toda cuerda tirada por el estremo de un diámetro, es media proporcional entre su proyeccion sobre él* (n.º 205.) *y el mismo diámetro entero.*

Fig. 152. **TEOREMA II.** (*Fig.* 152.)

N.° 227. *Dos secantes*, **PA**, **PB**, *que parten de un mismo punto* **P** *esterior á un círculo, son inversamente proporcionales á sus partes esteriores.*

Tírense, como en el teorema precedente, las cuerdas **AB′** y **BA′**: los dos triángulos **PAB′**, **PBA′**, semejantes por tener comun el ángulo **P**, é iguales los ángulos **A** y **B** (n.° 122.), dan la proporcion

$$PA : PB :: PB' : PA'.$$

[Una de las secantes y su parte esterna forman los *estremos*, y la otra secante con su respectiva parte esterna forman los *medios*.] *L. C. D. D.*

Advert. Esta propiedad está en armonía con la del *escolio del número* 144.

Fig. 153. **TEOREMA III.** (*Fig.* 153.)

N.° 228. Si una secante **PA** y una tangente **PB** parten de un mismo punto **P**,

La tangente es media proporcional entre la secante entera y su parte esterna.

Este teorema, propiamente hablando, no es mas que un caso particular del precedente, en que los dos puntos **B**, **B′**, de la secante **PB**, vienen á confundirse en uno solo (*véase* el n.° 110.).

Pero se demuestra directamente tirando las cuerdas **AB**, **A′B**.—En efecto, asi resultan dos triángulos, **PAB**, **PA′B**, que son semejantes por tener el ángulo **P** comun y los ángulos en **A** y en **B** iguales (números 122., 124.); y dan la proporcion

$$PA : PB :: PB : PA';$$

ESCOLIO. Hay un caso muy notable en la proposicion que acabamos de demostrar.

Fig. 154. Supongamos que la secante **PA** (*fig.* 154 pase por el centro del círculo, y que la tangente **PB** sea igual al diámetro, es decir, que sea **PB**=**AA′**; la proporcion anterior se convertirá en esta otra

$$PA : AA' :: AA' : PA';$$

en cuyo caso se dice que la *recta* PA está *dividida* en el punto A′ EN MEDIO Y ESTREMO (*), es decir, *en dos segmentos, uno de los cuales* [que necesariamente es el mayor] *es medio proporcional entre la recta entera y el otro segmento menor.*

Ademas, la proporcion anterior da (n.° 184.)

$$AA' : PA - AA' :: PA' : AA' - PA',$$

ó

$$AA' : PA' :: PA' : AA' - PA'.$$

Si se toma pues en PB una distancia $PA'' = PA'$, lo cual [á causa de ser $AA' = PB$], da

$$AA' - PA' = PB - PA'' = A''B,$$

resulta

$$PB : PA'' :: PA'' : A''B.$$

Donde se ve que la recta PB está tambien dividida en *medio* y *estremo* en el punto A″.

Observacion sobre los tres teoremas precedentes.

N.° 229. Las proporciones que resultan de los enunciados de esas proposiciones dan lugar á las igualdades

$$PA \times PA' = PB \times PB', \text{ y } PA \times PA' = PB^2,$$

y de aqui se infiere que las tres pueden comprenderse en un solo enunciado:

El producto de las distancias de un punto constante P, *interior ó esterior á un círculo, á dos puntos del mismo círculo, tomados en la misma direccion, es un número constante, cualquiera que sea la dicha direccion.*

[El caso de la *tangente* se halla implícitamente comprendido en este enunciado, pues basta suponer los dos puntos reunidos en *uno solo.*]

Este modo de agrupar los tres teoremas permite tambien

(*) La locucion usada generalmente de division *en media y estrema* RAZON, proviene de una alteracion en el texto de Euclides, como se demostrará en otro lugar; por eso restablecemos aqui la denominacion lógica de dicha division.

dar un enunciado mas conciso de sus recíprocas, que son consecuencias necesarias del n.° 21.:

Fig. 150, 152, 153. 1.° Si cuatro puntos, A y A′, B y B′ (*fig.* 150, 152, 153), estan situados de dos en dos sobre dos rectas que pasan por un mismo punto P, de modo que se tenga

$$PA \times PA' = PB \times PB',$$

esos *cuatro puntos* pertenecen á una *circunferencia de círculo.*

2.° Si dos puntos, A, A′, estan situados en una recta que pasa por un punto P, y otro punto B situado en una segunda recta que pasa por el mismo punto P, de modo que se tenga

$$PB^2 = PA \times PA'$$

los *tres puntos* se hallan colocados en *una misma circunferencia tangente* á la recta PB en el punto B; — ó bien tambien, *el círculo que pasa por el punto* A, y *es tangente á la recta* PB *en el punto* B, *pasa tambien por el punto* A′.

Fig. 155. Teorema IV. (*Fig.* 155.)

N.° 230. *En todo cuadrilátero inscriptible* ABCD, *el rectángulo de las diagonales es igual á la suma de los rectángulos de los lados opuestos* [es decir que

$$AB \times CD = AC \times BD + AD \times BC].$$

En efecto, tiremos por el punto C una recta CE que forme con CA el ángulo ACE igual á el ángulo BCD; y tendremos tambien

$$\textit{ángulo } ECB = \textit{ángulo } ACD.$$

Esto supuesto, vemos que se forman aqui dos triángulos, CEA, CBD, semejantes entre sí por tener dos ángulos iguales, á saber: los ángulos ACE, DCB, iguales por construccion, y lo mismo los CAE, CDB (n.° 122.).

De donde se infiere, comparando los lados homólogos,

$$AC : CD :: AE : BD;$$

y de aqui $\quad CD \times AE = AC \times BD.$

La comparacion de los lados homólogos en los triángulos semejantes BEC, ADC, daría igualmente

$$AD : CD :: BE : CB;$$

y de aqui $$CD \times BE = AD \times CB.$$

Si ahora se suman, miembro á miembro, las igualdades recien obtenidas, resultan

$$CD \times AE + CD \times BE = AC \times BD + AD \times BC,$$

ó $$CD \times AB = AC \times BD + AD \times BC;$$

L. C. D. D.

N.° 231. ESCOLIO. — Este teorema es susceptible de una multitud de aplicaciones: las principales son las siguientes:

1.° *Hallar la cuerda* AB *de la suma de dos arcos* AC, CB, *conociendo las cuerdas de estos.*

A fin de abreviar, llamaremos a, b, c, á los tres lados BC, AC, AB, del triángulo ABC (*), y r al radio del círculo circunscrito; tírese el diámetro $COC' = 2r$, y las cuerdas AC′, BC′ [que pueden llamarse *suplementarias*, por subtender los arcos AC′, BC′, que son suplementos respectivos de los AC, BC].

Esto supuesto, el cuadrilátero inscrito ACBC′ da, en virtud del teorema precedente,

$$AB \times CC' = AC \times BC' + AC' \times CB;$$

pero, de los triángulos CAC′, CBC′, rectángulos en A y en B (n.° 123.), se deduce (n.° 204.)

$$AC' = \sqrt{CC'^2 - AC^2}, \quad BC' = \sqrt{CC'^2 - BC^2};$$

ó, á causa de ser $CC' = 2r$, $AC = b$, $BC = a$,

$$AC' = \sqrt{4r^2 - b^2}, \qquad BC' = \sqrt{4r^2 - a^2};$$

(*) Cuando se quiere representar por una sola letra cada lado de un triángulo, es costumbre ponerles las letras minúsculas respectivas de los ángulos opuestos. — Asi a, b, c, designan los lados opuestos á los ángulos A, B, C.

luego la igualdad de arriba se convierte en

$$c \times 2r = b\,.\sqrt{4r^2 - a^2} + a\,.\sqrt{4r^2 - b^2};$$

de donde (1) $c = \frac{b}{2r}\,.\sqrt{4r^2 - a^2} + \frac{a}{2r}\,.\sqrt{4r^2 - b^2}$,

fórmula que determina el valor numérico de c, en funcion de a, b y r: [falta solo efectuar las operaciones aritméticas indicadas en el segundo miembro].

Fig. 156. 2.° *Hallar la cuerda*, AB $= c$ (*fig.* 156), *del duplo de un arco, conociendo la cuerda*, BC $= a$, *de dicho arco.*

Basta para esto suponer $b = a$, en la fórmula precedente, que entonces dará

$$c = \frac{a}{2r}\,.\sqrt{4r^2 - a^2} + \frac{a}{2r}\,.\sqrt{4r^2 - a^2},$$

ó simplificando,

$$(2) \qquad c = \frac{a}{r}\,.\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

3.° *Hallar la cuerda de la mitad de un arco, conociendo la del arco entero.*

Puesto que c es la cuerda del arco duplo, y a la cuerda del arco simple, todo se reduce á resolver la igualdad (2) con relacion á a. (+)

Pero puede obtenerse el mismo resultado por medio de la
Fig. 156. *fig.* 156.—Porque en efecto, el triángulo CBC′, da

$$CB^2 = CI \times CC' \text{ (n.° 226., } \textit{escol.}\text{ 2.°).}$$

Ahora bien, $CI = OC - OI = OC - \sqrt{OB^2 - BI^2}$ (n.° 204.);

de donde $CI = r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}\left[\text{á causa de ser } BI = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}\right]$.

Luego $a^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}\right) = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2};$

y por consiguiente,

(3) $$a = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2}}\ (*).$$

No llevaremos mas adelante estas aplicaciones, que presentan algunas dificultades algebráicas; pero recomendamos á los jóvenes habituados á esta clase de cálculos, el que despejen en la fórmula (1), ya sea la cuerda a, ya la b, para obtener la *cuerda* a *ó* b *de la diferencia de los dos arcos, por medio de las cuerdas* c *y* b *ó* a *de los mismos.*

Se puede tambien, suponiendo conocidos a, b, c, determinar á r; lo cual da entonces *el valor numérico del radio del círculo circunscrito á un triángulo por medio de sus tres lados.*

N.º 232. Escolio general.—Los cuestiones tratadas en este párrafo, y en algunos del capítulo precedente, pueden considerarse como base de la *geometría analítica*, porque suministran, bajo una fórmula general, relaciones numéricas entre líneas conocidas y líneas desconocidas.

Se ve ademas que, conteniendo radicales muchas de estas espresiones, las líneas desconocidas deben en general ser *inconmensurables* con las líneas dadas.

Asi es, por ejemplo, como hallándose representado por 1 el lado de un cuadrado, está su diagonal representada por $\sqrt{2}$ (n.º 204., *corol.*); lo cual prueba que

La diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado.

Se obtiene tambien este último resultado por una simple aplicacion del teorema relativo á la tangente (n.º 229.).

Sea, en efecto, el cuadrado ABDC (*fig.* 157), en el cual suponemos AB = 1. Describamos desde A como centro, y con AB por radio, una semi-circunferencia que encuentre á AD prolongada en los puntos E, F. Fig. 157.

(*) Esta espresion puede tambien transformarse en

$$\sqrt{r\left(r+\frac{c}{2}\right)} - \sqrt{r\left(r-\frac{c}{2}\right)};$$

porque elevando una y otra al cuadrado, resulta igualmente

$$2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Se tiene (n.º 229.)

$$DE : DB :: DB : DF,$$

ó

$$DE : 1 :: 1 : 2 + DE;$$

de donde

$$DE = \frac{1}{2 + DE}.$$

Luego

$$\sqrt{2} = AD = 1 + DE = 1 + \frac{1}{2 + DE}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + DE}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + DE}}}$$

etc., etc.

Aqui se ve que siempre quedara un resíduo, por mucho que se prolongue la operacion, pues el valor de AD está representado por una *fraccion contínua periódica*. Por consiguiente, es inconmensurable la razon entre AD y AB.

Advert. Es de observar que la demostracion anterior suministra un medio *geométrico* de desarrollar en fraccion contínua el número inconmensurable $\sqrt{2}$.

Pronto tendremos ocasion de encontrar otras líneas notables que estan con la unidad en razon inconmensurable.

§. II. *Valuacion de los lados y de las areas de cualesquiera polígonos regulares.*

Observacion preliminar. — Algunas de las proposiciones que forman parte de los párrafos siguientes, son mas bien problemas cuya resolucion se espone, que teoremas cuya demostracion se da, pues tienen por objeto especial la determinacion de ciertas cantidades desconocidas por medio de otras conocidas y dadas. Pero como son problemas *teóricos*, les daremos la forma ordinaria de los teoremas.

Fig. 81.

TEOREMA I. (*Fig.* 81.)

N.º 233. *El area de un polígono regular cualquiera*

ABCDEF *es igual á la mitad del producto de su perímetro por su apotema* OG, que es el radio del círculo inscrito.

En efecto, los triángulos iguales é isósceles OAB, OBC, OCD,... (n.° 132.), dan

$$OAB = AB \times \frac{OG}{2},$$

$$OBC = BC \times \frac{OG}{2},$$

$$OCD = CD \times \frac{OG}{2}, \ldots \text{ (n.° 217.)};$$

luego $\quad area\ ABCDEF = (AB + BC + CD + \ldots) \times \frac{OG}{2},$

ó, para abreviar, $\quad A = \frac{1}{2} P \times R,$

representando A el area del polígono, P su perímetro, y R el radio del círculo inscrito.

Escolio. Sea R el radio del polígono (n.° 132.), *n* el número de sus lados, y *a* un lado cualquiera.

El triángulo OGA da $OG = \sqrt{OA^2 - AG^2}$ (n.° 204.); de donde empleando las notaciones convenidas, y observando que $AG = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$,

resulta $\quad r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$

Tenemos ademas $\quad P = n \cdot a;$

luego $\quad A = \frac{na\sqrt{4R^2 - a^2}}{4};$

lo cual nos da la espresion del area de un polígono, cuando se conocen el *radio*, el *lado*, y el *número* de éstos.

Teorema II.

N.° 234. *Los perímetros de dos polígonos regulares se-*

mejantes son proporcionales á los radios de los círculos inscritos ó circunscritos; — y — *Sus areas son proporcionales á los cuadrados de los mismos lados.*

Ya vimos (n.º 200.) que los polígonos regulares de un mismo *número de lados* son *figuras semejantes.*

Recíprocamente: Para ser semejantes dos polígonos regulares deben tener un *mismo número* de lados; porque si el número de lados fuera diferente, no serian los ángulos del un polígono iguales á los del otro (n.º 133.); lo cual implicaría contradiccion con la propiedad del n.º 196.

De aqui se infiere que los ángulos en el centro, lo mismo que los ángulos de la base, son iguales respectivamente en los dos polígonos; luego los triángulos isósceles que tienen sus vértices en los centros de dichas figuras, son respectivamente equiángulos y semejantes; y por lo tanto los radios de los círculos inscritos y circunscritos son líneas homólogas. Aplicando pues á estos polígonos la proposicion general del n.º 221., se obtiene demostrado el teorema propuesto.

Sean R, R′ y r, r', a y a', P y P′, A y A′ los radios, apotemas, lados homólogos, perímetros y areas de los dos polígonos; de lo dicho resultan las series de razones siguientes:

$$1.^\circ \quad P : P' :: R : R' :: r : r' :: a : a';$$

$$2.^\circ \quad A : A' :: R^2 : R'^2 :: r^2 : r'^2 :: a^2 : a'^2.$$

Fig. 107. **Teorema III.** (*Fig.* 107.)

N.º 235. *Conociendo el lado* [AB$=a$], *y el radio* [OA$=$R] *de un polígono regular* [de n lados], se pueden siempre *obtener* — 1.º — *el valor del lado* AC *del polígono regular de* SUB-DOBLE *número de lados*; — 2.º — *el valor del lado* AI *del polígono regular de* DUPLO *número de lados.* — 3.º — en fin, *el radio* OM *y el lado* MN *del polígono circunscrito* SEMEJANTE *al polígono propuesto.*

[El radio R es comun á los tres polígonos que tienen por lado las rectas AB, AC, AI.]

1.º Como AC subtende un arco duplo del subtendido por AB$=a$, basta sustituir en la fórmula (2) del *número* 231., c por AC, y r por R; con lo cual resulta

$$(1) \qquad AC = \frac{a}{R}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

2.° Se obtiene tambien el valor de AI, por medio de la fórmula (3) del mismo *número*, haciendo $r = R$, y $a' = AI$; lo cual da

$$(2) \qquad AI = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

3.° Para los valores de OM y MN, recurrimos á los triángulos semejantes OMN, OAB, cuyas líneas homólogas son OI y OK, y dan

$$OM : OA :: OI : OK, \text{ de donde } OM = \frac{OA \times OI}{OK},$$

$$MN : AB :: OI : OK, \text{ de donde } MN = \frac{AB \times OI}{OK};$$

pero tenemos $OA = OI = R$, $AB = a$, $OK = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$ (n.° 204);

luego (3) $OM = \dfrac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$, $MN = \dfrac{2a.R}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$;

L. C. D. D.

Escolio. Conociendo el radio y el lado de cada uno de los tres nuevos polígonos, se pueden deducir los valores de sus *areas*, sustituyendo en la fórmula

$$A = \frac{na.\sqrt{4R^2 - a^2}}{4},$$

en vez de n, a, R, los valores respectivos que se acaban de obtener [en lugar de n debe ponerse $\frac{n}{2}$ para el primer polígono, $2n$ para el segundo, quedando sin variar para el tercero.]

Teorema IV. (*Fig.* 107.)

Fig. 107.

N.° 236. *Conociendo las areas* A, B, *de dos polígonos regulares, uno inscrito y otro circunscrito, del mismo número* n *de lados* [AB y MN son los lados], pueden siempre obtenerse *las areas* A′, B′, *de otros dos polígonos regulares, uno inscrito y otro circunscrito, de* duplo *número de lados.*

Ya vimos (n.° 166.) que AI y mn son los lados de estos dos polígonos.

Observemos ahora que, segun se ve en la *figura*, tenemos las relaciones siguientes:

$$A = 2n.OAK,\ B = 2n.OMI,\ A' = 2n.OAI,\ B' = 2n.OAmI;$$

de donde se sigue que las razones entre las areas A, B; A', B', comparadas de dos en dos, son las mismas que existen entre las areas de los triángulos OAK, OMI, OAI, y del cuadrilátero OAmI; asi pues, todo se reduce á determinar las razones que existen entre estas cuatro figuras.

Esto supuesto, tenemos primero, comparando los tres triángulos OMI, OAI, OAK, y observando que AK es paralela á MI,

$$OMI : OAI :: OAI : OAK \quad (\text{n.° } 219., \textit{escol.}),$$

ó sustituyendo los polígonos correspondientes en lugar de los triángulos,

$$B : A' :: A' : A;$$

luego (1) $$A' = \sqrt{A.B}.$$

En segundo lugar, como en el triángulo OMI, la recta Om divide el ángulo O en dos partes iguales, se tiene la proporcion

$$Mm : mI :: OM : OI \quad (\text{n.° } 202.).$$

Ahora bien, los dos triángulos OMm, OmI, que tienen la misma altura OI, dan

$$OMm : OmI :: Mm : mI \quad (\text{n.° } 215.);$$

y los otros dos triángulos OAI, OAK, que tienen tambien la misma altura AK, dan á su vez

$$OAI : OAK :: OI : OK :: OM : OA :: OM : OI;$$

resulta pues $$OMm : OmI :: OAI : OAK,$$

y por consiguiente,

$$OMm + OmI : OmI :: OAI + OAK : OAK,$$

ó, duplicando los consecuentes, y observando que

$$\mathrm{OM}m + \mathrm{O}m\mathrm{I} = \mathrm{OMI}, \quad \text{y} \quad 2\mathrm{O}m\mathrm{I} = \mathrm{OA}m\mathrm{I},$$

tendremos $\quad \mathrm{OMI} : \mathrm{OA}m\mathrm{I} :: \mathrm{OAI} + \mathrm{OAK} : 2\mathrm{OAK}.$

Sustituyendo finalmente, con arreglo á la observacion arriba hecha, en vez de los triángulos OMI, OAI, OAK, y del cuadrilátero OAmI, los polígonos á que pertenecen, se obtiene

$$B : B' :: A + A' : 2A.$$

Luego $\quad B' = \dfrac{2A.B}{A + A'} \quad$ ó $\quad B' = \dfrac{2A.B}{A + \sqrt{A.B}};$

L. C. D. D.

Escolio. Considerando las dos fórmulas que acabamos de obtener, es facil ver que $A' > A$ y $B' < B$.

pues $A < B$

En efecto, tenemos primero $\sqrt{A.B} > \sqrt{A.A} > \sqrt{A^2} > A$; luego $A' > A$.

En segundo lugar $\dfrac{2A.B}{A + A'}$, puede ponerse en la forma $B \times \dfrac{2A}{A + A'}$, y es menor que B, pues $\dfrac{2A}{A + A'}$ es $< \dfrac{2A}{2A}$, y y por lo tanto < 1.

Asi pues, — *Las areas de los polígonos regulares inscritos* á una misma circunferencia de círculo, *van aumentando;* — y, por el contrario, — *La de los polígonos circunscritos van disminuyendo, á medida que se va duplicando el número de sus lados.*

Lo cual tambien se conoce facilmente con solo mirar la figura. — Pronto nos será muy útil esta observacion.

Valuacion de los lados y de las areas de los polígonos regulares de especie determinada.

Teorema V. (*Fig.* 158.) Fig. 158.

N.° 237. *El lado* AB *del exágono regular inscrito es igual al radio.*

Tírense los radios OA, OB; el ángulo O del triángulo OAB vale $\frac{4}{6}$ ó $\frac{2}{3}$ de un *ángulo recto* (n.° 86.); quedan pues para los otros dos ángulos, $2-\frac{2}{3}$ ó $\frac{4}{3}$ de un *ángulo recto*; y como tenemos $OA=OB$, resulta *ángulo* $OAB=$ *ángulo* $OBA=\frac{2}{3}$; luego el triángulo OAB es *equilátero*, y da

$$AB=OA=OB=R;$$

L. C. D. D.

Corolario 1.° *El lado* AC *del triángulo equilátero inscrito guarda con el radio la razon de* $\sqrt{3}:1$.

Si en la espresion (1) del *número* 235., hacemos $a=R$,

resulta $$AC=\frac{R}{R}.\sqrt{3R^2}=R\sqrt{3};$$

de donde $$AC:R::\sqrt{3}:1.$$

Corolario 2.° El lado del triángulo equilátero *circunscrito* es *doble* del lado del triángulo equilátero inscrito.

Basta, para hacerlo ver, sustituir en el valor de MN (n.° 235.), en vez de a, $R\sqrt{3}$; lo cual da

$$MN=\frac{2R.\sqrt{3}.R}{\sqrt{4R^2-3R^2}}=2R.\sqrt{3}.$$

Advert. La *altura* EL del primer triángulo es igual á $\frac{3}{2}R$: porque EL es igual á $EO+OL=R+\frac{1}{2}R$ (n.° 76.), á causa de ser un rombo la figura OABC; luego $EL=\frac{3}{2}R$.

Luego *la altura* del segundo *es igual* á 3R (n.° 220.).

Corolario 3.° Si en la espresion (2) del *número* 235., se hace $a=R$, lo cual da

$$AI=\sqrt{2R^2-R\sqrt{3R^2}}=R\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

se obtiene *el lado del dodecágono regular inscrito* (n.° 37.).

Corolario 4.° En fin, hágase en las espresiones (2) del *número* 235., $a=R$, y se hallarán los siguientes valores para el *radio* y para el *lado del exágono regular circunscrito*,

$$OM = \frac{2R^2}{\sqrt{3R^2}} = \frac{2}{3}R\sqrt{3}, \quad y \quad MN = \frac{2}{3}R.\sqrt{3}.$$

Escolio. Ahora, por medio de la fórmula general del *número* 233.,

$$A = \frac{na.\sqrt{4R^2 - a^2}}{4},$$

pueden calcularse las areas de estos diferentes polígonos.

Asi, por ejemplo, si hacemos $n = 6$, $a = R$, obtendremos

$$A = \frac{6R\sqrt{3R^2}}{4} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3},$$

espresion del *area* del *exágono regular inscrito.*

Igualmente, haciendo $n = 3$, $a = R\sqrt{3}$, se halla

$$A = \frac{3R\sqrt{3}.\sqrt{R^2}}{4} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3};$$

y asi sucesivamente.

Teorema VI. (*Fig.* 159.) Fig. 159.

N.° 238. *El lado del cuadrado inscrito está con el radio en la razon de* $\sqrt{2}$ *á* 1.

Tírense los dos diámetros, AB, CD, perpendiculares entre sí, y tírense las cuerdas AC, CB, BD, DA. La figura ACBD es evidentemente un cuadrado; y se tiene

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 = 2R^2;$$

de donde $AC = R\sqrt{2}$, y $AC : R :: \sqrt{2} : 1$.

Escolio. Tirando por los puntos A, D, B, C, tangentes, se forma el cuadrado circunscrito; y se tiene

$$AN = AB = 2R.$$

Luego, — *El lado del cuadrado circunscrito es igual al diámetro del círculo.*

Las areas de estos dos polígonos se espresan respectivamente por $2R^2$ y $4R^2$.

Fig. 160.

TEOREMA VII. (*Fig.* 160.)

N.° 239. *El lado* $\overline{AB}$ *del decágono regular inscrito es igual al segmento mayor del radio dividido en media y estrema razon* (n.° 228., *escol.*)

Tírense los radios OA, OB. — El ángulo O del triángulo OAB es igual á $\frac{4}{10}$ ó $\frac{2}{5}$ de un *ángulo recto* (n.° 86.); queda pues para los otros dos, $2-\frac{2}{5}$ ú $\frac{8}{5}$ de ángulo recto; y como $OA=OB$, resulta que $OAB=OBA=\frac{4}{5}$.

Asi pues, cada uno de los ángulos de la base del triángulo OAB, es duplo del ángulo del vértice.

Esto supuesto, tiremos la bisectriz BL del ángulo OBA; y tendremos la proporcion $AL:LO::AB:OB$ (n.° 20.).

Pero, á causa de ser

$$LBO=LBA=LOB=\frac{2}{5},\text{ de donde } ALB=2LOB=\frac{4}{5},$$

lòs dos triángulos OLB, ALB, son tambien isósceles, y dan

$$OL=LB=AB;$$

y como se tenia $\qquad OB=OA,$

la proporcion se convierte en esta otra

$$AL:OL::OL:OA.$$

Donde se ve que el punto L divide al radio OA en media y estrema razon, y que el segmento mayor OL es igual á AB, lado del decágono regular;

L. C. D. D.

Para obtener el *valor numérico* de este lado, es necesario recurrir á la *fig.* 154, en la cual supondremos que PB representa el radio R de la circunferencia, y PA″ el lado buscado AB. Fig. 154.

En virtud del escolio del n.º 228., el triángulo rectángulo PBO da

$$OP=\sqrt{OB^2+PB^2}\text{; de donde } OP-OA'=\sqrt{OB^2+PB^2}-OA';$$

y, en virtud de las construcciones indicadas en el *número citado*, se tiene

$$PB=AA', \quad PA''=PA'=OP-OA', \quad OB=\frac{1}{2}AA'=\frac{1}{2}PB;$$

luego la igualdad anterior se convierte en

$$PA''=\sqrt{\frac{1}{4}PB^2+PB^2}-\frac{1}{2}PB, =\frac{1}{2}PB\,(\sqrt{5}-1),$$

ó, sustituyendo por PB y PA″ sus valores R y AB,

$$AB=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,R. \text{ (*)}$$

Escolio. Por medio de las espresiones obtenidas en el *número* 235., se podrian deducir del valor precedente los valores de los lados de los polígonos de 5, 20, 40,... lados, y por

---

(*) Esta cuestion, tratada algebráicamente, da lugar á una ecuacion de segundo grado, que tiene por una de sus raices el resultado que se acaba de obtener.

Designemos por R el radio del círculo, y por x la parte del mismo que ha de ser *media proporcional*.—Tendremos la proporcion

$$R : x :: x : R-x,$$

de donde se deduce $\quad x^2+Rx=R^2,$

ó, resolviendo esta ecuacion, $\quad x=\frac{-R\pm\sqrt{R^2+4R^2}}{2}=\frac{R}{2}(-1\pm\sqrt{5}).$

El valor que corresponde al signo superior es $x=\frac{R}{2}(-1+\sqrt{5})$; y es el único que responde directamente á la cuestion, pues el otro, ademas de ser negativo, es numéricamente mayor que R.

consiguiente los valores de los polígonos circunscritos correspondientes.

Pero existe una relacion muy notable entre el radio y los lados del decágono y del pentágono.

Fig. 160. Consideremos los lados AB, BC (*fig.* 160), del decágono, y el lado AC del pentágono. Tiremos los radios OB, OC, y la bisectriz OK del ángulo BOC; despues juntemos el punto B con el I en que dicha bisectriz encuentra al lado AC.

Esto supuesto, los dos triángulos isósceles BIC, ABC, son semejantes, por tener el ángulo C comun, y los ángulos CAB, IBC, iguales al ángulo C; luego darán la proporcion

$$AC : BC :: BC : IC; \quad \text{de donde} \quad AC \times IC = BC^2.$$

Igualmente, los dos triángulos AOC, AOI, son semejantes: porque tienen el ángulo A comun, y ademas los ángulos OCA, AOI, equivalentes á $\frac{3}{5}$ de *un recto*, el primero por ser ángulo de la base de un pentágono regular (n.º 133.); el segundo por construccion $\left[\text{pues } AOK = AOB + \frac{1}{2} OBC = \frac{3}{5}\right]$; la semejanza de esos triángulos nos da la proporcion

$$AC : OA :: OA : AI; \quad \text{de donde} \quad AC \times AI = OA^2.$$

Súmense ahora, miembro á miembro, las dos igualdades que acaban de obtenerse, y resultará

$$AC \times CI + AC \times AI, = BC^2 + OA^2,$$

ó, reduciendo, $\quad AC^2 = BC^2 + OA^2;$

lo cual dice que—*El lado del pentágono regular inscrito es igual á la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son el radio y el lado del decágono regular inscrito.*

Teorema VIII.

N.º 240. *El lado del pentadecágono regular inscrito es la cuerda de la diferencia de los arcos subtendidos respecti-*

vamente por el lado del exágono y por el lado del decágono.

Porque se tiene $$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{10-6}{60}=\frac{1}{15};$$

lo cual manifiesta tambien que—*La diferencia de los arcos subtendidos por los lados del exágono y del decágono, es igual á la décima-quinta parte de la circunferencia entera.*

COROLARIO. Inscrito el *pentadecágono*, pueden facilmente formarse los polígonos de 30, 60,... lados.

Para los *valores numéricos* de sus lados sería necesario buscar primero el del pentadecágono por medio de la fórmula (n.° 231.) que da la cuerda de la diferencia de dos arcos cuando se conocen las cuerdas de estos; y despues hacer uso de las fórmulas del *número* 235.

ESCOLIO GENERAL. De lo acabado de decir en los cuatro últimos *números*, y de los principios establecidos en este párrafo, se infiere que existen y se conocen

1.° Métodos geométricos [es decir, métodos en que solo se usan la regla y el compas] para construir los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 3, 6, 12, 24, 48,..., de 4, 8, 16, 32,..., de 5, 10, 20, 40,..., y de 15, 30, 60,... lados;

2.° Métodos aritméticos para calcular los lados, y por lo tanto las areas de todos esos polígonos, si no exactamente, porque casi siempre resultan cantidades inconmensurables, al menos con toda la aproximacion apetecible.

§. III. *Medida del círculo bajo el doble aspecto de su estension lineal y de su estension superficial.*

INTRODUCCION.

N.° 241. Para dar ante todo una idea clara de la *longitud* ó *estension lineal* (n.° 3.°) de una circunferencia, concibamos que, empezando en cualquiera de sus puntos, se va *desarrollando* sobre una recta indefinida. El número que entonces espresa cuantas *unidades lineales* contiene la circunferencia *rectificada* en esa forma, es la *razon* que existe *entre la circunferencia y la unidad lineal*, y espresa por consiguiente su *longitud.*

N.° 242. Por poco que se reflexione sobre la naturaleza y la forma de los polígonos regulares, se observa cierta analogía entre ellos y la línea circular.—Para hacerlo mas sensible, consideremos primero uno de los polígonos mas sencillos en cuanto al número de sus lados, que es el *cuadrado*; despues, dividiendo con la imaginacion en dos partes iguales cada uno de sus lados, representémonos las ocho partes iguales que resultan, dispuestas en un *octógono* regular. —Dividamos del mismo modo los lados del octógono, y formemos un polígono regular de *diez y seis* lados; y asi sucesivamente, váyase doblando cada vez el número de lados, cuya longitud se hace por lo tanto respectivamente la mitad menor. —Es claro que al cabo de una serie indefinida de subdivisiones, los lados de los polígonos obtenidos vendrán á ser inapreciables; y entonces, no difiriendo sensiblemente la longitud de las apotemas de la de los radios, habrá tomado el polígono la forma de una circunferencia de círculo.

Los diferentes polígonos que acaban de formarse, se llaman polígonos *isoperímetros*; y la circunferencia de círculo á que hemos ido á parar, y que puede llamarse su *última forma ó estado*, es tambien *isoperímetra* respecto los mismos polígonos.

N.° 243. Aun podemos por otras consideraciones establecer una analogía mas completa entre el círculo y los polígonos regulares:

Ya se demostró (n.° 236.) que si tenemos inscritos á una misma circunferencia una serie de polígonos regulares cuyo número de lados vaya haciéndose cada vez duplo del anterior, tenemos tambien otra serie de polígonos circunscritos, semejantes á los primeros, las *areas* de estos *crecen* con el número de sus lados, mientras las de los segundos *menguan* en la misma circunstancia.

Fig. 107. Bastantemente lo indica la *figura* 107, que al mismo tiempo manifiesta que el *area del círculo* OA es siempre *mayor* que la de cualquier polígono *inscrito*, y *menor* que la de cualquiera *circunscrito*.

Digo ahora que lo mismo sucede con los perímetros de los polígonos respecto de la circunferencia CA.—Para probarlo
Fig. 107. basta evidentemente considerar la porcion de la *figura* 107, que corresponde al arco AB, pues el mismo raciocinio podria repetirse respecto de las porciones correspondientes á los demas arcos BC, CD,...

Fig. 161. Sea pues el arco AB (*fig.* 161), dividido en 2, 4, 8,...

partes iguales; y tírense las cuerdas de los arcos parciales.

Evidentemente se tiene (n.° 38.),

$$\text{cuerda } AB < AI + IB < AL + LI + IK + KB < \ldots < \text{arco } AB.$$

Y con esto solo se ve que — *Los perímetros de los polígonos regulares inscritos van creciendo* [en longitud] *á medida que crece el número de sus lados;* — y ademas que — *La circunferencia* OA *es mayor que cada uno de ellos.*

Sean ahora AM y BM (*fig.* 162) dos semi-lados de un primer polígono circunscrito [correspondientes al arco AB de la *figura* 107]; mn y Am, Bn, un lado y dos semi-lados del polígono regular de *duplo* número de ellos (*Véase* el n.° 166.). Fig. 162. Fig. 107.

Tenemos $$mM + Mn > mn,$$

de donde, añadiendo á los dos miembros la cantidad $Am + nB$, resulta

$$Am + mM + Mn + nB, \text{ ó } AM + MB > Am + mn + nB.$$

Luego — *Los perímetros de los polígonos regulares circunscritos van disminuyendo, á medida que aumenta el número de sus lados.*

Se ve ademas que la línea quebrada correspondiente á cada porcion de polígono regular, y terminada en los estremos del arco AB, se hace mas y mas pequeña á medida que se *estrecha el espacio* comprendido entre ella y el arco dicho, es decir, á medida que se aproxima la línea á confundirse con el arco; lo cual manifiesta que este es menor que cualquiera de aquellas. — Por consiguiente, la circunferencia entera es *menor* que cada uno de los perímetros de los polígonos regulares circunscritos.

N.° 244. Esto supuesto, se da en Matemáticas el nombre de LÍMITE á toda *cantidad constante y determinada hácia la cual converge* sin cesar y cuanto se quiere una cantidad *variable* por su naturaleza, ya *aumentando* [en cuyo caso el límite se llama *superior*], ya *disminuyendo* [y entonces se llama *inferior*] (*Véase* lo dicho en el n.° 117.). — Podemos pues concluir de todo lo que precede,

1.° que — *El area del círculo es el límite* SUPERIOR *de las areas de los polígonos regulares inscritos, y el límite* IN-

FERIOR *de las areas de los polígonos regulares circunscritos;*

2.° que—*La circunferencia de círculo es el límite superior de los perímetros de los primeros, y el límite inferior de los perímetros de los segundos* (*).

(*) Esta doble proposicion supone, á la verdad, que los polígonos inscritos y ciecunscritos puedan acercarse *indefinidamente* al círculo, ó lo que es lo mismo, que siempre puedan obtenerse dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito, tales que la *diferencia* entre el area ó el perímetro de cada uno de ellos, y el area del círculo ó la longitud de la circunferencia sea *numéricamente menor* que cualquier número dádo: esto se demuestra por el siguiente cálculo:

Sean A, p, r, el area, el perímetro, y el apotema de un polígono regular inscrito, y B, P, R, el area, perímetro, y radio del polígono circunscrito semejante [R es *constante* para todos los polígonos circunscritos].

Tenemos (n.° 233.) las igualdades

$$B=\tfrac{1}{2}P.R,\quad A=\tfrac{1}{2}p.r;$$

de donde $$B-A=\tfrac{1}{2}P.R-\tfrac{1}{2}p.r.$$

Pero siendo semejantes los dos polígonos, dan (n.° 234.) la proporcion

$$P:p::R:r,\quad \text{de donde sale}\quad p=\frac{r}{R}.P;$$

luego sustituyendo este valor de p en el de $(B-A)$, tendremos

$$B-A=\tfrac{1}{2}P.R-\tfrac{1}{2}\frac{P}{R}.r=\frac{P(R^2-r^2)}{2R}=\frac{P(R+r)}{2R}.(R-r).$$

Ahora bien, P, $R+r$, y $2R$, son, por su naturaleza, números esencialmente *finitos*; mientras el factor $(R-r)$, que es la sagita (n.° 110., *escol.* 3.°), puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada.

[Facilmente se conoce en la figura, que la *sagita es menor que la mitad del arco* que le corresponde;—y pudiendo este arco llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, *á fortiori*,—La sagita, &c.].

Luego, en virtud del principio demostrado en Aritmética, el producto $\frac{P(R+r)}{2R}.(R-r)$, ó $B-A$, puede llegar á ser menor que cualquier número dado.

Respecto de los perímetros, como se tiene la proporcion

$$P:p::R:r,\quad \text{se deduce de ella}\quad P-p:P::R-r:R;$$

de donde $$P-p=\frac{P}{R}(R-r);$$

N.° 245. Las consideraciones espuestas en los *números* 242. y 243., nos conducen tambien á decir que—*El círculo es*, en cierto modo, *un polígono regular de infinito número de lados infinitamente pequeños*;—cuyos lados se llaman entonces *elementos* de la curva.

Y esta nueva definicion del círculo, si bien no parece muy rigorosa al pronto, tiene la ventaja de proporcionar mas sencillez y precision en las demostraciones.

Segun el orden lógico de las teorías, deberiamos tratar ahora de la *medida de las circunferencias de círculo*, para pasar despues á la determinacion de las areas circulares. Pero ofreciendo la primer cuestion algunas dificultades en su esposicion, por su índole particular, y no siendo en el fondo mas que una serie de *problemas numéricos*, irá mejor colocada al fin de este párrafo, cuya inmediata continuacion ha de ser el capítulo 3.°, que comprende los problemas.

Determinacion de las áreas circulares.

TEOREMA I.

N.° 246. *El area del círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

En efecto, consideremos una serie de polígonos regulares circunscritos, cuyo número de lados se vaya duplicando. Sus areas tienen por medidas respectivas (n.° 233.) la mitad del producto de cada perímetro multiplicado por el radio [cuyo radio es constante para todos los polígonos]; luego tambien el *area del círculo*, que es el *límite* de ellos (n.° 244.), tiene por espresion la mitad del producto de la circunferencia [*límite* de los perímetros], multiplicados por el radio.

DE OTRO MODO:—Todo polígono regular tiene por medi-

---

y se prueba como antes que P—*p* puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada.

Ahora bien, el círculo está siempre comprendido entre los dos polígonos, tanto respecto de su *estension lineal*, como respecto de su *estension superficial*.

Luego, con mayor razon,—*La diferencia entre el area ó la circunferencia del círculo y el area ó el perímetro de un polígono* inscrito ó circunscrito, *puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada;*

L. C. D. D.

da la mitad del producto del perímetro por el radio, y como el círculo no es mas que un polígono regular de infinito número de lados (n.° 245.), debe tener la misma medida.— *Luego*, &c.

ESCOLIO 1.° Sean R, C, y S, el radio, la circunferencia y el area de un circulo cualquiera.—Tendremos

$$S = \tfrac{1}{2}\, C.R.$$

[S es un número *abstracto* que espresa la razon de la superficie del círculo á la unidad de superficie, y C, R, son las razones de la circunferencia y el radio á la unidad lineal (*número* 241.).]

ESCOLIO 2.° Puede decirse tambien que —*El area de un círculo es igual á la de un triángulo que tenga por base la circunferencia rectificada* (n.° 241.), *y por altura el radio del círculo.*—Lo cual es una consecuencia evidente de la espresion que acabamos de dar por area del círculo, y de la que dimos (n.° 215.) por area del triángulo.

TEOREMA II.

N.° 247. 1.°—*En dos círculos cualesquiera, las circunferencias* [C y C′] *son proporcionales á los radios* [R y R′] *ó á los diámetros* [2R y 2R′];—2.°—*Las areas* [S y S′] *son proporcionales á los cuadrados de los radios.*

1.° Concibamos circunscritos á la circunferencia C (*número* 243.) una serie de polígonos regulares cuyo número de lados vaya duplicándose, y otra serie de polígonos con la misma condicion circunscritos á la circunferencia C′, y semejantes á los primeros: designemos por R, R′, las apotemas constantes de estas dos series de polígonos, por P, P′, los perímetros de dos polígonos semejantes tomados á voluntad uno de cada serie: y esto supuesto, tendremos (n.° 234.) la proporcion

$$P : P' :: R : R',$$

que es aplicable á dos cualesquiera de los antedichos polígonos semejantes; luego tambien deberá ser cierta respecto de los *límites* C y C′ de sus perímetros: lo cual da

$$C : C' :: R : R', \quad ó \quad :: 2R : 2R';$$

2.° Multiplíquese esta última proporcion por la proporcion evidente $\frac{1}{2}R : \frac{1}{2}R' :: R : R'$, ó $:: 2R : 2R'$;

y se obtendrá $C \times \frac{1}{2}R : C' \times \frac{1}{2}R' :: R^2 : R'^2$, ó $:: 4R^2 : 4R'^2$.

Pero como $C \times \frac{1}{2}R = S$, y $C' \times \frac{1}{2}R' = S'$;

resulta finalmente, $S : S' :: R^2 : R'^2$, ó $:: 4R^2 : 4R'^2$;

L. C. D. D.

De otro modo: — Pudiéndose considerar los círculos como unos polígonos de infinito número de lados, se les pueden aplicar las dos propiedades del *n.°* 234.; *luego*, &c., &c.

N.° 248. Corolario. — La proporcion

$$C : C' :: 2R : 2R'$$

puede ponerse bajo la forma

$$C : 2R :: C' : 2R',$$

y como, dado un número cualquiera de circunferencias, tendriamos $C : 2R :: C' : 2R' :: C'' : 2R'' :: C''' : 2R''' :: \ldots$,

podemos concluir que

La relacion de la circunferencia al diámetro es un número constante, — cualquiera que sea el círculo que se considere.

N.° 249. Escolio 1.° — Se designa comunmente por π ese número constante que hace gran papel en todas las partes de las *Matemáticas.* — Su determinacion completará este párrafo.

Desde luego puede probarse que *está comprendido entre* 3 *y* 4; porque, segun se vió en el *n.°* 243., — *Toda circunferencia* C *es mayor que el perímetro del exágono incrito, y menor que el perímetro del cuadrado circunscrito.*

Ahora bien, designando por R al radio, sabemos que el perímetro del primero es 6R, y 8R el del segundo (n.° 237.); lo cual da

$$C > 6R, \quad y \quad C < 8R,$$

de donde, dividiendo por 2R, y sustituyendo π en vez de $\frac{C}{2R}$, resulta

$$\pi > 3, \quad y \quad \pi < 4;$$

luego el número π está comprendido entre 3 y 4;

L. C. D. D.

N.º 250. Escolio 2.º—Sean R, C, y S, el radio, la circunferencia, y el area de un círculo cualquiera.

La proporcion $\pi : 1 :: C : 2R$ da $C = 2\pi R$,

de donde, multiplicando por $\frac{1}{2}R$, resulta

$$C \times \tfrac{1}{2}R = S = \pi R^2;$$

lo cual demuestra que, para obtener *la longitud de la circunferencia*, es necesario *multiplicar su radio* [valuado en unidades lineales] *por el número constante* π; — y que para obtener *el area* del mismo círculo, se debe *multiplicar por* π *el cuadrado del mismo radio.*

Fig. 163. Teorema III. (*Fig.* 163.)

N.º 251. El area de un sector circular OAB es *igual á la mitad del producto del arco* AB [rectificado (n.º 241.), que se llama su base] *por el radio* OA.

En efecto, resulta evidentemente de la definicion del sector circular (n.º 14.), que dos sectores cualesquiera de un mismo círculo son proporcionales á los ángulos, y por consiguiente (n.º 118.) á los arcos que les corresponden.

Asi pues, comparando el sector OAB con el sector OAC que corresponde al ángulo *recto* AOC, tendremos la proporcion

sector OAB : *sector* OAC :: *arco* AB : *arco* AC,

ó, multiplicando los dos consecuentes por 4, y designando por C, S, la circunferencia y el area del círculo, tendrémos

sector OAB : S :: *arco* AB : C.

Multiplicando ahora por $\frac{1}{2}$R los dos últimos términos, resulta $\quad$ *sector* OAB : S :: *arco* $AB \times \frac{1}{2}R : C \times \frac{1}{2}R$;

pero sabemos que $\quad S = C \times \frac{1}{2}R$ (n.° 246.);

luego tambien habrá de ser

$$sector\ OAB = arco\ AB \times \tfrac{1}{2}R;$$

L. C. D. D.

Advert. Puede tambien decirse que — *El area de un sector es igual á la de un triángulo que tiene por base el arco* [rectificado] *y por altura el radio del círculo.* — (*Véase* el *escolio* 2.° del n.° 246.)

COROLARIO. *El segmento circular* ANB (n.° 14.) *tiene por medida la mitad del producto del radio* OA *por la diferencia entre el arco* AB *y la mitad de la cuerda que subtende el arco duplo de* AB.

Porque tenemos

$$segmento\ ANB = sector\ OANB - triángulo\ OAB;$$

ahora bien, *sector* OANB $= \frac{1}{2}$ *arco* $AB \times OA$, segun acabamos de ver; y el triángulo OAB, si en él tomamos por base el lado AO, tendrá por altura la perpendicular BD, bajada desde el punto B, y dará por lo tanto

$$triángulo\ OAB = \tfrac{1}{2}BD \times OA \quad (\text{n.° } 215.).$$

Por consiguiente, sustituyendo, tendremos

$$segmento\ ANB = \tfrac{1}{2}OA\,(arco\ AB - BD);$$

pero BD es evidentemente la mitad (n.° 105.) de la cuerda AB que subtende el arco BAB', duplo de BA. *Luego*, &c.

N.° 252. *Dos sectores son semejantes en círculos de radios diferentes, cuando corresponden á un mismo ángulo en el centro.*

TEOREMA IV. (*Fig.* 164.) Fig. 164.

Las areas de dos sectores semejantes, OAB, OA'B', *son directamente proporcionales á los cuadrados de los radios ó á los cuadrados de los arcos que les sirven de base.*

Tenemos en efecto

$$\textit{sector}\,\mathrm{OAB} : \textit{sector}\,\mathrm{OA'B'} :: \textit{arco}\,\mathrm{AB} \times \tfrac{1}{2}\mathrm{OA} : \textit{arco}\,\mathrm{A'B'} \times \tfrac{1}{2}\mathrm{OA'};$$

pero hallándose evidentemente los arcos AB, A'B', en la misma razon que las circunferencias á que pertenecen, y estas en la razon de los radios OA, OA' (n.º 247.), resulta

$$\textit{arco}\,\mathrm{AB} : \textit{arco}\,\mathrm{A'B'} :: \mathrm{OA} : \mathrm{O'A'},$$

de donde $\textit{arco}\,\mathrm{AB} \times \tfrac{1}{2}\,\mathrm{OA} : \textit{arco}\,\mathrm{A'B'} \times \tfrac{1}{2}\mathrm{OA'} :: \mathrm{OA}^2 : \mathrm{OA'}^2.$

Luego tambien

$$\textit{sector}\,\mathrm{OAB} : \textit{sector}\,\mathrm{OA'B'} :: \mathrm{OA}^2 : \mathrm{OA'}^2,$$

y por consiguiente,

$$\textit{sector}\,\mathrm{OAB} : \textit{sector}\,\mathrm{OA'B'} :: (\textit{arco}\,\mathrm{AB})^2 : (\textit{arco}\,\mathrm{A'B'})^2;$$

L. C. D. D.

Escolio 1.º La diferencia AA' BB' entre los dos sectores semejantes OAB, OA'B', se llama *trapecio circular*; de cuya area puede obtenerse una espresion bastante sencilla.

Para esto, tiremos por los puntos B, B', las tangentes indefinidas BL, B'L', y concibamos que á partir del punto B, se haya *desarrollado* el arco BA sobre la tangente BL, resultando el arco rectificado igual á BK; hecho esto, tírese la OK, que encuentra á B'L' en K': digo ante todo que B'K' representa al arco B'A' tambien *rectificado.*

Porque los triángulos semejantes OBK, OB'K', y los sectores OAB, OA'B', dan las dos proporciones:

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OB'} :: \mathrm{BK} : \mathrm{B'K'},$$

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OB'} :: \textit{arco}\,\mathrm{BA} : \textit{arco}\,\mathrm{B'A'},$$

de donde $\mathrm{BK} : \mathrm{B'K'} :: \textit{arco}\,\mathrm{BA} : \textit{arco}\,\mathrm{B'A'};$

pero $\mathrm{BK} = \textit{arco}\,\mathrm{BA}$ por construccion; luego tambien será $\mathrm{B'K'} = \textit{arco}\,\mathrm{B'A'}$.

Esto supuesto, los dos sectores circulares OAB, OA'B', son equivalentes á los triángulos OBK, OB'K' (n.º 251., *adv.*), y por consiguiente el trapecio circular AA'BB' equivale tambien al trapecio rectilíneo KBB'K'.

Pero este tiene por medida $\frac{BK + B'K'}{2} \times BB'$ (n.° 215. corol. 2.°); luego

$$\textit{trapecio}\ AA'BB' = \frac{\textit{arco}\ AB + \textit{arco}\ A'B'}{2} \times BB';$$

lo cual demuestra que — *El area de un trapecio circular es igual al producto de la semi-suma de sus bases por la diferencia de los radios.*

Advert. Sería ademas facil de probar, como arriba se hizo, que la semi-suma de las bases [ó el *término medio diferencial* entre ellas] es igual al arco A''B'' concéntrico de AB y A'B', y que pasa por el punto medio de BB'.

ESCOLIO 2.° La *corona circular ó ánulo*, es decir, el espacio comprendido entre dos circunferencias concéntricas OB, OB' (*fig.* 163), no es mas que un caso particular del Fig. 163.
trapecio circular; y por consiguiente su area tiene por espresion: *el producto de la circunferencia* OB'', *término medio diferencial* entre las dos circunferencias dadas, *multiplicada por* BB', *diferencia de los radios de estas.*

Puede tambien obtenerse otra espresion de este area:

Sean R y R' los radios de las dos circunferencias concéntricas. Tenemos

$$\textit{ánulo} = \textit{círculo}\ R - \textit{círculo}\ R',$$

ó bien $\quad \textit{ánulo} = \pi R^2 - \pi R'^2 = \pi(R^2 - R'^2)$ (n.° 250.);

pero como $\quad \pi(R^2 - R'^2) = \pi(R + R')(R - R');$

y si se forma la proporcion

$$R + R' : R'' :: R'' : R - R',$$

resulta $\quad R''^2 = (R + R')(R - R'),$

y de aquí, por consiguiente,

$$\textit{ánulo ó corona} = \pi R''^2;$$

luego — *El area de la corona circular es igual á la de un* *círculo cuyo radio es* MEDIO PROPORCIONAL [por cociente] *entre la suma y la diferencia de los radios de las dos circunferencias concéntricas* que la forman; — ó tambien — *al area de un círculo que tenga por diámetro una cuerda* II′ *de la circunferencia mayor* OB, *tirada tangente á la menor* OB′ (n.° 228, *escol.* 1.°).

Sería cosa muy facil probar la concordancia de estas dos espresiones con la primera obtenida.

OBSERVACION *sobre las líneas quebradas regulares, por otro nombre, porciones regulares de polígonos.*

Fig. 165. N.° 253. Sea AB (*fig.* 165) un arco de círculo terminado en dos radios OA, OB, y concibámosle dividido en un número cualquiera de partes iguales; tiremos las cuerdas AC, CD,..., de los arcos parciales, y obtendremos una línea quebrada ACD...B, llamada *regular*, que con los radios OA, OB, determinará una porcion de plano que llamaremos *sector poligonal* [por analogía con el sector circular], y añadiéndole ademas el epiteto de *regular*, porque goza de las principales propiedades de los polígonos regulares.

Desde luego, los lados AC, CD,..., son todos iguales (*número* 108.); ademas, los triángulos OAC, OCD,..., son iguales é isósceles; de donde se sigue que los ángulos en el centro, y los ángulos de las bases de todos ellos son *iguales*; en fin, tambien *son iguales las perpendiculares* bajadas desde el centro sobre los lados. — Luego el círculo descrito desde el punto O con un radio igual á una de las perpendiculares, será tangente á todos los lados del sector poligonal; y la porcion de circunferencia terminada en los radios OA, OB, podrá ser considerada como un arco de círculo inscrito al sector.

Teniendo cada triángulo por medida, como el OAC por ejemplo, el producto AC $\times \frac{1}{2}$ OI, podemos concluir que — *El area del sector poligonal es igual á la mitad del producto de su perímetro* [ó línea quebrada que le termina] *por su apotema*, es decir, por el radio del círculo inscrito, &c.

Mientras el arco AB sea una *parte alicuota* de la circunferencia OA, el sector poligonal será tambien una parte alicuota de un polígono regular inscrito á la circunferencia entera. Pero como la razon del arco á la circunferencia es enteramente arbitraria, podrá ser por acaso inconmensurable, y por lo tanto no puede decirse en general, que todo sector es siempre parte de un polígono regular.

Tiremos ahora, por los puntos medios G, K,..., de los arcos AC, CD,..., las tangentes A′C′, C′D′,..., prolongadas hasta sus mutuas intersecciones con los radios OA, OC,..., OB [puede probarse facilmente que dichas intersecciones se verifican siempre sobre los radios]: así obtendremos un nuevo *sector poligonal regular* que será semejante al primero por estar compuesto de triángulos OA′C′, OC′D′,..., semejantes á los triángulos OAC, OCD,...

Serán por consiguiente sus perímetros, ó las *líneas quebradas regulares que les corresponden, proporcionales á los radios del círculo inscrito y del círculo circunscrito;—y sus areas proporcionales á los cuadrados de los mismos radios.*

Sea B el area del sector poligonal circunscrito, P la línea quebrada correspondiente, R el radio del círculo dado; tendremos

$$B = P \times \tfrac{1}{2} R, \text{ y } \textit{sector circular}\ OAB = \textit{arco}\ AB \times \tfrac{1}{2} R:$$

pero este sector es evidentemente menor que el sector poligonal: luego, á causa del factor comun $\frac{1}{2}$ R, debe ser *arco* AB $<$ P.

Por otro lado, el *arco* AB *es* evidentemente *mayor que toda línea quebrada* que se le inscriba.

Luego el *arco* [rectificado] que sirve de base al sector circular, *está siempre comprendido*, en su valor numérico, *entre las dos líneas quebradas* inscrita y circunscrita.

En fin, por medio de raciocinios análogos á los del *número* 244. (*véase* la nota al pie del folio 192.), se probaria que

La diferencia entre el arco y una de las dos líneas quebradas, ó bien *entre el sector circular y uno de los sectores poligonales, puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada*, &c., &c.

Relacion de la circunferencia al diámetro.

Por medios que no pueden tener cabida en estos elementos, se demuestra que el número π es *inconmensurable*: pero existen métodos por cuyo medio puede calcularse con toda la aproximacion apetecible.

Nos reduciremos á esponer los tres métodos elementales principales.

Primer método.

N.° 254. El primer medio que se presenta al espíritu consiste en *valuar* en el círculo cuyo radio es 1, usando la fórmula (2) del n.° 235., *los lados de los polígonos regulares inscritos cuyo número de lados va cada vez siendo duplo del anterior*, empezando por un polígono regular de los que se saben inscribir y dan inmediatamente su lado.

Tomemos, por ejemplo, por punto de partida, el *exágono regular inscrito*, cuyo *lado* (n.° 237.) es *igual al radio*.

Basta hacer $a = R = 1$ en la fórmula arriba citada; lo cual da $a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ [designando a' el nuevo lado]; de aqui se deduce el perímetro del *dodecágono*, $12\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, y por consiguiente su relacion con el diámetro, que es

$$6\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Sustituyendo en la misma fórmula (2), en vez de R, 1, en vez de a, $\quad a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, y en vez de AI, a'', se tendrá que calcular

$$a'' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a'^2}};$$

luego la relacion del perímetro del polígono de 24 lados con su diámetro es $\quad 12\sqrt{2 - \sqrt{4 - a'^2}}$;

y asi *sucesivamente*.

Sabemos ademas (n.° 243.) que los perímetros de estos polígonos se acercan mas y mas á la circunferencia á medida que aumenta el número de lados: asi pues, las espresiones anteriores, que ordinariamente se valúan en *decimales*, darán valores cada vez mas aproximados del número π.

Pero, para apreciar el grado de aproximacion que da el valor relativo de cada polígono, conviene *calcular* por medio de la fórmula (3) del n.º 235., el *lado*, y por consiguiente, el *semi-perímetro* del polígono circunscrito semejante al inscrito en que nos detengamos; y entonces la *parte comun decimal* á las espresiones de los semi-perímetros del polígono inscrito y circunscrito, representa el valor de π con una aproximacion espresada por *una unidad del último orden decimal* de la parte comun.

Segundo método.

N.º 255. Se ha demostrado ya (n.º 250.) que el *area* del círculo del radiò R, es igual á πR^2.

Ahora bien, si hacemos $R = 1$ en esa fórmula, resulta reducida á π; lo cual prueba que

La razon entre la circunferencia y el diámetro es igual al area del círculo cuyo radio se toma por unidad.

Esto supuesto, tomemos por punto de partida el *cuadrado inscrito* y el *cuadrado circunscrito*, cuyas *areas* (n.º 238.) estan representadas respectivamente por 2 y por 4; y en las fórmulas del n.º 236.,

$$A' = \sqrt{A \cdot B}, \qquad B' = \frac{2A \cdot B}{A + A'}, \quad \text{hagamos } A = 2,\ B = 4;$$

obtendremos

$$A' = \sqrt{8}, \quad B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = \frac{8}{1 + \sqrt{2}} = 8(\sqrt{2} - 1)$$

[se ha quitado la irracionalidad del denominador multiplicando los dos términos del quebrado por $(1 - \sqrt{2})$]; y esas espresiones valuadas en decimales darán las areas del octógono inscrito y del circunscrito.

Sustituyendo en las mismas fórmulas, en lugar de A y B los valores de A′, B′, que acabamos de encontrar, se obtendrán las areas A″, B″, de los polígonos inscrito y circunscrito de diez y seis lados; — y asi sucesivamente.

No entraremos en mas pormenores sobre este método; solo observaremos para concluir que, si se valúa la diferencia

$(B'-A')$ por medio de la diferencia $(B-A)$, se encuentra

$$(B'-A') < \frac{1}{4}(B-A) \ (*);$$

lo cual prueba que, deteniéndonos en un *par* de polígonos determinados, uno inscrito y otro circunscrito, cometemos un *error menor que la cuarta parte* del que cometeriamos deteniéndonos en el par de polígonos precedente.

Tercer método.

N.° 256. En lugar de buscar el valor aproximado de una circunferencia, ó del area de un círculo cuyo radio sea igual á la unidad, se puede tambien, por el contrario, *Buscar el valor del radio de una circunferencia dada.* — Este método, que se llama de los *isoperímetros* (n.° 242.), es preferible á los

---

(*) Hé aqui el cálculo algebráico:

Tenemos $$B'-A' = \frac{2AB}{A+\sqrt{AB}} - \sqrt{AB} = \frac{AB - A\sqrt{AB}}{A+\sqrt{AB}},$$

ó bien $$B'-A' = \frac{B\sqrt{A} - A\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{AB}(\sqrt{B}-\sqrt{A})}{\sqrt{B}+\sqrt{A}},$$

ó, multiplicando los dos términos de esta espresion por $\sqrt{B}+\sqrt{A}$,

$$B'-A' = \frac{\sqrt{AB}}{(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2}(B-A).$$

Ahora bien, la desigualdad evidente $(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2 > 0$ da

$$B+A-2\sqrt{AB} > 0;$$

de donde, añadiendo á los dos miembros $4\sqrt{AB}$, resulta

$$(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2 > 4\sqrt{AB};$$

luego $\dfrac{(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2}{\sqrt{AB}} > 4$, y por consiguiente, $\dfrac{\sqrt{AB}}{(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2} > \dfrac{1}{4}$;

luego finalmente $B'-A' < \frac{1}{4}(B-A)$; *L. C. D. D.*

dos precedentes, por la sencillez de las fórmulas que en él se emplean.

Se funda en el siguiente lema:

Lema. (*Fig.* 166.) Fig. 166.

Dado el radio R, *y la apotema* r, *de un polígono regular, hallar el radio* R′, *y el apotema* r′, *de un polígono regular isoperímetro de duplo número de lados.*

Análisis y Síntesis. Construyamos el círculo circunscrito al polígono dado; y sean AB uno de sus lados, AOB su ángulo en el centro, $OA=R$ el radio, y $OP=r$ el apotema.

Esto supuesto, debiendo el ángulo en el centro del nuevo polígono la mitad del ángulo AOB (n.° 133.), si prolongamos la PO hasta encontrar en C con la circunferencia, y tiramos las cuerdas AC, BC, el ángulo ACB, mitad del AOB (n.° 122.), será el ángulo del nuevo polígono.

Igualmente, si tiramos la OA′ perpendicular á CA, y trazamos la A′B′ paralela á AB, tendremos (n.° 184., *escolio* 1.°) $A'B'=\frac{1}{2}AB$ por lado del nuevo polígono, y por consiguiente CA′, CP′, serán su radio y su apotema.

Todo pues se reduce á determinar $CA'=R'$, $CP'=r'$. Para esto los triángulos semejantes CAP, CA′P′, dan

$$CP'=\tfrac{1}{2}CP=\tfrac{1}{2}(CO+OP)=\tfrac{1}{2}(OA+OP);$$

luego 1.° $$r'=\tfrac{1}{2}(R+r).$$

En segundo lugar, el triángulo rectángulo OA′C da (n.° 203.)

$$CA'^2=CO\times CP'=OA\times CP';$$

luego 2.° $$R'=\sqrt{R\times r'};$$

y como ya conocemos á r', tenemos resuelto el problema.

Advert. Estas fórmulas son mucho mas sencillas que las de los otros dos métodos, porque no exigen mas que la determinacion de medios proporcionales alternativamente por diferencia $[\frac{1}{2}(R+r)]$, y por cociente $[\sqrt{R\times r'}]$

Escolio 1.° De la primera de estas dos fórmulas, á causa de ser $r<R$,

se deduce $$r' > \tfrac{1}{2}(r+r), \quad \text{ó} \quad r' > r;$$

y de la segunda, á causa de ser $r' < \frac{1}{2}(R+R)$, ó $r' < R$,

resulta $$R' < \sqrt{R \times R}, \quad \text{ó} \quad R' < R;$$

lo cual hace ver que el *radio* del segundo polígono es *menor* que el del primero; mientras que por el contrario, el *apotema* del segundo polígono es *mayor* que la del primero.—De donde se deduce que

La diferencia entre el radio y el apotema mengua indefinidamente á medida que crece el número de lados.

ESCOLIO 2.° Ademas, puede demostrarse, como en el número precedente, que la *diferencia* $(R'-r')$ *es menor que la cuarta parte de la diferencia* $(R-r)$.

En efecto, sea c el lado del polígono que se toma por punto de partida; $\frac{c}{2}$ es entonces el lado del polígono isoperímetro de duplo número de lados; y tendremos (n.° 235.) las dos relaciones

$$R^2 - r^2 = \frac{c^2}{4}, \quad R'^2 - r'^2 = \frac{c'^2}{4} = \frac{c^2}{16} = \frac{1}{4}(R^2 - r^2);$$

de donde se deduce

$$R' - r' = \frac{1}{4}(R-r) \times \frac{R+r}{R'+r'} = \frac{1}{4}(R-r)\frac{2r'}{R'+r'};$$

luego, á causa de ser $2r' < R'+r'$,

será $$R' - r' < \tfrac{1}{4}(R-r); \qquad L.\,C.\,D.\,D.$$

Esto prueba con qué rapidez disminuyen las diferencias $(R-r)$, $(R'-r')$, $(R''-r'')$. [*Véase* la nota de la página 223.]

N.° 257. *Aplicacion de las dos fórmulas precedentes al cálculo del número* π.

Observemos ante todo que, siendo toda circunferencia de círculo (n.° 244.) el *límite superior* de una serie de polígonos regulares cuyo número de lados va creciendo en progresion dupla, si empezamos por el cuadrado, por ejemplo, cuyo lado es igual á 1, y cuyo perímetro es por consiguiente igual á 4, y determinamos sucesivamente los radios R, R', R'',..., y las apotemas r, r', r'',..., del cuadrado y de los polígonos de 8, 16, 32,..., lados, *isoperímetros* con el cuadrado, llegaremos finalmente al radio $R^{(n)}$ y á la apotema $r^{(n)}$ de un polígono cuyo perímetro, siempre igual á 4, no diferirá sensiblemente (n.º 242.) de una circunferencia de círculo que tenga por radio, $R^{(n)}$. — De donde resulta que $\frac{4}{R^{(n)}}$ será un valor muy aproximado de la relacion de la circunferencia al radio; y, dividiendo por 2, se obtendrá con mucha aproximacion el número designado por π.

Resulta ademas de lo que se dijo en el *escolio* del n.º 256., que el número π está siempre comprendido entre los diferentes pares de espresiones, $\frac{2}{r}$ y $\frac{2}{R}$, $\frac{2}{r'}$ y $\frac{2}{R'}$, $\frac{2}{r''}$ y $\frac{2}{R''}$,....., lo cual permite determinar en cada operacion el grado de aproximacion obtenido. — La *parte comun* á las dos espresiones $\frac{2}{r^{(n)}}$, $\frac{2}{R^{(n)}}$, reducidas á decimales, representa el valor de π, faltándole menos de una unidad del orden inferior de dicha parte comun. Solo se trata pues de saber cómo pueden calcularse los números R y r, R′ y r', R″ y r'',....

Ahora bien, suponiendo en la *figura* 165, que $AB = 1$ sea el lado del cuadrado, como el triángulo AOP es entonces isósceles [$AP = OP$], se deduce Fig. 165.

1.º $\quad OP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$, de donde $r = \frac{1}{2}$;

2.º $\quad OA = \sqrt{2\,AP^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4}}$; de donde $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Siendo conocidos R y r, las dos fórmulas

$$r' = \tfrac{1}{2}(R + r), \qquad R' = \sqrt{Rr'},$$

harian conocer á R′ y r', que son el radio y el apotema del *octógono* regular isoperímetro con el cuadrado; y, sustituyendo en las mismas fórmulas R′ y r' en lugar de R y r, se obtendrian el radio R″ y el apotema r'' del polígono de *diez y seis* lados; continuándose despues del mismo modo.

Pero si se quieren convertir inmediatamente todos estos resultados en fracciones decimales, se debe recurrir al medio que nos suministra el *número* 256.

Despues de haber *reducido á decimales* los valores $R=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $r=\frac{1}{2}$, *se saca la semi-suma* de estas dos fracciones, y asi se obtiene el valor de r'; despues *se multiplica* este valor de r' por el valor de R, y *se estrae la raiz cuadrada* del producto, lo cual da el valor de R'.

Se opera despues con R' y r' como se ha hecho con R y r; lo cual da los valores de R'' y r''.

Y asi se continúa indefinidamente.

Este procedimiento se reasume en la regla siguiente:

Formése una serie de números que empiecen por 0 *y* 1, *y que desde el tercero inclusive vayan siendo alternativamente medios por diferencia y medios por cociente entre los dos que inmediatamente les preceden:—esta serie converge sin cesar hácia el valor del radio de una circunferencia igual á* 4.

Advert. Todas estas *multiplicaciones* y *estracciones de raices* cuadradas deben efectuarse por los medios abreviados que enseña la aritmética (*).

Hé aqui la tabla de los resultados que se obtienen haciendo el cálculo en esa forma:

NÚMERO DE LADOS.	APOTEMAS.	RADIOS.
4	$r = 0,5000008$	$R = 0,7071068$
8	$r' = 0,6035534$	$R' = 0,6532815$
16	$r'' = 0,6284174$	$R'' = 0,6407289$
32	$r''' = 0,6345731$	$R''' = 0,6376435$
64	$r^{\text{IV}} = 0,6361083$	$R^{\text{IV}} = 0,6368754$
128	$r^{\text{V}} = 0,6364919$	$R^{\text{V}} = 0,6366836$
256	$r^{\text{VI}} = 0,6365878$	$R^{\text{VI}} = 0,6366357$
512	$r^{\text{VII}} = 0,6366117$	$R^{\text{VII}} = 0,6366237$
1024	$r^{\text{VIII}} = 0,6366117$	$R^{\text{VIII}} = 0,6366207$
2048	$r^{\text{IX}} = 0,6366192$	$R^{\text{IX}} = 0,6366199$
4096	$r^{\text{X}} = 0,6366195$	$R^{\text{X}} = 0,6366197$
8192	$r^{\text{XI}} = 0,6366196$	$R^{\text{XI}} = 0,6366196$

(*) En el *Aritmética* de Mr. Bourdon (19.ª edicion) se hallan los cálculos relativos á la determinacion del número π, con todos los pormenores necesarios.

Se ve por esta tabla, que los valorés de r^{xi} y R^{xi} no difieren en las siete primeras cifras decimales (*).

Asi pues, una circunferencia igual á 4 tiene por radio 0,6366196..., y por diámetro 1,2732392...

De donde resulta que la relacion del diámetro á la circunferencia es $\frac{1,2732392...}{4}$, ó 0,3183098; y el número π, ó la *relacion de la circunferencia al diámetro*, tiene por valor

$$\frac{1}{0,3183098...} \text{ ó } 3,141593...$$

Esta division da el valor de π, faltándole menos de *una unidad* del sesto orden decimal; y si se quisiera mayor aproximacion, sería necesario calcular de antemano los valores de R, R', R'',..., y de r, r', r'',..., con mayor número de cifras.

Por otros medios se ha prolongado el cálculo hasta 140 cifras decimales. — Hé aqui las 20 primeras, que son mas que suficientes para los usos ordinarios:

$$\pi = 3,14159265358979323846.$$

Es muchas veces útil tener su logaritmo, y por eso le ponemos aqui:

$$\log. \pi = 0,49714987269415385435.$$

N.º 258. Escolio.—El número π, tomado con *cinco* decimales solamente, y convertido en fraccion contínua, da las siguientes reducidas:

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{9208}{2931}, \ldots$$

La segunda reducida, $\frac{22}{7}$, se llama *la razon* de Arquímedes, y se emplea con bastante frecuencia, porque espresa el número π aproximado hasta *centésimas*.—La tercera, debida á Rivard, se usa poco, porque la siguiente, que se llama *razon* de Adriano Mecio, da, con el mismo número de

(*) Véase el Aritmética citada poco antes.

cifras, una aproximacion mucho mayor; el número $\frac{355}{113}$ difiere de π en *menos de una millonésima.*—Ademas, es muy facil de retener, pues se obtiene escribiendo una cantidad compuesta de dos 1, dos 3, dos 5, y tomando la primer mitad de las seis cifras por denominador y la segunda mitad por numerador.

Finalmente, observaremos que la espresion $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, reducida á decimales, da 3,146...,

número que no difiere de π mas que en *una semi-centésima*; es decir, que la razon de la circunferencia al diámetro está representada con corta diferencia por la suma de los lados del cuadrado y del triángulo equilátero inscritos en el círculo que tiene por radio 1 (números 237., 238.).

Valuacion de los arcos de círculo por medio del número π.

Puede *medirse* de dos maneras un arco de círculo, ó bien refiriéndole al cuadrante tomado por magnitud absoluta, en cuyo caso se espresa el arco en *grados* (n.° 120.), ó bien buscando la *razon* entre el arco *rectificado* (n.° 241.) y el *radio* tomado por unidad.

De aqui resultan las dos cuestiones siguientes:

PRIMERA CUESTION.

N.° 259. *Dado un arco valuado en grados, hallar su relacion con el radio.*

Observemos ante todo que siendo π la razon de la circunferencia al diámetro, ó, lo que es lo mismo, la razon de *la semi-circunferencia al radio*, $\frac{\pi}{2}$ debe ser *la razon entre el cuadrante y el radio.*

Esto supuesto, es claro que para valuar en unidades de radio un arco cualquiera A cuyo número de *grados* se conoce, basta *multiplicar* por $\frac{\pi}{2}$ *el número abstracto* $\frac{m}{n}$ (n.° 120.) que espresa su relacion con el cuadrante; lo cual da la fórmula

$$(1) \qquad A=\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Recíprocamente. SEGUNDA CUESTION.

Conociendo la razon entre un arco A [rectificado] *y el radio, hallar el número de grados que contiene, ó su relacion con el cuadrante.*

De la fórmula anterior se deduce:

$$(2) \qquad \frac{m}{n} = A : \frac{\pi}{2};$$

lo cual prueba que para obtener la relacion pedida, se debe *dividir el número abstracto dado*, que suponemos reducido á decimales, *por el valor de* π valuado tambien en decimales, y *convertir despues* por las reglas conocidas de aritmética, *el cociente obtenido en grados sexagesimales ó centesimales*, segun la division que se prefiera.

Daremos en el tercer capítulo aplicaciones de entrambas reglas.

ESCOLIO. Estas dos reglas exigen una modificacion cuando no se toma por unidad el radio R del arco que se considera: en este supuesto, se debe en el primer caso, con arreglo á lo dicho en el escolio 2.° del número 250., *multiplicar* por R, y en el segundo caso, *dividir* por R el resultado que se obtenga; lo cual da

$$A = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R \quad \text{y} \quad \frac{m}{n} = A : \frac{\pi}{2R}.$$

Observaciones sobre la medida de los ángulos, y sobre las relaciones de los arcos descritos con radios diferentes.

N.° 260. PRIMERA OBSERVACION. — Hemos demostrado (n.° 119.) que el ángulo en el centro tiene por medida el arco de círculo comprendido entre sus lados, fundándonos en que *dos ángulos en el centro son proporcionales con los arcos* que comprenden, y que se suponen descritos con el mismo radio. — Pero podria preguntarse cuál sería la *razon de dos ángulos*, y por consiguiente, cual sería *la medida de un ángulo*, si los *arcos* estuvieran *descritos con diferentes radios?*

Para resolver esta cuestion consideremos dos ángulos cualesquiera AOB, A′OL (*fig.* 167), que para mayor sencillez supondremos colocados uno sobre otro de modo que tengan comun el vértice O y los lados OA, OA′, en la misma direccion; Fig. 167.

sean ademas AB, A'B', los arcos descritos con los radios OA, OA', y C el punto en que el arco A'B' encuentra al lado OB.

Esto supuesto, los dos ángulos A'OC, A'OB', que corresponden á los arcos A'C, A'B', del mismo radio, dan la proporcion

$$A'OC : A'OB' :: \textit{arco } A'C : \textit{arco } A'B' \quad (\text{n.}^\circ\ 119.);$$

ó, á causa de ser $A'OC = AOB$, y $A'OB' = A'OL$, tendremos

$$AOB : A'OL :: \textit{arco } A'C : \textit{arco } A'B'.$$

Pero los dos sectores semejantes OAB, OA'C, dan la proporcion *arco* A'C : *arco* AB :: OA' : OA (n.º 252.);

de donde se deduce $\quad \textit{arco } A'C = \textit{arco } AB \times \frac{OA'}{OA};$

luego sustituyendo este valor del arco A'C en la segunda proporcion, tendremos

$$AOB : A'OL :: \textit{arco } AB \times \frac{OA'}{OA} : \textit{arco } A'B',$$

ó bien $\quad AOB : A'OL :: \frac{\textit{arco } AB}{OA} : \frac{\textit{arco } A'B'}{OA'};$

lo cual prueba que — *Los dos ángulos son proporcionales á las razones de sus arcos respectivos con sus radios correspondientes.*

Sean en general V y V' dos ángulos cualesquiera, A y A' los arcos comprendidos entre sus lados, y descritos respectivamente con los radios R y R'. — Tendremos la proporcion

$$V : V' :: \frac{A}{R} : \frac{A'}{R'}.$$

Tomando siempre al *ángulo recto* por *unidad de ángulo*, y suponiendo que lo sea V', tomemos tambien por *unidad de arco, el arco correspondiente* A', descrito con el *radio* R' igual á la *unidad de longitud*; asi tendremos

$$V : 1 :: \frac{A}{R} : 1, \quad \text{de donde} \quad V = \frac{A}{R};$$

y puede decirse entonces que — ***El ángulo en el centro***, V, ***tiene por medida el cociente de la division del arco*** que le corresponde, ***por el radio*** R con que está descrito el arco.

Pero para comprender el sentido de la igualdad anterior, es necesario no olvidar (n.º 119.) que las cantidades V, A, R, estan referidas á sus respectivas unidades.

N.º 261. SEGUNDA OBSERVACION. — La proporcion

$$\textit{arco}\ A'C : \textit{arco}\ AB :: OA' : OA,$$

de que nos hemos servido en el número precedente, y que existe entre dos arcos correspondientes á un mismo ángulo en el centro, puede ponerse bajo la forma

$$\frac{\textit{arco}\ A'C}{\textit{arco}\ AB} = \frac{OA'}{OA},$$

y nos enseña que *la razon de un grado* sexagesimal ó centesimal en un círculo R, *con un grado* de un círculo R′, es *igual á la razon de los radios* R y R′.

Asi, el grado de un círculo cuyo radio es 3, solo vale $\frac{3}{4}$ del círculo cuyo radio es 4.

Sin embargo, siempre el grado es *una misma parte alícuota* constante de la circunferencia á que pertenece.

La misma proposicion se aplica á dos arcos, A y A′, supuestos rectificados, con tal que correspondan *á un mismo ángulo* en el centro.

Porque las fórmulas $A = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R$, $A' = \frac{m'}{n'} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R'$

(n.º 260., *escol.*), dan, á causa de ser $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$,

$$\frac{A}{A'} = \frac{R}{R'}.$$

N.º 262. TERCERA OBSERVACION.— Daremos fin á este párrafo con una proposicion que nos servirá de mucho en el tercer libro, y que naturalmente se enlaza á lo que precede.

TEOREMA. (*Fig.* 168.) Fig. 168.

De dos arcos AMB, AM′B, situados ó no situados en la misma region (n.° 11.) respecto de una cuerda comun AB, y menor cada uno que la semi-circunferencia [supuesta su rectificacion], *es menor el que tiene el centro mas apartado del punto medio* P *de la cuerda* AB.

Sean O el centro del arco AMB, O′ el centro del arco AM′B; y supongamos PO > PO′; resulta OA > O′A, y por consiguiente,

$$\text{ángulo AOB} < \text{ángulo AO'B}.$$

Así la razon $\frac{m}{n}$ del ángulo AOB con el ángulo *recto* es menos que la razon $\frac{m'}{n'}$ del angulo AO′B con el angulo recto. Ahora bien, por la fórmula (1) del número 259. tenemos,

$$\textit{arco}\ \text{AMB} = \frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \textit{arco}\ \text{AM'B} = \frac{m'}{n'}\cdot\frac{\pi}{2};$$

luego, á causa de ser $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$, resulta *arco* AMB < *arco* AM′B;

L. C. D. D.

Escolio. Este teorema da lugar á otra proposicion general cuyo enunciado es el siguiente:

Si se tiene una serie de arcos de círculo terminados en las estremidades de una cuerda comun AB, *el menor de todos* [supuesta la rectificacion de todos ellos] *es el que vuelve su convexidad á todos los otros.*

Esta proposicion es consecuencia evidente de la que acabamos de demostrar.

CAPITULO III.

PROBLEMAS SOBRE LA ESTENSION EN LAS FIGURAS PLANAS.

Este capítulo constará de *tres* párrafos: el *primero* tratará de la *construccion de las líneas proporcionales* y de algunos problemas dependientes de ellas; el *segundo* contendrá *problemas* sobre las *areas* de las figuras rectilíneas y circulares, y el *tercero* contendrá *aplicaciones* puramente *numéricas* sobre las líneas y las superficies.

Como los principios del analísis y de la discusion de los problemas se han desarrollado suficientemente en el tercer capítulo del primer libro, insistiremos ya poco en estas dos partes, particularmente respecto de los problemas mas elementales.

§. I. *Construccion de las líneas proporcionales.*

PROBLEMA I. (*Fig.* 169 y 170.) Fig. 169 y 170.

N.° 263. *Dividir una longitud dada* AB *en un número* n *de partes iguales.*

Para fijar las ideas, supondremos que se trata de dividir la recta AB en 5 partes iguales.

PRIMERA CONSTRUCCION, fundada en el teorema del *número* 181.: — 1.° — En el punto A (*fig.* 169), *tírese* una recta indefinida AX que forme con AB un ángulo cualquiera; Fig. 169.
— 2.° — *tómense* sobre esta recta, partiendo desde el punto A, 5 partes iguales, A*p*, *pq*, *qr*, ..., de una longitud arbitraria; — 3.° — *júntese* la estremidad *b* de la última parte con el punto B; — 4.° — por todos los demas puntos de division *p*, *q*, *r*, ..., *tírense* (n.° 154.) rectas paralelas á B*b*;

La recta AB quedará dividida (n.° 181.) en 5 partes iguales por esas diferentes paralelas.

Advert. Este medio tiene el inconveniente de exigir la construccion de un gran número de paralelas.

SEGUNDA CONSTRUCCION. 1.° — En los puntos A y B
Fig. 169. *fórmense* dos ángulos alternos-internos BAX, ABY (*fig.* 169), iguales entre sí; — 2.° — *tómense* en las rectas indefinidas AX, BY, empezando desde los puntos respectivos A, B, cinco partes iguales de magnitud arbitraria; — 3.° — *júntense* de dos en dos por medio de rectas los puntos de division correspondientes, es decir, primero con primero, segundo con segundo, &c.

Asi quedará la recta AB dividida en 5 partes iguales en los puntos P, Q, R,... En efecto, en virtud de la construccion, las dos rectas AX, BY, son paralelas (n.° 47.); y como tenemos $Ap=ap'$, $pq=p'q'$,..., resulta que $App'a$, $pqq'p'$,..., son paralelógramos (n.° 71.); luego Aa, pp', qq',..., son paralelas; luego, &c.

Advert. El medio que acabamos de esplicar no exige, propiamente hablando, mas que la construccion directa de las dos paralelas AX, BY, porque todas las otras pp', qq',..., se hallan determinadas con solo juntar de dos en dos los puntos dados. El principio fundamental es siempre el mismo.

TERCERA CONSTRUCCION. 1.° — *Constrúyase* sobre
Fig. 170. AB un triángulo equilátero CAB (*fig.* 170); — 2.° — despues de haber tomado en el lado CA [prolongado si es necesario] 5 partes iguales de magnitud arbitraria, lo cual da una longitud CA', *tómese* CB' = CA', y *tírese* la recta A'B': el triángulo CA'B' es semejante al CAB (n.° 191.), y por consiguiente tambien equilátero; — 3.° — *tómense* sobre A'B' las mismas partes que sobre CA', y *tírense* las rectas Cp, Cq, Cr,..., que dividirán tambien á la AB en 5 partes iguales (n.° 201.).

Advert. A fin de que los puntos de division P, Q, R,..., de AB, queden determinados del modo mas exacto, conviene que la recta AB quede situada entre el punto C y la recta A'B'; cuya condicion puede cumplirse siempre tomando de suficiente longitud las partes en CA'.

Existen ademas otros medios de resolucion, que tienen igualmente por objeto evitar el uso de las paralelas; pero el segundo medio de los indicados arriba es el que se usa mas comunmente para la construccion de escalas en el levantamiento de los planos.

ESCOLIO 1.° La division de una recta en dos, cuatro, ocho,..., partes iguales no es mas que un caso particular del problema precedente; pero es preferible la construccion del n.° 150., porque solo exige la construccion de dos arcos de círculo que cortándose, determinan dos puntos por los cuales se pasa luego una recta.

ESCOLIO 2.º Hemos visto anteriormente el modo de *sumar dos rectas*, de *restar una recta de otra*, de *multiplicar una recta por un número*; el problema anterior suministra el medio de *dividir una recta por un número*; y en el número 115. espusimos el procedimiento para obtener la *razon de dos rectas*, que es el segundo modo de considerar la division.

PROBLEMA II. (*Fig.* 169, 170, 171.) Fig. 169, 170 y 171.

N.º 264. *Dividir una recta dada* AB *en partes proporcionales á las de otra* MN *tambien dada y ya dividida.*

Todos los medios de construccion indicados en el problema precedente son aplicables á este, con solo la diferencia de que en lugar de *tomar* sobre AX (*fig.* 169) ó sobre CA (*fig.* 170), partes iguales entre sí, es necesario tomar partes respectivamente iguales á las líneas M*p*, *pq*, *qr* (*fig.* 171),..., que componen la recta MN, colocando despues las mismas partes, pero en orden inverso, sobre la recta BY (*fig.* 169) ó sobre la recta A′B′ (*fig.* 170). Fig. 169, 170 y 171. Fig. 169 y 170.

N.º 265. ESCOLIO. — Puede presentarse el caso de tener que — *Dividir una recta* AB (*fig.* 172) *en partes proporcionales á dos líneas dadas* [M y N]; cuyo caso merece particular atencion. Fig. 172.

CONSTRUCCION. 1.º — Por los puntos A y B *tírense* dos rectas AX, BY, en cualquier direccion, pero paralelas entre sí [lo que equivale á construir dos ángulos alternos-internos iguales BAX, ABY]; — 2.º — *tómense* sobre AX y BY, partes AC, BC′, respectivamente iguales á M y á N; — 3.º — *tírese* la recta CC′, que encuentre á la recta AB en el punto D.

La recta AB quedará de este modo dividida en la razon pedida.

Porque los dos triángulos DAC, DBC′, son evidentemente semejantes, y dan

$$AD : DB :: AC : BC' :: M : N.$$

Advert. Si en lugar de colocar la línea N en el sentido de BY, se coloca en sentido contrario, de B á C″, y se junta el punto C con el punto C″, la recta CC″ irá á encontrar á la recta AB prolongada en un punto D′ que será el punto *conyugado* del punto D (n.° 202., *escol.* 2.°).

En efecto, tenemos

$$AD' : BD' :: AC : BC'' :: M : N :: AD : DB.$$

N.° 266. Corolario.—El escolio precedente nos suministra el medio de resolver otra cuestion que se presenta mucho en las aplicaciones, y cuyo enunciado es el siguiente:

Fig. 173. *Concurriendo dos rectas* AB, CD (*fig.* 173), *en un punto demasiado distante para poderse determinar en el papel de un dibujo, tirar por un punto,* O ú O′, *interior* ó *esterior al ángulo de las dos rectas, una tercera recta*, OL ú O′L′, *que pase por el punto de concurso de las dos primeras.*

Primer caso. 1.°—Despues de haber tirado por el punto O una recta cualquiera, EOF, *tírese* por un punto G tomado á voluntad en AB, la recta GK paralela á EF;—2.°—*divídase* GK, cuya longitud se conoce en partes proporcionales á las líneas EO, OF, tambien conocidas.

La recta LO será la recta pedida:—porque, supuesto que tenemos la proporcion

$$GL : LK :: EO : OF,$$

resulta (n.° 201., *recíp.*) que las tres rectas, GE, LO, KF, concurren en un mismo punto.

Segundo caso. 1.°—Despues de *trazar*, como arriba, las dos paralelas EO′F′, GK′, *determínese* en la recta EO′ el punto O *conyugado* del punto O′ respecto de EF;—2.°—*divídase* GK, de modo que tengamos GL : LK :: EO : OF;—3.°—*determínese* el punto L′ *conyugado* del punto L.

La recta L′O′ será la recta pedida.

En efecto, puesto que los puntos O, O′, son conyugados, debe tenerse la proporcion (n.° 202., *escolio* 2.°)

$$EO' : FO' :: EO : OF.$$

Igualmente, supuesto que L y L′ son puntos conyugados, debe tenerse la proporcion

$$GL' : LK :: GL : LK;$$

pero por construccion tenemos

$$GL : LK :: EO : OF;$$

luego $$GL' : KL' :: EO' : FO';$$

ó bien $$GK : KL' :: EF : FO'.$$

Luego (n.° 201., *recíp.*) las tres rectas, GE, KF, L'O', concurren en un mismo punto.

Advert. En la construccion que acabamos de esponer puede determinarse directamente el punto L', sin necesidad de construir de antemano su conyugado L.

PROBLEMA III. (*Fig.* 174 y 175.) Fig. 174 y 175.

N.° 267. *Construir una cuarta proporcional á tres líneas dadas*, M, N, P; — en otras palabras, — *Hallar una línea* X, *que forme el cuarto término de una proporcion cuyos tres primeros términos sean las líneas dadas*, M, N, P [siendo M el primer término].

PRIMERA CONSTRUCCION. 1.° — Despues de haber formado un ángulo cualquiera XAY (*fig.* 174), *tómese* en AX, Fig. 174.
AB = M, BC = N, y en AY, AD = P, y despues *tírese* la BD; — 2.° — *tírese* por el punto C la recta CE, paralela á BD.

El segmento DE será la cuarta proporcional pedida. Porque tenemos (n.° 183.)

$$AB : BC :: AD : DE,$$

ó $$M : N :: P : DE;$$

pero tambien debe tenerse

$$M : N :: P : X;$$

luego $$X = DE.$$

SEGUNDA CONSTRUCCION. En lugar de colocar las rectas M y N sobre AX, una á continuacion de otra, se pueden colocar desde el mismo punto A, es decir, que se puede tomar AB = M, AC' = N; y despues de haber tomado en AY, AD = P, juntar el punto B con el punto D, y tirar la recta C'E' paralela á la recta BD.

La recta AE′ será la cuarta proporcional pedida: porque tambien tendremos

$$AB : AC' :: AD : AE',$$

ó $$M : N :: P : AE';$$

luego $$X = AE'.$$

Advert. Esta segunda construccion tiene la ventaja de hacer menos estensa la figura. Solo resta advertir, que en las dos construcciones se deben juntar con la primera recta los estremos de las que forman los antecedentes de la proporcion.

Fig. 175. TERCERA CONSTRUCCION. 1.°—En una recta AX (*fig.* 175), *tómese* AB = M, AC = N; — 2.° — en el punto B *fórmese* un ángulo cualquiera ABY, con una recta BD = P, y *júntese* el punto A con el punto D; — 3.°— por el punto C *tírese* la recta CE paralela á BD.

La recta CE será la cuarta proporcional pedida: porque tendremos $AB : AC :: BD : CE$, ó $M : N :: P : CE$;

de donde $$X = CE.$$

Advert. Cualquiera que sea la construccion que se escoja, es claro que siempre se obtendrá para X la misma magnitud, porque esta línea resulta de la determinacion del cuarto término de una proporcion cuyos tres primeros términos son M, N, P.

Solo las circunstancias de cada caso pueden determinar cuál de las tres construcciones es preferible.

COROLARIO. De lo anterior, se deduce inmediatamente la solucion del siguiente problema:

Fig. 176. *Dado un punto* O (*fig.* 176) *en el interior de un ángulo* XAY, *tirar por él una recta* DOE, *tal que los segmentos* DO, OE, *esten en una razon dada*, M:N.

SÍNTESIS. 1.°—Por el punto O *tírese* OB paralela á AY;— 2.°—*constrúyase* una cuarta proporcional á las tres líneas M, N, AB; — 3.° — *tómese* esta cuarta proporcional desde B hasta E sobre AX, y *tírese* la DOE.

Esta será la línea pedida;

Porque, siendo OB paralela á AD, resulta

$$OD : OE :: AB : BE :: M : N.$$

Advert. En el caso particular de ser M = N, basta tomar en AX, BE = AB, y tirar la recta EOD.

Cuando el punto dado O está en la bisectriz del ángulo YAX, el problema general admite evidentemente dos soluciones.

PROBLEMA IV. (*Fig.* 177 y 178.) Fig. 177 y 178.

N.º 268. *Construir una tercera proporcional á dos líneas dadas* [M y N]; — es decir, — *Hallar una línea* X *que forme el segundo estremo de una proporcion cuyo primer término es una línea dada* M, *y los dos medios son iguales á otra línea tambien dada* N.

Hablando propiamente, este problema no es mas que un caso particular del problema III, y puede construirse por los mismos medios: pero algunas veces es mas ventajoso recurrir á las dos construcciones que vamos á indicar.

PRIMERA CONSTRUCCION. 1.º — En una recta indefinida AX (*fig.* 177) *tómese* AB = M, y *descríbase* sobre esta recta una semi-circunferencia (n.º 151.); — 2.º — desde el punto A, con un radio igual á N *descríbase* un arco de círculo que corte á la semi-circunferencia en un punto C; — 3.º — *bájese* desde el punto C la perpendicular CD sobre AB. Fig. 177.

La recta AD es la tercera proporcional pedida.

En efecto, tenemos (n.º 226., *escolio* 2.º)

$$AB : AC :: AC : AD, \quad ó \quad M : N :: N : AD;$$

pero tambien debe tenerse

$$M : N :: N : X;$$

luego $\qquad AD = X.$

Advert. Esta construccion supone que M es *mayor* ó al menos *igual* á N, mientras que la siguiente puede emplearse en todos los casos.

SEGUNDA CONSTRUCCION. 1.º — Sobre una recta AX (*figura* 178), y en un punto cualquiera A, *levántese* (n.º 148.) una perpendicular AB = N; — 2.º — *tómese* á la izquierda del punto A una distancia AC = M, y *tírese* la recta CB; — 3.º — en el punto B *levántese* BD perpendicular á BC: Fig. 178.

AD será la línea buscada.

En efecto, tenemos (n.° 203.)

$$CA : AB :: AB : AD, \quad ó \quad M : N :: N : AD;$$

luego $$AD = X.$$

Advert. El estremo D de AD distará tanto mas del punto A, cuanto mas pequeña sea la recta AC = M respecto de AB = N; pero la construccion es siempre posible.

Fig. 179 y 180. PROBLEMA V. (*Fig.* 179 y 180.)

N.° 269. *Construir una media proporcional entre dos líneas dadas*, M y N; — ó lo que es lo mismo, — *Hallar una línea* X *que forme á la vez los dos términos medios de una proporcion cuyos estremos sean dos líneas dadas*, M y N.

Fig. 179. PRIMERA CONSTRUCCION. En una recta indefinida AX (*figura* 179), *tómese* AB = M, BC = N; luego sobre AC = M + N, *descríbase* una semi-circunferencia, y *levántese* en el punto B la perpendicular BD.

Esta perpendicular es la línea buscada; porque tenemos

$$AB : BD :: BD : BC, \quad ó \quad M : BD :: BD : N;$$

luego $$BD = X.$$

Fig. 180. SEGUNDA CONSTRUCCION. En la recta indefinida AX (*figura* 180), *tómese* AB = M, AC = N; despues sobre AB como diámetro, *descríbase* una semi-circunferencia, y *levántese* en C la perpendicular CD.

La cuerda AD será (n.° 226., *escolio* 2.°) media proporcional entre AB y AC, es decir, entre M y N.

Fig. 180. TERCERA CONSTRUCCION. Las dos rectas M y N se toman como antes en AX (*fig.* 180), y se *describe* sobre la diferencia CB como diámetro una circunferencia, *tirando* luego desde el punto A (n.° 170.) la tangente AD.

AD será la línea pedida (n.° 228.).

Advert. La segunda construccion es en general la mas sencilla, porque da la figura menos estensa; la tercera no debe usarse sino cuando se tenga ya descrita una semi-circunferencia sobre la diferencia de las líneas dadas, M y N, como sucede algunas veces.

N.° 270. ESCOLIO GENERAL *sobre las líneas proporcionales.*

Las tres proporciones

$$M:N::P:X,\quad M:N::N:X,\quad M:X::X:N,$$

dan las igualdades siguientes:

$$X=\frac{N\times P}{M},\ X=\frac{N^2}{M},\ X^2=M\times N,\ \text{ó}\ X=\sqrt{M\times N}.$$

Estas igualdades, de las cuales recíprocamente se deducen aquellas proporciones, juntas con estas otras,

$$X=\sqrt{M^2+N^2},\qquad X=\sqrt{M^2-N^2},$$

forman lo que se llama, en la *Geometría* y en la *Aplicacion del Algebra á la Geometría*, las *espresiones elementales* de la construccion de las líneas.

La espresion $\sqrt{M^2+N^2}$ es, como ya sabemos, la *hipotenusa* de un triángulo rectángulo cuyos *catetos* son M y N.

La espresion $\sqrt{M^2-N^2}$ representa un *cateto* de un triángulo rectángulo cuya *hipotenusa* es M, y el *otro cateto* N.

Ya espusimos (n.° 162.) los medios de construir un triángulo rectángulo, conociendo—1.°—*los dos catetos*,—2.°—*la hipotenusa y un cateto.*

Tenemos pues todos los materiales necesarios para la *construccion geométrica* de las líneas. Sin embargo, como es importante familiarizarse con esta clase de operaciones, indicaremos todavía los medios de construir algunos *radicales numéricos* [del segundo grado].

En un círculo cuyo radio se supone igual á 1,

1.° $\sqrt{2}$ es la cuerda AB (*fig.* 182) del *cuadrante*; ó lo que es lo mismo, el lado del *cuadrado inscrito*; Fig. 182.

2.° $\sqrt{3}$ es la cuerda AD del duplo del arco subtendido por el lado AC=1 del exágono: es el lado del *triángulo equilátero inscrito*;

3.° $\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=\sqrt{2^2+1}$ es la hipotenusa AE del triángulo rectángulo cuyos catetos son

$$AA'=2,\ A'E=OB=1;$$

4.° $\sqrt{6}=\sqrt{4+2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $AA'=2$ y $AB=\sqrt{2}$;

O bien tambien $\sqrt{6}=\sqrt{3\times2}$, y es una media proporcional entre las líneas espresadas por *tres* y por *dos*.

. . . .
. . . .

En general, sea M un número entero compuesto de dos factores *n* y *p*; $\sqrt{M}$ ó $\sqrt{n\times p}$ es una media proporcional entre *n* y *p*.

En todos los casos $\sqrt{M}$ ó $\sqrt{M\times1}$ es una media proporcional entre M y 1.

Terminaremos este párrafo resolviendo algunos problemas cuya construccion en último analísis se reduce á la de las líneas proporcionales.

Fig. 183.

Problema VI. (*Fig.* 183.)

N.° 271. *Dividir una línea dada* AB *en media y estrema razon.*

Ya tuvimos ocasion en el n.° 239. de tratar esta cuestion bajo el punto de vista *numérico*; pero el escolio del n.° 228. nos suministra una solucion puramente *geométrica*.

Síntesis. 1.°— En el punto B *levántese* la recta BO perpendicular á AB é igual á $\frac{1}{2}$AB, despues *tírese* la recta AO;— 2.° — desde el punto O como centro, con el radio OB, *descríbase* una circunferencia que corte á la recta AO en el punto C; — 3.° — *trasládese* AC sobre AB por medio de un arco de círculo que corte á esta recta en D.

La recta AB queda dividida en el punto D en media y estrema razon.

En efecto, en virtud de la construccion, AB es tangente al círculo OB; y si se prolonga AO hasta encontrar en C′ á la circunferencia, tendremos (n.° 228.) la proporcion

$$AC' : AB :: AB : AC;$$

de donde $$AC'-AB : AC :: AB-AC : AC.$$

Ahora bien,

$$AC'=AC+CC'=AC+AB, \text{ de donde } AC'-AB=AC=AD,$$

y $$AB-AC=AB-AD=BD;$$

por consiguiente, la proporcion se transforma en esta otra

$$AD:AB::BD:AD;$$

ó, invirtiendo, $$AB:AD::AD:BD;$$

L. C. D. D.

PROBLEMA VII. (*Fig.* 183.) Fig. 183.

N.º 272. *Tirar una tangente comun á dos círculos.*

Ya en el n.º 171. resolvimos este problema por consideraciones fundadas en las teorías del *libro primero.* Pero las líneas proporcionales nos conducen á una solucion mucho mas sencilla.

ANALÍSIS. Supongamos resuelto el problema, y sean MN, *mn*, dos tangentes, una *esterior* y otra *interior*, que encuentran á la línea de los centros OO′ en dos puntos C, C′.

Es claro que, si conocieramos la posicion de estos puntos, bastaria tirar por cada uno de ellos (n.º 170.) una tangente á uno de los círculos dados; la cual lo sería tambien al otro, y resolvería por consiguiente el problema.

Tirando pues los radios OM y O′N, O*m* y O′*n*, obtenemos evidentemente dos pares de triángulos semejantes OMC y O′NC, O*m*C′ y O′*n*C′, que dan las proporciones

$$OC:O'C::OM:O'N,$$

$$OC':O'C'::OM:O'N.$$

Pero los radios OM, O′N, son líneas dadas *á priori*; luego los puntos C y C′ no son otra cosa que los puntos *conyugados* que dividen (n.º 264., *advert.*) la distancia OO′ en la razon dada OM : O′N.— De aqui resulta la construccion siguiente:

SÍNTESIS. 1.º — *Tírese* en el círculo O un diámetro cualquiera KO*k*, y por el punto O′ *tírese* (n.º 154.) un radio O′L paralelo á OK; — 2.° — *júntense* los puntos K y *k* con el punto L.

Los puntos C, C′, en que las rectas KL, *k*L, encuentran á la línea de los centros, son los puntos buscados; porque tenemos (n.° 191.)

$$OC : O'C :: OM : O'N$$

y

$$OC' : O'C' :: OM : O'N.$$

Tírese en seguida por cada uno de estos puntos una tangente al círculo O, ó al círculo O′; y lo será tambien al otro círculo.

En el n.° 171. dimos ya la discusion de este problema.

Fig. 184.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 184.)

N.° 273. *Dados en un plano dos puntos* A *y* B, *hallar otro punto cuyas distancias á los dos primeros esten en una razon dada* m:n.

Esta cuestion es tambien una aplicacion muy sencilla de la division *armónica* de las líneas.

ANALÍSIS. Es desde luego muy facil de ver que el problema por su naturaleza es *indeterminado*, es decir, que existen en el plano una infinidad de puntos con la propiedad pedida; porque si haciendo centro en A, con un radio arbitrario AM, describimos una circunferencia de círculo, y luego, haciendo centro en B con el radio BM determinado por el cuarto término de la proporcion $m : n :: AM : BM$, describimos otra circunferencia, las dos se cortarán en dos puntos M, N, que satisfarán al enunciado. — Se conocerá ademas por esta construccion, que los puntos estan situados de *dos en dos* en una misma recta perpendicular á la línea AX tirada por los puntos dados A, B, y á una misma distancia de aquella recta.

Esto supuesto, comencemos por determinar en AB, los puntos C y C′, que cumplen la condicion del enunciado, lo cual equivale á dividir *armónicamente* la recta AB en la razon $m : n$ (n.° 264., *advert.*); digo pues que la circunferencia descrita sobre la recta CC′, como diámetro, es el *lugar geométrico* de todos los puntos pedidos.

En efecto, sea M uno de sus puntos; juntémosle con los puntos A y B; por hipótesis tenemos la proporcion

$$AM : MB :: m : n;$$

pero por construccion tenemos tambien

$$AC : CB :: m : n;$$

luego $$AM : MB :: AC : CB;$$

lo cual prueba (n.° 202., *escolio* 1.°) que la recta MC es *bisectriz* del ángulo AMB.

Del mismo modo se encontraría que

$$AM : MB :: AC' : BC';$$

luego la recta MC′ es *bisectriz* del ángulo suplementario BMA′. Asi pues (n.° 43., *escolio* 3.°), las dos rectas CM, C′M, son perpendiculares entre sí.

Como podriamos aplicar el mismo raciocinio á cualquier otro punto del lugar buscado, tenemos derecho para concluir que ese lugar es la circunferencia descrita sobre la recta CC′ como diámetro.

De aqui resulta la construccion del problema propuesto:

Despues de haber *dividido* la recta AB, en el punto C, en la razon dada $m : n$, y de haber *determinado* (n.° 264., *advert.*) su punto conyugado C′, *descríbase* sobre CC′ como diámetro una circunferencia.

Asi se obtendrá el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias á los puntos A y B estan en la razon $m : n$.

Escolio. Puede presentarse este resultado bajo la forma de un teorema con el enunciado siguiente:

Dada en un plano de longitud y de posicion una recta AB (*fig.* 184), *dividida armónicamente en dos puntos*, C, C′, *la circunferencia descrita sobre la distancia* CC′, *como diámetro, es el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias á los estremos de la recta* AB *estan en una razon constante*, la de AC á CB. Fig. 184

La demostracion se deduce tan fácilmente del analísis que hemos hecho, que nos parece inútil detenernos á darla.

Fig. 185.

Problema IX. (*Fig.* 185.)

N.° 274. *Dada de posicion una recta indefinida* LM, *y dos puntos* A *y* B, *describir una circunferencia que pasando por estos dos puntos, sea tangente á la recta dada.*

No ofreciendo dificultad alguna el análisis de este problema, pasemos desde luego á la síntesis:

Construccion. 1.°—*Prolónguese* la recta BA hasta encontrar en P á la recta dada LM, y *determínese* (n.° 269.) una media proporcional entre PB y PA;—2.°—*trasládese* esta media proporcional desde P hasta C sobre LM, y *levántese* (n.° 148.) en el punto C la perpendicular CG;—3.°—*levántese* en el punto medio de AB (n.° 150.) una perpendicular IK.

El punto O en que las rectas CG, IK, se cortan (n.° 50.), es el centro del círculo buscado, que podrá construirse, pues se conoce su radio OA.

En efecto, en virtud de la construccion, tenemos

$$PC^2 = PB \times PA;$$

luego (n.° 229.) los puntos A, B, C, estan situados en una circunferencia tangente á PC ó á LM.

Advert. La media proporcional PB$:x::x:$PA puede construirse directamente sobre la figura:

Descríbase sobre PB una semi-circunferencia, y *levántese* en el punto A la perpendicular AD; la cuerda PD es la media proporcional buscada, que se traslada sobre LM por medio de un arco de círculo.

Discusion. El problema es siempre posible mientras los puntos A y B estan situados á un mismo lado de LM; y solo es posible en ese caso.

Es ademas susceptible de *dos* soluciones; la segunda se obtendria, colocándose PC á la izquierda del punto B, desde B hasta C'.

En el caso particular en que la recta AB fuera paralela á LM, no se podria construir la media proporcional; pero entonces el punto de contacto de LM se hallaria situado evidentemente en su punto de encuentro con la perpendicular levantada en el punto medio de AB; y no habria mas que una solucion.

Corolario. A este problema se enlaza casi inmediatamente el siguiente:

Dadas de posicion dos rectas, LM, LN (*fig.* 186.), *y un punto* A *interior al ángulo* NLM, *hacer pasar por el punto* A *un círculo tangente á las dos rectas dadas.* Fig. 186.

Tirando la bisectriz LI, y bajándole desde el punto A una perpendicular, *tómese* CA′ = CA; con esto la circunferencia, que debe tener su centro sobre LI, habrá de pasar necesariamente por el segundo punto A′; y la cuestion queda reducida al problema precedente.

Esta en general es tambien susceptible de dos soluciones.

§. II. *Problemas sobre las areas.*

Transformacion de los polígonos.

Asi se llama la operacion gráfica que tiene por objeto sustituir á un polígono dado, otro que le sea *equivalente* (n.º 209.), es decir, que tenga la misma *superficie*, pero que sea de forma diferente, bien respecto del número de lados, bien respecto del número de ángulos.

Problema I. (*Fig.* 187.) Fig. 187.

N.º 275. *Transformar un polígono en otro que tenga un lado menos*, y por consiguiente, *en un triángulo.*

Construccion. Sea ABCDE.... un polígono cualquiera que aqui representamos por una línea quebrada, para hacer resaltar mejor la generalidad de la construccion.

Desde el punto A *trácese* la diagonal AC, de modo que el vértice B quede respecto de ella en region (n.º 11.) distinta de la en que estan todos los demas vértices del polígono, escepto A, B, C. *Tírese* despues por el punto B la recta BI paralela á la diagonal AC y prolongada hasta encontrar en I al lado DC, tambien prolongado, y *tírese* la recta AI.

El polígono AIDE.... es equivalente al polígono dado ABCDE...., y tiene un lado menos que este.

Porque supuesto que BI es paralela á AC, los dos triángulos AIC, ABC, son equivalentes (n.º 211.); y si á estos dos triángulos añadimos la porcion de superficie ACDE...., tenemos, por una parte, el polígono AIDE...., y por otra, el polígono ABCDE....; luego estos dos polígonos son tambien equivalentes.

Ademas, es evidente què siendo el lado CI del triángulo AIC prolongacion del lado DC, los dos lados AB, BC, del primer polígono quedan reemplazados por el único lado AI; luego la segunda figura tiene un lado menos que la primera.

Procédamos ahora con el polígono AIDE.... como con el primitivo, es decir, *tírese* la diagonal AD de módo que el vértice I y la porcion de polígono ADE.... queden colocados en diferente region respecto de ella; *tírese* en seguida la recta IL paralela á AD y prolongada hasta encontrar con ED tambien prolongada:—Asi se obtiene un nuevo polígono ALE.... equivalente al segundo y con un lado menos.

Continuando de este modo, acabaremos por llegar á un polígono de tres lados; y quedará resuelto el problema.

PROBLEMA II.

N.º 276. *Transformar un polígono cualquiera en un cuadrado.*

Si el polígono dado es un *triángulo*, sean b su base, h su altura (n.º 208.), y x el lado del cuadrado buscado.

Debemos tener la relacion $x^2 = b \times \frac{1}{2}h$,

de donde sale la proporcion $b : x :: x : \frac{1}{2}h$.

Asi pues, el *lado* del cuadrado pedido es una *media proporcional entre la base y la mitad de la altura del triángulo.*

Construida esta línea, facilmente se deduce la construccion del cuadrado.

Cuando se da un *polígono* cualquiera, se empieza por *transformarle* en un triángulo (n.º 275.); y despues se transforma este en un cuadrado.

Cuando se trata de un *paralelógramo*, ó de un *rectángulo*, ó en fin, de cualquier figura cuya *area* esté *valuada* inmediatamente por el *producto de dos líneas*, todo se reduce, para obtener el lado del cuadrado equivalente, á *construir una media proporcional entre dichas dos líneas.*

Asi es como para un polígono regular basta, despues de haber *desarrollado* sobre una recta indefinida el perímetro del polígono, buscar una media proporcional entre el *semi-perímetro* y *el radio del círculo inscrito.*

Para transformar un *círculo* en un cuadrado, sería necesario rectificar primero la circunferencia; determinando despues una media proporcional entre el *radio* y la *semi-circunferencia* [rectificada].

Escolio. La *cuadratura* del círculo está, como se ve, íntimamente ligada con la *rectificacion* de la circunferencia: y si hasta ahora no se ha podido, por medio de la regla y del compas, construir rigorosamente un *cuadrado equivalente á un círculo*, como se hace con las figuras rectilíneas, depende esto de que los métodos conocidos no dan mas que valores aproximados de la *razon de la circunferencia al diámetro.*

Sin embargo, no tardaremos en ver ejemplos de figuras planas curvilíneas que pueden *cuadrarse exactamente*, aunque no se conozca el medio de *rectificar* rigorosamente las líneas curvas que las terminan.

Construccion de polígonos semejantes con ciertas condiciones.

Problema III. (*Fig.* 188.) Fig. 188.

N.º 277. *Sobre una recta* ab *dada de longitud, construir un polígono semejante á un polígono dado* ABCDEF.

Primer medio. Despues de descomponer el polígono dado en triángulos por medio de diagonales tiradas desde uno de los vértices A á todos los otros, *fórmense* en los puntos *a* y *b* dos ángulos *cab*, *abc*, respectivamente iguales á los ángulos CAB, ABC: y se obtendrá un triángulo *abc* semejante al triángulo ABC.—*Constrúyase* del mismo modo sobre *ac* un triángulo *acd* semejante al triángulo ACD, y asi sucesivamente.

El polígono *abcde*.... asi obtenido será semejante al polígono ABCDE....

Segundo medio. Si el lado *ab* no está necesariamente dado de posicion, *colóquese* desde A hasta B′ sobre AB, y por el punto B′ *tírese* B′C′ paralela á BC; igualmente por el punto C′ en que B′C′ encuentra con BC, *tírese* C′D′ paralela á CD; y asi sucesivamente.

El polígono AB′C′D′.... será semejante al ABCD.... (n.º 167.).

En una palabra, cada uno de los casos de igualdad demostrados para los polígonos, nos suministra un medio de resolver la cuestion.

Fig. 158. **Corolario.** De aqui se deduce un medio de — *Construir sobre una recta dada* AB (*fig.* 158) *un polígono regular de una especie dada.*

[Solo puede tratarse aqui de los polígonos regulares comprendidos en las series que hemos hecho conocer en el *número* 240., *escolio.*]

Empiécese por *describir* una circunferencia, tomando un radio arbitrario *oa* [se sobreentiende la *figura*]; despues se *inscribe* en ella un polígono de la especie dada.—Sea *ab* el lado de este polígono.—Sobre AB se *construye* un polígono semejante á aquel á que pertenece el triángulo isósceles *oab*; y se tendrá el polígono buscado.

Pero todavía es mas facil, despues de haber *construido* sobre AB un triángulo semejante al triángulo *oab*, *describir* desde el punto O como centro, con el radio OA, una circunferencia en la cual se *toman* luego cuerdas iguales á AB.

Problema IV.

N.° 278. *Dados dos polígonos semejantes* A, A′, *construir otro polígono* A″ *semejante á los dos primeros, y equivalente á su suma ó á su diferencia.*

La solucion de este problema es una consecuencia inmediata del *escolio* demostrado en el n.° 223., *corolario* 4.°

Sean *a*, *a′*, dos lados homólogos de los polígonos dados;—sobre estos lados, considerados como catetos, ó como hipotenusa el uno y como cateto el otro, *constrúyase* (n.° 162.) un triángulo rectángulo; y sobre el tercer lado *a″* del triángulo asi obtenido, *constrúyase* (n.° 277.) un polígono semejante á uno de los polígonos dados.

El polígono construido de este modo será el polígono pedido: porque siendo por construccion

$$a''^2 = a^2 + a'^2, \quad \text{ó} \quad a''^2 = a^2 - a'^2,$$

resulta (n.° 223., *corolario* 4.°).

$$A'' = A + A', \quad \text{ó} \quad A'' = A - A'.$$

Fig. 189. **Escolio.** Sean AMNB, APC, BQC (*fig.* 189), tres semi-

circunferencias descritas sobre los lados de un triángulo rectángulo ABC; y llamemos R, R′, R″, los radios de los círculos, siendo R el del círculo descrito sobre la hipotenusa.

De la relacion $R^2 = R'^2 + R''^2$.

se deduce $\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi R'^2 + \frac{1}{2}\pi R''^2$;

luego (n.º 250.)

semi-círculo AMNB = *semi-círculo* APC + *semi-círculo* BQC.

Esto supuesto, si de los dos miembros de esta igualdad se quita la suma de los segmentos circulares, AMCI + BNCL, queda, por una parte el triángulo ABC, y por otra la suma de las dos figuras AMCP, BNCQ.

Donde se ve que el *area* del espacio curvilíneo CMAPCBQN es igual á la del triángulo rectángulo ABC; y como este triángulo puede transformarse en un cuadrado (n.º 276.), sucede lo mismo con el espacio curvilíneo. Este es el ejemplo que hemos indicado en este mismo *número*.

PROBLEMA V. (*Fig.* 190.)

Fig. 190.

N.º 279. *Dado un cuadrado* a^2, *hallar otro cuadrado* x^2, *tal que el primero sea al segundo como son entre sí dos líneas dadas*, M, N; es decir, que den la proporcion $m : n :: a^2 : x^2$.

El corolario 2.º del n.º 223. suministra una construccion bastante sencilla de este problema.

SÍNTESIS. 1.º — Sobre una recta indefinida BX *tómese* $BD = m$, $DC = n$, y sobre $BC = m + n$, como diámetro, *descríbase* una semi-circunferencia; — 2.º — *levántese* en el punto D una perpendicular DA, y *tírense* las cuerdas AB, AC, prolongándolas mas allá de B y de C; — 3.º — sobre AB *tómese* una parte $AB' = a$ [aqui se supone $a > AB$], y *tírese* B′C′ paralela á BC.

La recta AC′ será el lado del cuadrado pedido.

En efecto, los dos triángulos ABC, AB′C′, dan la proporcion $AB : AC :: AB' : AC'$,

y por consiguiente, $AB^2 : AC^2 :: AB'^2 : AC'^2$;

pero tenemos (n.° 223., *corol.* 2.°)

$$AB^2 : AC^2 :: BD : DC, \quad ó \quad :: m : n;$$

luego tambien $AB'^2 : AC'^2 :: m : n,$

ó invirtiendo, y poniendo por AB′ su valor a,

$$m : n :: a^2 : AC'^2;$$

luego finalmente $AC' = x.$

Advert. Si sucediera en la construccion, que la cuerda AB fuera igual á a, la cuerda C sería entonces el lado buscado,

porque se tendria $AB^2 : AC^2 :: BD : DC :: m : n,$

ó $m : n :: a^2 : AC^2.$

Otra construccion. En el caso de ser $m > n$, puede hacerse otra construccion sacada de la proporcion $m : n :: a^2 : x^2$, que puede ponerse bajo la forma

$$x^2 = \frac{a^2 n}{m} = \frac{an}{m} . a, \quad \text{de donde} \quad x = \sqrt{\frac{an}{m} . a}.$$

Segunda construccion. 1.°—Sobre una recta $AB = a$ (*figura* 191), *descríbase* una semi-circunferencia;—2.°—despues de formar en el punto A un ángulo cualquiera XAY, *tómense* en AY, dos partes $AC = m$, $AD = n$;—3.°—*tírese* la recta CB, y por el punto D *tírese* DE paralela á CB;—4.°—*levántese* en el punto E la perpendicular EF, y *tírese* la recta AF.

Fig. 191.

La cuerda AF es el lado buscado.

En efecto, tenemos $AC : AD :: AB : AE,$

ó $m : n :: a : AE;$

de donde se deduce $AE = \frac{a.n}{m};$

pero tambien tenemos (n.° 203.) $AF^2 = AB \times AE = a \times \frac{an}{m};$

luego $AF = \sqrt{a \times \frac{an}{m}} = x.$

Advert. Esta construccion supone evidentemente

$$AE < AB, \quad ó \quad \frac{an}{m} < a; \quad \text{de donde} \quad n < m;$$

mientras que la primera se puede ejecutar en todos los casos.

Escolio. Algunas veces la razon $m : n$, en lugar de darse en líneas, se da en números, por ejemplo, $3 : 2$. En este caso se tomarian en una línea indefinida, *cinco* partes consecutivas iguales; las tres primeras representarian al número 3, las otras dos al número 2; y la cuestion quedaria reducida á la precedente.

Hay ademas en este problema casos particulares que se construyen muy sencillamente:

1.° Propongámonos — *Construir un cuadrado duplo de otro.*

Debemos tener $x^2 = 2a^2$; de donde $x = a\sqrt{2}$:

El lado buscado es, como hemos visto en el n.° 238., la diagonal del cuadrado dado.

2.° Propongámonos por el contrario — *Hallar el lado de un cuadrado que equivalga á la mitad de otro cuadrado dado.*

Tenemos $x^2 = \frac{1}{2}a^2$; de donde $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$:

luego es la *mitad de la diagonal* del cuadrado dado.

Problema VI.

N.° 280. *Dado un polígono P, construir otro polígono X semejante al primero, y que guarde con este la razon de m : n.*

Sea a un lado del polígono dado, x el lado homólogo del polígono buscado; tendremos

$$P : X :: a^2 : x^2$$

y

$$P : X :: m : n;$$

de donde

$$m : n :: a^2 : x^2.$$

Asi queda la cuestion reducida al problema precedente, porque siendo conocida x, bastará construir sobre ella un polígono semejante al polígono dado.

PROBLEMA VII.

N.° 281. *Dados dos polígonos,* P y Q, *construir otro polígono* X *semejante al primero, y tal que el segundo sea al tercero como* m : n.

ANALÍSIS Y CONSTRUCCION. Sean a un lado del polígono P, y x su homólogo en el polígono X; en virtud de las condiciones del enunciado, tendremos

$$P : X :: a^2 : x^2,$$

y

$$Q : X :: m : n.$$

Esto supuesto, concibamos que se han transformado los polígonos P y Q en cuadrados (n.° 276.) que tengan respectivamente los lados p, q; y represéntese ademas por z el lado del cuadrado equivalente al polígono buscado X; las proporciones anteriores se hallarán transformadas en estas otras

$$p^2 : z^2 :: a^2 : x^2;$$

de donde

$$p : z :: a : x,$$

y

$$q^2 : z^2 :: m : n.$$

La última de estas proporciones nos hará conocer á z por la construccion del problema 5.° (n.° 279.); y la segunda dará el valor de x por una *cuarta proporcional* á las rectas p, z, a; y este será el lado del polígono buscado, homólogo del lado a.

ESCOLIO. Si el polígono buscado debiera ser equivalente al polígono Q, se tendria una construccion menos que efectuar, porque entonces sería $z = q$.

Síguense algunos problemas sobre las areas, que, sin tener inmediato enlace con los precedentes, son sin embargo muy útiles de conocer.

Fig. 192.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 192).

N.° 282. *Construir un rectángulo equivalente á un cuadrado dado* m^2, *y tal que la suma ó la diferencia de dos lados contiguos sea igual á una línea dada* a.

Primer caso. La línea dada a debe ser la suma de los dos lados contíguos.

1.° — Sobre una recta $AB = a$, como diámetro, descríbase una circunferencia (n.° 151.); — 2.° — en el estremo A del diámetro AB, *levántese* una perpendicular $AC = m$; — 3.° — *tírese* por el punto C la recta CL paralela al diámetro AB; — 4.° — desde el punto E ó E′, en que esta recta encuentra á la circunferencia descrita, *bájense* la perpendicular EF ó la E′F′ sobre AB.

Las distancias AF y FB, ó AF′ y F′B, serán los dos lados contíguos del rectángulo pedido.

En efecto, tenemos (n.° 226., *escol.* 1.°)

$$AF \times FB = EF^2 = AC^2 = m^2;$$

y $$AF + FB = AB = a.$$

Advert. El problema solo es evidentemente posible mientras sea $$AC < OI < OA, \quad ó \quad m < \tfrac{1}{2}a,$$

ó á lo mas $$m = \tfrac{1}{2}a; \quad \text{de donde} \quad m^2 = \tfrac{1}{4}a^2:$$

Lo cual prueba que — *El mayor rectángulo que se puede formar con las dos partes de una línea dada* a, *es el cuadado construido sobre la mitad de la línea.*

Segundo caso. La línea dada a debe ser la diferencia entre los dos lados contíguos.

Las dos primeras partes de la construccion son exactamente las mismas en este segundo caso; despues se junta el centro O de la circunferencia con el punto C, y las dos rectas CG, CK, serán los lados contíguos del rectángulo pedido.

En efecto, en virtud de la construccion, tenemos

$$CA^2 = CG \times CK \text{ (n.° 228.)}, \quad ó \quad CG \times CK = m^2,$$

y $$CG - CK = KG = AB = a.$$

Advert. Este problema es siempre posible, cualesquiera que sean a y m.

Problema IX.

N.° 283. *Hallar dos líneas* [x, y] *proporcionales á dos* *rectángulos dados*, a×b, a'×b', [y en general á dos polígonos cualesquiera].

Analísis. Debemos tener, en virtud del enunciado,

$$x : y :: a\times b : a'\times b';$$

lo cual da
$$x = \frac{a\times b\times y}{a'\times b'}.$$

Ahora bien, como una de las líneas, por ejemplo la y, es arbitraria, nada importa suponerla igual á a' ó á b'; en la hipótesis de ser $y = b'$, resulta

$$x = \frac{a\times b}{a'}, \quad \text{ó} \quad a' : a :: b : x.$$

Síntesis. Constrúyase una *cuarta proporcional* á las tres *líneas* a', a, b (n.º 267.): — la razon de la línea resultante á la línea b' será la misma que la de los rectángulos $a\times b$, $a'\times b'$.

Advert. Si los rectángulos fueran dos cuadrados a^2, a'^2, tendriamos que buscar una *tercera* proporcional á las líneas a' y a.

Y como dos polígonos cualesquiera pueden siempre *transformarse* en cuadrados, la cuestion queda reducida al caso de darse dos cuadrados.

Pero si se trata de dos polígonos *regulares*, tendremos, designando por p, p', y r, r', sus perímetros y los radios de los círculos inscritos,

$$x : y :: p\times r : p'\times r'; \quad \text{de donde, suponiendo} \quad y = p',$$

resulta
$$x = \frac{p\times r}{r'}, \quad \text{ó} \quad r' : r :: p : x;$$

y la cuestion se resuelve directamente como en el caso de dos rectángulos.

Escolio. Dando una estension conveniente al método anterior, se podria, — *Hallar dos líneas* [x é y] *de las cuales la primera sea á la segunda como un producto de tres líneas dadas* [a, b, c] *es á otro producto de otras tres longitudes tambien dadas* [a', b', c'].

Para esto, tenemos desde luego

$$x : y :: a \times b \times c : a' \times b' \times c';$$

de donde
$$x = \frac{a \times b \times c \times y}{a' \times b' \times c'};$$

y como y es arbitraria, puede suponerse $y = c'$;

lo cual da
$$x = \frac{a \times b \times c}{a' \times b'} = \frac{a \times b}{a'} \times \frac{c}{b'}.$$

Asi pues, se buscará, — 1.° — una *cuarta proporcional* á las líneas a', a, y b [cuyo resultado puede representarse por p]; — 2.° — una *cuarta proporcional* p' á las líneas b', p, y c: este será el valor de x; y se tendrá

$$p' : c' :: a \times b \times c : a' \times b' \times c'.$$

Del mismo modo se operaria para resolver la proporcion

$$x : y :: a \times b \times c \times d : a' \times b' \times c' \times d';$$

y asi sucesivamente.

De algunas cuestiones sobre los lugares geométricos.

PROBLEMA X. (*Fig.* 193).

Fig. 193.

N.° 284. *Dados en un plano dos puntos* A *y* B, *hallar otro punto* M, *tal que la suma de los cuadrados de las distancias de este tercer punto á los otros dos sea igual á un cuadrado dado* m^2.

ANALÍSIS. Sea C el punto medio de la recta que junta los dos puntos A y B. Por el supuesto, debemos tener

$$MA^2 + MB^2 = m^2;$$

pero tambien tenemos $MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + 2AC^2$ (n.° 207.); luego

$2MC^2 + 2AC^2 = m^2$; de donde se deduce $MC = \sqrt{\dfrac{m^2 - 2AC^2}{2}}$.

Ahora bien, m y AC son líneas conocidas; por consiguiente, la distancia del punto C al punto buscado es igual á una cantidad constante: esto prueba, —1.°—que la cuestion propuesta es *indeterminada*; —2.°—que el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen al enunciado, es una circunferencia de círculo que tiene por radio

$$(1) \qquad MC = \sqrt{\frac{m^2 - 2AC^2}{2}}.$$

Sin embargo, para que pueda existir esta circunferencia, es necesario que el cuadrado dado m^2 no sea *menor* que $2AC^2$; lo cual equivale á decir que el lado m del dicho cuadrado debe ser á lo menos igual á $AC.\sqrt{2}$, ó (n.° 238.) á la diagonal del cuadrado construido sobre AC mitad de la distancia AB.

Esto supuesto, hé aqui la construccion:

Síntesis. Desde luego y ante todo podemos poner la espresion (1) bajo la forma

$$MC = \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2 - 4AC^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2 - AB^2}.$$

—1.°— Sobre una recta indefinida EX *tómese* una parte [$EF = m$] mayor que la diagonal CD del cuadrado construido sobre AC; *levántese* en el punto F una perpendicular $FG = EF = m$, y *tírese* despues EG; lo cual da $EG^2 = 2EF^2 = 2m^2$; —2.°— *descríbase* sobre EG como diámetro una semi-circunferencia (n.° 161.); —3.° — haciendo centro en G con el radio AB, *descríbase* un arco de círculo que corte á la semi-circunferencia en un punto K; —4.° — *tírese* la recta EK, y *tómese* el punto medio I; — 5.°—finalmente, desde el punto C como centro, con el radio EI, *trácese* una circunferencia.

Asi obtenemos el lugar geométrico pedido.

En efecto, en virtud de la construccion, tenemos

$$EI = \tfrac{1}{2}EK = \tfrac{1}{2}\sqrt{EG^2 - GK^2} \text{ (n.° 204.)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2 - AB^2}.$$

Discusion. Mientras m sea mayor que $AC\sqrt{2}$, ó CD, el círculo existirá y crecerá desde el límite *cero* hasta el *infinito.*

Sea $m = AC\sqrt{2}$; resulta $MC = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 - 2m^2} = 0$; por consiguiente es *nulo* el radio del círculo.

Sea $m = 2\,AC = AB$; resulta $MC = \frac{1}{2}AB$; donde se ve que el lugar geométrico es la circunferencia descrita sobre AB como diámetro.

Cuando m sea mayor que AB, el círculo buscado será tambien mayor que el círculo CA. Por consiguiente el lugar geométrico unas veces es mayor, y otras menor que este último círculo.

PROBLEMA XI. (*Fig.* 194.) Fig. 194.

N.° 285. *Dados dos puntos* [A y B] *sobre un plano, hallar otro punto* M *tal, que la diferencia de los cuadrados de las distancias de este tercer punto á los dos primeros, sea igual á un cuadrado dado* n^2.

ANALÍSIS. Bájese desde el punto M la MD perpendicular á AB; y deberemos tener, por hipótesis,

$$MA^2 - MB^2 = n^2;$$

pero los triángulos rectángulos MDA, MDB, dan tambien

$$MA^2 = MD^2 + AD^2, \qquad MB^2 = MD^2 + BD^2;$$

luego $$MA^2 - MB^2 = AD^2 - BD^2;$$

y por consiguiente,

$$AD^2 - BD^2 = n^2. \quad (1)$$

Esto nos enseña que todos los puntos susceptibles de satisfacer al enunciado se encuentran colocados sobre una perpendicular á la recta AB, levantada en un punto D de la misma, que cumple tambien las condiciones del enunciado.

Facilmente, se puede determinar la posicion de este punto, pues si dividimos miembro á miembro la igualdad (1) por la igualdad evidente

$$AD + DB = AB,$$

resulta $$AD - BD = \frac{n^2}{AB};$$

de donde, combinando por adicion y por sustraccion estas dos últimas igualdades, y dividiendo luego por 2, se saca

$$AD = \tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{AB}, \quad BD = \tfrac{1}{2} AB - \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{AB};$$

lo cual conduce á la construccion siguiente:

Síntesis. Despues de *tomar* el punto medio C de AB, *construyase* (n.° 269.) una tercera proporcional á las líneas AB y n; *tómese* desde C hasta D la mitad de esta tercera proporcional, y *levántese* la perpendicular indefinida DL.

Esta perpendicular es el lugar geométrico pedido.

Advert. Como en virtud del enunciado nada indica que el cuadrado de la distancia MA sea mayor ó menor que el cuadrado de la distancia MB, se infiere que tomando á la izquierda del punto C una distancia $CD' = CD$, y levantando la perpendicular D′L′, tendremos igualmente una solucion de la cuestion.

Luego, finalmente, el lugar buscado es el *sistema de dos rectas perpendiculares* á la recta AB que junta los dos puntos dados, *tiradas á una distancia del medio* C, *igual á la mitad de una tercera proporcional á la distancia* AB *y al lado* n *del cuadrado dado.*

Escolio. La propiedad espresada por la relacion

$$MA^2 - MB^2 = AD^2 - BD^2 = n^2$$

da lugar á consecuencias que nos proponemos desenvolver en un apéndice.

Corolario á los dos problemas precedentes:

Dados dos puntos en un plano, hallar otro punto tal, que — 1.° — *la suma de los cuadrados de sus distancias á los dos puntos dados sea igual á un cuadrado dado;* — 2.° — *que la diferencia de los cuadrados de las mismas distancias sea igual á otro cuadrado tambien dado.*

Síntesis. *Constrúyase* (n.° 284.) el lugar de los puntos que satisfacen á la primera condicion, y despues (n.° 285.) el lugar de los puntos que satisfacen á la segunda.

Los puntos de interseccion de estos dos lugares geométricos serán los puntos pedidos.

Generalmente se obtienen *cuatro* soluciones; pero hay aqui lugar á una discusion.

La resolucion que acabamos de dar nos enseña que muchas veces la solucion de un problema *determinado* depende de la de otros *indeterminados*.

§. III. *Problemas numéricos.*

Nos reduciremos en este párrafo á las principales aplicaciones, y haremos casi todos los cálculos por medio de logaritmos.

Problemas sobre las líneas.

PROBLEMA I. (*Fig.* 100.) Fig. 100.

N.° 286. *Dados en un triángulo* ABC, *dos lados* CA $= 8^{vs.},76$, CB $= 5,26$, *y la perpendicular* [CD $= 4,38$] *bajada sobre el tercer lado desde el vértice del ángulo comprendido por los otros dos, hallar dicho tercer lado.*

Observemos ante todo que para construir este problema sería necesario, despues de levantar en un punto cualquiera D de una recta indefinida AX, una perpendicular, — 1.° — *tomar* DC igual á la perpendicular dada; — 2.° — *describir* haciendo centro en C, con la distancia dada CA, un arco de círculo que cortará á la recta AX en un punto A; — 3.° — *describir* haciendo centro en el mismo punto, con el radio CB que se da $<$ CA, pero $>$ CD, otro arco de círculo que encontrará á AX en dos puntos B, B′:

Los dos triángulos CAB, CAB′ satisfarán igualmente á la cuestion. [*Véase* ademas el n.° 167.].

Esto supuesto, la figura da

$$AB = AD + BD, \quad ó \quad AB' = AD - B'D.$$

Todo pues se reduce á calcular los dos segmentos AD, BD.

Los cálculos logarítmicos son los siguientes: tenemos

$$AD = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(CA + CD)(CA - CD)},$$

y $$BD = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(CB + CD)(CB - CD)}.$$

1.° CA= 8,76 log. 13,14=1,1185954
CD= 4,38 log. 4,38=0,6414741

de donde CA+CD=13,14 2log. AD=1,7600695
CA—CD= 4,38 log. AD=0,8800347; luego AD= 7,5864

2.° CB= 5,26 log. 9,64=0,9840770
CD= 4,38 log. 0,88=$\bar{1}$,9444827

de donde CB+CD= 9,64 2log. BD=0,9285597
CB—CD= 0,88 log. BD=0,4642798; luego BD= 2,9126,

y por consiguiente. . . . . AB =AD+DB=10,4990
y . . . . AB'=AD—DB'= 4,6738.

Luego el lado pedido vale $10^{vs.}$,50, ó 4,67; valor aproximado hasta *centésimas*.

Fig. 100

PROBLEMA II. (*Fig.* 100.)

Dados en un triángulo ABC', *los lados* CA = 128,49 *varas*, AB = 88, *y la perpendicular* CD = 96,45, *bajada desde el vértice* C *sobre el lado* AB, *hallar el tercer lado* CB.

Tratando de construir este problema, se conoceria facilmente que solo puede tener *una* solucion; y el triángulo pedido será CAB ó CAB', segun se obtenga para valor numérico del segmento AD, un número mayor ó menor que el lado dado AB.

Hé aqui el cálculo relativo á AD:

$$AD=\sqrt{CA^2-CD^2}=\sqrt{(CA+CD)\ (CA-CD)}$$

CA=128,49 log.224,94=2,3520667
CD= 96,45 log. 32,04=1,5056925

de donde CA+CD=224,94 2log.AD=3,8577592
CA—CD= 32,04 log.AD=1,9288796; luego AD=84,8945.

Como hallamos AD < AB, inferimos que es el triángulo ACB el que satisface á la cuestion; ahora bien tenemos AB=88;
por consiguiente, ... DB= 3,1055.

Para el cálculo de CB, el triángulo rectángulo CBD da

$$CB=\sqrt{CD^2+DB^2}=\sqrt{(96,45)^2+(3,1055)^2},$$

espresion que no puede calcularse directamente por logaritmos; pero que por medio de las operaciones comunes da

$$CB = 96^{vs.},50,$$

valor aproximado hasta *centésimas.*

Problema III.

Cortándose dos cuerdas en el círculo, valiendo respectivamente 13 *varas y* 25 *varas los dos segmentos de la una, y hallándose los dos segmentos de la otra en la razon de* 4 *á* 7, *se quiere saber cuánto vale esta última.*

Sean x y z los dos segmentos de la cuerda buscada. Segun el enunciado, tenemos las dos ecuaciones

$$\frac{x}{z}=\frac{4}{7},\quad xz=13\times25;$$

de donde, multiplicando miembro á miembro,

$$x^2=\frac{4\times13\times25}{7} \text{ y } x=\sqrt{\frac{4\times13\times25}{7}}=\sqrt{\frac{1300}{7}}=13,627;$$

luego $\qquad z=x\times\frac{7}{4}=\frac{95,389}{4}$ . . . . $=\underline{23,847}$

y por consiguiente, $\quad x+z$ . . . . $=37,474$

Asi pues la cuerda buscada vale 37,47 varas aproximada hasta *centésimas.*

Problema IV.

Hallar en varas la longitud de un arco de $45^\circ\,20'$, *en un círculo cuyo radio vale* 5,4 *varas.*

Tenemos desde luego $45^\circ\,20'=\frac{2720}{5400}=\frac{68}{135}$ del *cuadrante* (n.° 120.); luego (n.° 259.) $a=\frac{68}{135}\times\frac{\pi}{2}\times5,4=\frac{34\times\pi\times5,4}{135}.$

Apliquemos los logaritmos.

$$\begin{aligned} \log.\ 34 &= 1{,}5314789 \\ \log.\ \pi &= 0{,}4971499 \\ \log.\ 5{,}4 &= 0{,}7323938 \\ \text{Comp. } \log.\ 135 &= 7{,}8696663 \\ \hline \log.\ a &= 0{,}6306889 \end{aligned}$$

de donde $a = 4{,}2726$

Luego el arco rectificado vale 4,2726 varas, valor aproximado hasta *diez milésimas.*

Problemas sobre las areas.

N.° 287. Empezaremos por determinar una espresion del area de un *triángulo*, que pueda facilmente calcularse por logaritmos y que sea únicamente funcion de sus lados.

Fig. 40. Sea ABC (*fig.* 40) el triángulo propuesto. Llamemos a, b, c, los lados respectivamente opuestos á los ángulos A, B, C; y designemos por h la altura CD, y por x la distancia AD.

Esto supuesto, los dos triángulos rectángulos ACD, BCD, dan las relaciones $h^2+x^2=b^2$, $h^2+(c-x)^2=a^2$;

de donde, restando miembro á miembro,

$$2cx-c^2=b^2-a^2, \text{ y } x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c};$$

pero de la relacion $h^2+x^2=b^2$, se deduce $h=\sqrt{b^2-x^2}$; luego sustituyendo en este valor el que acabamos de obtener para x, tendremos

$$h=\sqrt{b^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}}=\frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}.$$

Ahora bien, el area del triángulo ABC tiene por valor $c\times\frac{h}{2}$;

luego (1) $\quad ABC=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}.$

Ya se ve que esta espresion no contiene mas que los tres lados del triángulo a, b, c. Pero se le puede dar una transformacion que la haga particularmente adecuada al cálculo logarítmico.

Observemos primeramente que siendo la cantidad algebráica

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2,$$

la diferencia de dos cuadrados, puede descomponerse en

$$(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2).$$

El primero de estos factores equivale á

$(b+c)^2 - a^2$, y por consiguiente á $(b+c+a)\,(b+c-a)$.

El segundo factor equivale á

$a^2 - (b-c)^2$, y por consiguiente á $(a+b-c)\,(a-b+c)$.

Luego tenemos $4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$
$= (a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)$.

Hagamos $a+b+c=2p$ [designando en este caso p el semi-perímetro]; y tendremos sucesivamente

$$b+c-a = 2p - 2a = 2\,(p-a),$$
$$a+c-b = 2p - 2b = 2\,(p-b),$$
$$a+b-c = 2p - 2c = 2\,(p-c);$$

de donde $4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = 16p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$,

y sustituyendo en el valor del triángulo ABC,

$$ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ó, reduciendo, (2) $ABC = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$.

Lo cual prueba que, — *Conociendo los tres lados de un triángulo, para obtener la espresion numérica de su area, es necesario*, — 1.º — *hacer la semi-suma de los tres lados*; — 2.º — *restar de ella* alternativamente *cada uno de los tres lados*; — 3.º — *formar el producto de la semi-suma y de las tres diferencias*; — 4.º — en fin, *estraer la raiz cuadrada del producto.*

Esta espresion es adecuada al cálculo logarítmico, y para hacerlo ver presentamos la aplicacion siguiente:

Sean $a = 4,^{vs.}25$, $b = 6,84$, $c = 9,47$.

Tabla del cálculo.

$a = 4,25$	$p = 10,28$	$p = 10,28$	$p = 10,28$
$b = 6,84$	$a = 4,25$	$b = 6,84$	$c = 9,47$
$c = 9,47$	$p-a = 6,03$	$p-b = 3,44$	$p-c = 0,81$
$a+b+c = 20,56$; luego $p = 10,28$.			

$$\begin{aligned}
\log. p &= \log. 10,28 = 1,01199311 \\
\log. (p-a) &= \log. 6,03 = 0,78031731 \\
\log. (p-b) &= \log. 3,44 = 0,53655844 \\
\log. (p-c) &= \log. 0,81 = \bar{1}90848502 \\
\hline
2 \log. ABC &= 2,23735388 \\
\log. ABC &= 1,11867694
\end{aligned}$$

luego ABC $= 13^{v.c.},1424$, valor aproximado hasta *diez milésimas*.

ESCOLIO. Hemos hallado (n.os 216., 217.) para espresiones de los radios r, r', del círculo inscrito y del círculo circunscrito á un triángulo,

$$r = \frac{2s}{a+b+c}, \qquad r' = \frac{abc}{4s},$$

siendo s el area del triángulo.

Tenemos por consiguiente

$$r = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c}, \quad r' = \frac{a.b.c.}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

que son los valores de r, r', espresados solo en funcion de los lados; y que pueden tambien calcularse por logaritmos.

Continuemos ahora resolviendo problemas.

PROBLEMA V.

N.º 288. *Tenemos un triángulo cuya area vale 24 varas, y cuyos lados son entre sí como 3 : 4 : 5; — se quiere saber la longitud de los lados.*

Tenemos, en virtud del enunciado,

$$a=\tfrac{3}{5}c, \qquad b=\tfrac{4}{5}c;$$

de donde $2p=\frac{12}{5}c$, $p=\frac{6}{5}c$, $p-a=\frac{3}{5}c$, $p-b=\frac{2}{5}c$, $p-c=\frac{1}{5}c$.

Aplicando la fórmula (2) del número 287., resulta

$$24=\sqrt{\tfrac{6}{5}c.\tfrac{3}{5}c.\tfrac{2}{5}c.\tfrac{1}{5}c}=\tfrac{6}{25}c^2,$$

lo cual da $c^2=\dfrac{25\times24}{6}=100$, de donde $c=10$.

Luego $a=\frac{3}{5}.10=6$, $b=\frac{4}{5}.10=8$.

Asi pues los tres lados son 6, 8, 10, varas.

Advert. Este triángulo debe ser rectángulo; porque da

$$6^2+8^2=10^2.$$

Problema VI.

Dado el lado 0,25 *varas de un cuadrado, hallar el lado* c *de un triángulo equilátero que le sea equivalente.*

La fórmula (2) del número 287 se convierte en

$$(0{,}25)^2=\sqrt{\frac{3c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}}\,.=\frac{c^2}{4}\sqrt{3};$$

de donde, tomando los logaritmos,

$$2\log.c=\log.4+2\log.0{,}25+comp.\ \tfrac{1}{2}\log.3.$$

Ahora bien,
$$\begin{aligned}\log.4&=0{,}60205999\\ 2\log.0{,}25&=\bar{2}{,}79588002\\ comp.\ \tfrac{1}{2}\log.3&=9{,}76143938\end{aligned}$$

luego $2\log.c=\bar{1}{,}15937939$

$\log.c=\bar{1}{,}57968969$

de donde $c=0^{vs.},37994$, aproximado hasta *cien milésimas.*

PROBLEMA VII.

Se desea saber el número de rollos de papel que se necesitan para forrar una sala rectangular de 15,76 *varas de largo*, 8,24 *de ancho. Su altura es de* 4,87 *varas, pero el arteson tiene* 0,37. *Cada rollo de papel tiene* 10 *varas de largo, y su anchura es* 0,6.

Observemos ante todo que la altura de la parte que debe forrarse es 4,87 — 0,37, ó lo que es lo mismo, 4,50.

Esto supuesto, tenemos
por una parte, 2 rectángulos de 15,76 varas de base sobre 4,50 de altura; lo cual hace $15,76 \times 9 = 141,84$ varas cuad.;
de otra parte, 2 rectángulos de 8,24 de base sobre 4,50 de altura; lo cual hace $8,24 \times 9 = \underline{74,16}$ varas cuad.;
luego la superficie total que se debe cubrir es 216,00. varas cuad.

Dividiendo 216 por 0,6, anchura del papel, se hallan 360 varas, ó 36 rollos de á 10 varas.

Comprobacion.

El contorno de la sala $= (15,76 + 8,24) \times 2 = 48$ varas;

pero $$\frac{48}{0,6} = 80;$$

luego se necesitan 80 anchuras de papel para rodear el contorno, y por consiguiente $80 \times 4,50$ varas ó 360 varas, ó finalmente 36 rollos de á 10 varas de longitud cada uno.

Fig. 124.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 124.)

Dados los tres lados de un triángulo ABC [$AB = c = 35$ *varas*, $AC = b = 30$ *varas*, $BC = a = 28$ *varas*], *repartirle en dos partes equivalentes por medio de una recta* B″C″ *paralela al lado menor.*

Tomemos por incógnita del problema la distancia $AB'' = x$; y tendremos (n.° 220.)

$$ABC : AB''C'' :: AB^2 : AB''^2 :: c^2 : x^2 :: 2 : 1;$$

de donde $x^2 = \frac{1}{2}c^2$ y $x = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$;

lo cual prueba que el valor de x es independiente de los otros dos lados a, b, del triángulo.

Sustituyendo en este valor en lugar de c, 35, se encuentra

$$x = \tfrac{1}{2} . 35 \sqrt{2} = 24{,}748.$$

Problema IX.

Calculár el area S *de un octógono regular cuyo lado* [c] *tiene* 0,25 *varas de largo.*

Sean r y r' el radio y el apotema del octógono dicho; con cuyos supuestos tendremos las dos igualdades

$$(1) \qquad S = 4cr' \quad \text{y} \quad r' = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}c^2},$$

donde se ve que para obtener el valor de S bastaria conocer el de r.

Designemos pues por C el lado del cuadrado inscrito correspondiente al octógono que tiene el lado c, y tendremos (n.° 235.)

$$c^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - C^2};$$

igualdad que, á causa de ser $C^2 = 2r^2$ (n.° 238.), se convierte en

$$c^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2} = r^2(2 - \sqrt{2});$$

de donde se saca

$$r^2 = \frac{c^2}{2 - \sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}c^2(2 + \sqrt{2}).$$

Sustituyendo este valor de r^2 en la segunda de las dos relaciones (1), se obtiene

$$r' = \sqrt{\tfrac{1}{2}c^2(2 + \sqrt{2}) - \tfrac{1}{4}c^2} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Luego $S = 2c^2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2\,(0{,}25)^2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$;

ó, aplicando los logaritmos,

$$\log. S = \log. 2 + 2\log.(0{,}25) + \tfrac{1}{2}\log.(3 + 2\sqrt{2})$$

Pero $$2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{8} = 2,8284;$$

de donde $$3 + 2\sqrt{2} = 5,8284.$$

Podremos pues formar el siguiente cálculo:

$$\log. 2 = 0,3010300,$$
$$2 \log. 0,25 = \bar{2},7958800 \text{ (n.° 288., } \textit{problema} \text{ VI)},$$
$$\tfrac{1}{2} \log. 5,8284 = 0,3827746,$$

$$\log. \mathrm{S} = \bar{1},4796846.$$

Luego, finalmente, $\mathrm{S} = 0^{\text{v.c.}},301777$, valor aproximado hasta el punto de faltarle menos de *una millonésima* de vara cuadrada para ser el verdadero.

Advert. Podria haberse simplificado este cálculo observando que $3 + 2\sqrt{2}$ es el cuadrado de $1 + \sqrt{2}$; de donde

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2};$$

y la fórmula logarítmica sería

$$\log. \mathrm{S} = \log. 2 + 2 \log. (0,25) + \tfrac{1}{2} \log. (1 + \sqrt{2},$$

de modo que bastaria estraer la raiz cuadrada de 2 y añadirle 1 para obtener el valor de $1 + \sqrt{2}$.

Problemas sobre las figuras circulares.

Problema X.

N.° 289. *Dada el area de un círculo igual á* $33^{\text{v.c.}},1830$, *hallar su radio* (r).

Tenemos $$\pi r^2 = 33,1830 \text{ (n.° 250.)};$$

de donde, aplicando los logaritmos,

$$2 \log. r = \log. 33,1830 + \textit{comp.} \log. \pi,$$

cálculo sencillísimo que da

$r = 3,25$ varas, valor aproximado hasta *diez milésimas.*

PROBLEMA XI.

Determinar el area (S) *de un segmento de círculo cuyo arco vale la mitad de un cuadrante, siendo el radio* r *del círculo igual á* 3,15 *varas.*

Tenemos, desde luego

$$S=\tfrac{1}{2}r\left(arco\ 50^g - \tfrac{1}{2}r\sqrt{2}\right)\ (\text{n.}^\circ\ 251.,\ corol.),$$

y despues $\quad arco\ 50^g = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot r = \frac{1}{4}\pi\cdot r$ (n.° 259.).

Luego $\quad S=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\frac{1}{8}r^2(\pi-2\sqrt{2});$

ó, sustituyendo por r^2 su valor $(3,15)^2$,

$$S=\tfrac{1}{8}(3,15)^2(\pi-2\sqrt{2}),$$

$$\pi=3,1416,\quad 2\sqrt{2}=2,8284;$$

de donde $\quad \pi-2\sqrt{2}=0,3132;$

lo cual da

$$\log. S=2\log.(3,15)+\log. 0,3132+comp.\log. 8-10,$$

y por consiguiente, $\quad S=0^{v.c.},388423.$

PROBLEMA XII.

Suponiendo que el lado a *de un triángulo equilátero tiene* 5,8 *varas de largo, hallar las superficies* s *y* s' *del círculo inscrito y del círculo circunscrito.*

Tenemos por espresion general de un círculo circunscrito

á un triángulo, $\quad s'=\frac{1}{3}\pi\cdot a^2\quad$ (n.° 217.),

y por consiguiente $\ s'=\frac{1}{3}\pi(5,8)^2;$

de donde $\quad \log. s'=\log.\pi+2\log.(5,8)+comp.\log.3-10,$

y por consiguiente $\ s'=35^{v.c.},2277.$

Respecto del círculo inscrito, como su radio es la mitad del radio del circunscrito (n.° 237., *corol.* 2.°), resulta

$$S=\tfrac{1}{4}s'=8^{v.c.},8069.$$

APÉNDICE

Á LOS DOS LIBROS PRIMEROS.

Introduccion. Investigaciones puramente especulativas sobre la Geometría plana han conducido á los geómetras á propiedades muy curiosas, y muy útiles luego en la resolucion de varios problemas, que sin su ausilio presentarian gravísimas dificultades.

Todas ellas pueden reducirse á un corto número de teorias, cuya esposicion sucinta será el objeto de la *primera seccion* de este *Apéndice*, consagrándose la *segunda*, segun hemos dicho en el número 23, á consideraciones generales sobre las figuras curvilíneas, con algunas nociones sobre las curvas mas útiles y notables. — Cada seccion tendrá dos párrafos.

Como las teorías que vamos á esponer deben formar un capítulo enteramente especial y distinto del *Curso elemental*, interrumpimos el orden de los *números* seguidos hasta aqui, advirtiendo sin embargo que siempre que tengamos que citar un número del Apéndice, añadiremos á la cifra la abreviatura [*Apénd.*]; en las *figuras* conservaremos el orden de los *números* primitivos.

PRIMERA SECCION.

§. I. *Centros y ejes de simetría. — Polígonos simétricos. — Centros de distancias medias. — Centros de semejanza. — Ejes radicales.*

Centros de simetría.

Fig. 195 y 195*.

TEOREMA I. (*Fig.* 195 *y* 195*.)

N.° 1. *Cuando los vértices*, A *y* A′, B *y* B′, C *y* C′, . . . , *de dos polígonos* (*fig.* 195), *ó de un mismo polígono* (*fig.* 195*), *estan situados, de dos en dos, en rectas concurrentes á un mismo punto interior* O, *y á distancias iguales de este punto:*

1.° *Los lados* AB *y* A′B′, BC *y* B′C′,...., *son iguales, paralelos, y de sentidos contrarios;*

2.° *Toda recta*, tal como MN, *que pase por el punto* O, *y termine en dos lados opuestos, queda dividida por dicho punto en dos partes iguales.*

En efecto:—1.°—Los dos triángulos OAB, OA′B′, son iguales por tener un ángulo igual O, formado por dos lados respectivamente iguales [OA = OA′, OB = OB′]. Luego AB = A′B′, y *ángulo* OBA = *ángulo* OB′A′; asi pues los lados opuestos AB, A′B′, son iguales, paralelos y colocados en sentido contrario.—El mismo raciocinio hariamos para los otros pares de lados.

2.° Puesto que los lados AB, A′B′ (*fig.* 195), y AD′, DA′ (*fig.* 195*), son iguales y paralelos, la figura ABB′A′ ó AD′A′D es un paralelógramo cuyas diagonales son AA′, BB′, ó AA′, DD′, y el centro O; luego OM = ON (n.° 76.).

N.° 2. Definiciones.—El punto O, que tiene la propiedad de dividir en dos partes iguales á todas las líneas que, pasando por él, terminan, ya en contorno del polígono (*fig.* 195*), ya en dos lados iguales y opuestos (*fig.* 195), se llama el *centro de simetría*, ó simplemente *centro* de la figura; y las rectas MN, AA′, BB′,...., podrian llamarse *diacentros* por su propiedad de pasar por el centro (*).

Corolario. Todo polígono que tiene un *centro de simetría* es necesariamente de número par de lados; consecuencia evidente del ~~teorema~~. hipótesis.

N.° 3. Escolio 1.° La recíproca es *verdadera* y se demostraria sin dificultad alguna.—Asi pues:

Cuando dos polígonos (*fig.* 195), *ó un polígono* (*fig.* 195*), *tienen los lados iguales, paralelos y colocados en sentido contrario de dos en dos, deben tener un centro de simetría.* Fig. 195 y 195*.

Asi, todos los *paralelógramos* [y como caso particular el rombo, el rectángulo y el cuadrado] tienen un centro de simetría; y son los únicos cuadriláteros que pueden tenerle.

Todos los polígonos regulares de número *par* de lados tienen un centro de simetría; que es el punto que antes hemos llamado *centro del polígono regular* (n.° 132.).

Escolio 2.° Sería facil demostrar, empleando el medio indicado en el número 46, ó en la nota al pie de la página 55, que los dos polígonos (*fig.* 195), ó las dos porciones de polígono (*fig.* 195*), son directamente superponibles, por *rotacion* en torno de su centro.

(*) Regularmente suelen llamarse *diámetros* estas rectas; pero ese nombre conviene mejor á las que se esplicarán en el número 7.

De los ejes de simetría.

N.° 4. Definiciones. — Se dice que dos puntos A y A′ (*fig.* 196) estan *simétricamente* colocados respecto de una recta XY, cuando esta recta es perpendicular á la que junta los dos puntos, dividiéndola á la vez en dos partes iguales.

Fig. 196. Con mas generalidad, dos polígonos ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 196), [ó dos porciones de un mismo polígono, ABCD,
Fig. 196*. A′B′C′D′ (*fig.* 196*)], se dicen *simétricamente* colocados respecto de una recta XY, cuando esta recta es perpendicular á las que juntan de dos en dos los vértices A y A′, B y B′,. . ., de los dos polígonos [ó de las dos porciones de un polígono], dividiéndolas á la vez en dos partes iguales.

Entonces la recta XY se llama *eje de simetría.*

Por ejemplo, el *diámetro* de un círculo, la *línea de los centros* de dos círculos, la *bisectriz* de un ángulo cualquiera, ó del ángulo de la cúspide de un triángulo isósceles, las bisectrices de los ángulos de un polígono regular, ó de sus ángulos en el centro, etc., son otros tantos *ejes de simetría* en sus respectivas figuras.

Es evidente ademas que los dos polígonos (*fig.* 196), ó las dos partes de un polígono (*fig.* 196*), son superponibles por rebatimiento al rededor de la recta XY.

N.° 5. *Del trapecio isósceles ó simétrico.* — Un trapecio
Fig 197. ABDC (*fig.* 197), cuyos lados AC, BD, son iguales, y que puede por esta razon llamarse *isósceles*, tiene por *eje de simetría* la recta EF que junta los puntos medios de las dos bases; — porque de ser AE = EB, CF = FD, resulta que las tres rectas AC, EF, BD, concurren en un mismo punto I (n.° 201, *recíproca*); y siendo el triángulo IAB isósceles á causa de tener AC=BD (n.° 183.), resulta que IE es la bisectriz del ángulo AIB; luego, etc.

El trapecio *isósceles* ó *simétrico* ABDC, goza ademas de otra propiedad muy notable, que es la de ser *inscriptible* (n.° 121.). En efecto, siendo IE un eje de simetría, los dos triángulos IEA, IEB, son superponibles por rebatimiento al rededor de IE; luego las perpendiculares levantadas sobre AC, BD, en sus puntos medios K, L, se cortan en un mismo punto O de IE, cuyo punto es entonces el centro de un círculo que pasa por los vértices A, B, D, C.

Fig. 198. Teorema H. (*Fig.* 198.)

N.° 6. *Toda figura que tiene dos ejes de simetría*, XY, ZV, *perpendiculares entre sí, tiene por centro de simetría el punto de interseccion* O *de dichos dos ejes.*

Para demostrarlo, desde un punto cualquiera M del perímetro, bajénse sobre XY, ZV, las perpendiculares MPM′, MQM″.—La recta OQ, siendo igual y paralela á PM, es tambien igual y paralela á PM′; luego las rectas PQ, OM′, son tambien iguales y paralelas (n.° 74.).—Del mismo modo se probaria que PQ es igual y paralela á OM″; de donde se infiere que las rectas OM′, OM″, son prolongacion una de otra (n.° 34.), y dan ademas OM′ = OM″.

Asi pues, dividiendo el punto O á una recta cualquiera M′M″ en dos partes iguales, es un *centro de simetría* (n.° 2, *Apénd.*);

L. C. D. D.

Escolio 1.° Los dos ejes rectangulares XY, ZV, dividen á la figura en *cuatro partes iguales.*—Las partes adyacentes son superponibles por *rebatimiento*, y las partes opuestas por *rotacion.*

Hay pues *dos* clases de *posicion simétrica* en un plano, una respecto de un punto, otra respecto de una recta. Los polígonos de la primera clase son superponibles *directamente*, es decir, por una simple *rotacion* al rededor del centro; mientras que los otros son superponibles *inversamente*, es decir, por *rebatimiento*. Estos últimos son los únicos que deben considerarse como *simétricos* en cuanto á la *forma*, es decir, como *inversos*, ó simplemente como *simétricos* en el sentido *absoluto* de esta palabra.

Puede obtenerse el simétrico de un triángulo ABC (*fig.* 199) [ó en general de un polígono cualquiera], haciéndole girar en torno de uno de sus lados AB, como *charnela*, para rebatirle del otro lado en la segunda region del plano, dándole la posicion ABC′.—En este caso, el *reves* ó *reverso* del triángulo se hace simétrico del *derecho* ó *anverso*,—y *recíprocamente* (*véase* el número 18.). Fig. 199.

Pero, segun hemos esplicado en el número 62, las figuras de esta clase, por una serie de movimientos convenientes, pueden siempre reducirse á tal posicion, que los lados se hagan paralelos, esten en el mismo sentido, y se hallen todos situados en un mismo plano.

Escolio 2.° Todas las proposiciones esplicadas números 1, 2, 3, 4 y 6 de este Apéndice son aplicables á los polígonos *cóncavos*, aunque, en las figuras que nos han servido para las demostraciones, solo hemos considerado polígonos *convexos*.—Tambien se aplican á las figuras curvilíneas si, generalizando lo que hemos dicho respecto del círculo en el número 245, se considera una figura curvilínea como un polígono *de infinito número de lados infinitamente pequeños.*

De los diámetros.

Fig. 200.

TEOREMA III. (*Fig.* 200.)

N.° 7. *Cuando los vértices* B y B′, C y C′,...., *de dos polígonos, ó de un mismo polígono, estan situados de dos en dos sobre rectas paralelas entre sí, y divididas en dos partes iguales por una misma recta* MEDIANA, *esta recta mediana divide tambien en dos partes iguales á cualquier otra recta* MM′ *paralela á las primeras* BB′, CC′,...

[Por esta razon se llama *diámetro* del polígono.]

Los vértices B y B′, C y C′,...., se llaman vértices *homólogos;* y lo mismo los lados AB y A′B′, BC y B′C′, BD y B′D′,...., que juntan vértices homólogos.

Esto supuesto, para demostrar que MM′ queda dividida en dos partes iguales por XY, prolónguense los lados homólogos CD, C′D′, hasta encontrar con la recta XY. — Puesto que, en virtud del enunciado, las porciones C*c* y *c*C′, D*d* y *d*D′, de las rectas paralelas CC′, DD′, son iguales, se sigue (n.° 202, *recíproca*) que las rectas CD, C′D′, deben concurrir en un mismo punto de XY; luego tambien tenemos (n.° 202.) M*m* = *m*M′;

L. C. D. D.

ESCOLIO 1.° Esta propiedad de los lados homólogos, de concurrir en un mismo punto del diámetro XY, conviene tambien, como sería facil probarlo, á las rectas que juntan puntos homólogos cualesquiera, entendiendo por puntos *homólogos*, aquellos pares de puntos tales que la recta que los junta es paralela á las rectas BB′, CC′,...., y queda dividida en dos partes iguales por el diámetro.

Ademas, las *perpendiculares* CP, C′P′, bajadas desde dos vértices homólogos [y, en general, desde dos puntos homólogos cualesquiera], son iguales: porque los dos triángulos rectángulos *c*PC, *c*P′C′, son evidentemente iguales.

En fin, las *dos porciones de figuras* ABCDE, AB′C′D′E, son *equivalentes*, por estar compuestas de triángulos y de trapecios que tienen de dos en dos la misma base y la misma altura.

Advert. Hallándose comprendidas en las que acabamos de hablar las figuras *simétricas* respecto de un eje, poseen todas las propiedades esplicadas, presentando ademas estas dos particularidades: — 1.ª — que se confunden los pies de las perpendiculares bajadas desde los vértices homólogos sobre el eje de simetría; — 2.ª — que las porciones de figura ABCDE, A′B′C′D′E′, son *iguales* y *superponibles* [inversamente] en el caso de simetría, siendo solo *equivalentes* en el caso general.

Escolio 2.° En todo triángulo CAB (*fig.* 63), cada una de las rectas que juntan los vértices con los respectivos puntos medios de los lados opuestos, es un *diámetro*, porque divide en dos partes iguales (n.° 201.) á toda recta paralela al lado correspondiente del triángulo; y lo mismo sucede en un trapecio cualquiera, respecto de la recta que junta los puntos medios de las dos bases. Fig. 63.

Centro de las distancias medias.

N.° 8. Proposicion preliminar. —Sea ABCDE (*fig.* 201) un poligono cualquiera.—Júntense los puntos medios consecutivos, M, N, P, Q, R, de los lados AB, BC, CD,...; y se obtendrá un nuevo polígono MNPQR cuyo perímetro y area son evidentemente mas pequeños que el perímetro y area del primero. Operando con el segundo como con el primero, se obtendrá un tercer polígono M′N′P′Q′R′ menor que el segundo; y asi sucesivamente. Fig. 201.

Continuando indefinidamente estas operaciones, debe necesariamente llegarse á un polígono *infinitamente pequeño* cuyos vértices estarán tan juntos, que se podrán considerar como confundidos en un solo punto O, el cual en cierto modo formará un *grupo* de tantos puntos como vértices habia en el polígono primitivo. —Este punto es ademas *único* en el plano del polígono, puesto que resulta de la reunion sucesiva de puntos fijos y determinados de posicion en el plano. Ademas goza de una propiedad muy notable, que será el objeto del teorema siguiente.

Teorema IV. (*Fig.* 202.) Fig. 202.

N.° 9. *Hay en el plano de todo polígono* ABCDE [*convexo ó cóncavo*] *un punto único* G *tal, que su distancia* GG′ *á una recta cualquiera* XY *tirada en el plano, es igual al cociente de la division de la suma de las distancias* AA′, BB′,..., *de los vértices del polígono á dicha recta, por el número* n *de los vértices;* — es decir que da

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC' + \ldots}{n}.$$

[Consideramos aqui un pentágono; pero la demostracion que vamos á dar es general.]

Tómense los puntos medios M, N, P, Q, R, de los lados del poligono, y bájense desde ellos las perpendiculares MM′, NN′, PP′,..., sobre la recta XY.

Esto supuesto, tenemos separadamente (n.° 82.)

$$MM'=\frac{AA'+BB'}{2},\ NN'=\frac{BB'+CC'}{2},\ PP'=\frac{CC'+DD'}{2},$$

$$QQ'=\frac{DD'+EE'}{2},\ RR'=\frac{EE'+AA'}{2};$$

de donde, sumando estas igualdades miembro á miembro,

$$MM'+NN'+PP'+QQ'+RR'=AA'+BB'+CC'+DD'+EE'.$$

Operando ahora con MNPQR como hemos operado con ABCDE, obtendremos un segundo polígono tal, que la suma de las distancias de todos sus vértices á la recta XY será igual á la suma de las distancias relativas á dicho segundo polígono, y por consiguiente igual tambien á la suma de las distancias relativas al primero; y así sucesivamente.

Luego, designando por G el punto de reunion de los cinco vértices del polígono *infinitamente pequeño* cuya existencia hemos demostrado en el *número* precedente, y por GG' la perpendicular correspondiente, que puede entonces considerarse como un *haz* de cinco rectas iguales á GG', tendremos la relacion

$$(1) \qquad 5.GG'=AA'+BB'+CC'+DD'+EE';$$

de donde se deduce $\quad GG'=\dfrac{AA'+BB'+CC'+DD'+EE'}{5}.$

Luego, en general, $\quad GG'=\dfrac{AA'+BB'+CC'+\ldots\ldots\ldots}{n}.$

Advert. El punto G es lo que se llama *centro de las distancias medias.* — Es evidente que su posicion en nada depende de la direccion dada á la recta XY, pues depende solo de los vértices del polígono.

La recta XY, cuya posicion en el plano es enteramente arbitraria, se llama *eje de las distancias medias.*

Escolio 1.° Hemos supuesto en la figura que el polígono ABCDE estaba situado enteramente á un mismo lado de la recta XY. Pero podemos generalizar mas todavía la proposicion.

Al efecto consideremos una recta *xy* tirada por el punto G paralelamente á XY, y sean *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, los puntos en que las perpendiculares AA', BB',...., se encuentran con *xy*. — Si restamos de la igualdad (1) la igualdad evidente

$$5 . GG' = aA' + bB' + cC' + dD' + eE',$$

resulta (2) $\quad 0 = -aA + bB + cC - dD - eE;$

lo cual prueba que respecto de una recta xy tirada por el punto G, *la diferencia entre la suma de las distancias de todos los vértices situados á un lado y la suma de las distancias de los vértices situados al otro lado*, RESPECTO DE DICHA RECTA, *es igual á cero.*

Consideremos ahora otra recta $x'y'$ paralela á las dos primeras, y tal, que los vértices A, B, C, D, ..., y tambien el punto G, esten situados, unos en una *region* (n.° 11.), otros en otra respecto de ella. Designemos por a', b', c', ..., g', los puntos en que se encuentra con las perpendiculares AA′, BB′, CC′, ...; GG′.

Si añadimos á los dos miembros de la igualdad (2) los de la igualdad

$$5 . Gg' = aa' + bb' + cc' + dd' + ee',$$

resulta $\quad 5 . Gg' = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' - Ee',$

de donde se deduce $\quad Gg' = \dfrac{Aa' + Bb' + Cc' + Dd' - Ee'}{5};$

es decir, que *la distancia del punto* G *á la recta* x′y′ *es igual al cociente de la division de la diferencia entre la suma de las distancias de los vértices situados á un lado y la suma de las distancias de los vértices situados en el lado opuesto, por el número de los vértices.*

Pero ordinariamente se comprenden todas estas diversas proposiciones en el solo enunciado siguiente:

La distancia del punto G *á una recta situada de un modo cualquiera* en el plano de un polígono *es igual al cociente de la division de la suma algebráica de las distancias de todos los vértices á la recta, por el número de los vértices*, significando aqui la palabra *algebráica* que las distancias deben tomarse, segun su sentido, unas con el signo +, y otras con el signo —.

Escolio 2.° De aqui resulta un medio de—*Determinar*, para cualquier polígono, *la posicion del centro de las distancias medias :*

Despues de haber *trazado* en el plano dos rectas que se corten formando un ángulo cualquiera, se *miden* las perpendiculares bajadas desde todos los vértices del polígono á cada una de ellas, cuidando de distinguir las que estan situadas á cada lado de cada recta; y despues *se dividide la suma algebráica* de las distancias relativas á cada recta, *por el número de los vértices.*

Hecho esto, *se tira*, á una distancia marcada por el primer cociente, *una paralela á la primera recta* (n.° 154.), y á una distancia marcada por el segundo cociente, *una paralela á la segunda recta.*

El punto de interseccion de estas dos paralelas es el *centro de las distancias medias.*

Fig. 203. Escolio 3.° En un triángulo cualquiera ABC (*fig.* 203), el centro de las distancias medias es el *punto de concurso* de las tres rectas que juntan los vértices C, A, B, con los puntos medios D, E, F, de los lados opuestos.

En efecto, bájense desde los puntos A y B, las perpendiculares AP, BQ, á la recta CD. — Los dos triángulos rectángulos ADP, BDQ, son iguales, por tener igual la hipotenusa $AD=DB$, é igual un ángulo agudo.

$$\text{Luego} \quad AP=BQ, \quad \text{de donde} \quad AP-BQ=0;$$

lo cual prueba que está satisfecha la igualdad (2) del *escolio* 1.° (*Apénd.*). Luego la recta CD pasa por el centro de las distancias medias. — Del mismo modo se demostraria que este centro se encuentra en las otras dos rectas AE, BF; luego está situado en su interseccion.

El centro de las distancias medias de un cuadrilátero cualquiera es la interseccion de las rectas que juntan los puntos medios de los lados opuestos.

El centro de las distancias medias de un polígono regular es el mismo centro de la figura.

El centro de simetría de un polígono simétrico es tambien centro de distancias medias; — *etc.*

Todas estas proposiciones son fáciles de demostrar.

De los centros de semejanza.

N.° 10. Observacion preliminar. — Vimos en el número 190, que hallándose situados en un mismo plano dos polígonos semejantes P, P′, es siempre posible colocar á uno de ellos, por ejemplo á P′, en una posicion tal, que esten paralelos y en el mismo sentido los lados homólogos de ambos. Pueden aqui presentarse dos casos: ó bien, para satisfacer á esta condicion, basta una simple rotacion del polígono P′ en torno de uno de sus vértices; ó bien, es necesario recurrir (n.° 62.) á su *rebatimiento* al rededor de uno de sus lados, combinado ó no combinado con una rotacion.

Para distinguir estos dos casos, diremos en el primero, que los polígonos son *directamente* semejantes; y en el segundo, que son *inversamente* semejantes.

Tenemos un ejemplo de las dos clases de semejanza, considerando los dos polígonos simétricos ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 196, n.° 4, *Apénd.*), y suponiendo que despues de haber tirado las diagonales AC, AD, y tomado en AB una parte cualquiera A*b*, se tiran las rectas *bc*, *cd*, *de*, respectivamente paralelas á BC, CD, DE (*véase* el número 277.). El polígono A*bcde* es *directamente* semejante al polígono ABCDE, é *inversamente* semejante al polígono A′B′C′D′E′. Fig. 196.

Dos polígonos son directamente semejantes aun cuando sus lados sean paralelos de dos en dos y esten dirigidos en sentido contrario, porque, segun hemos observado en los polígonos dotados de centro de simetría (n.° 6, *Apénd.*), basta una rotacion en torno de dicho centro [ó de un punto cualquiera del plano], para hacer que sus lados sean paralelos y del mismo sentido.

En una palabra, para conocer si dos polígonos son directa ó inversamente semejantes, basta hacerse cargo de si en el caso de tener un lado igual (n.° 189.), podrian superponerse *directa* ó *inversamente* (n.° 277.).

En todo lo sucesivo solo trataremos de polígonos *directamente* semejantes.

N.° 11. *Definicion.* — Se llama CENTRO DE SEMEJANZA un punto colocado del mismo modo respecto de dos polígonos directamente semejantes, es decir, un punto tal, que juntándole con dos vértices, ó en general con dos puntos homólogos cualesquiera, las dos rectas de union corresponden *á una misma direccion*, y *son proporcionales á los lados homológos.*

Las distancias de este punto á los vértices de los puntos homólogos se llaman *radios de semejanza.*

TEOREMA V. (*Fig.* 204 y 204*.) Fig. 204 y 204*.

N.° 12. *Si desde un punto* O *tomado á voluntad en el plano de un polígono* ABCDE, *se tiran rectas á todos los vértices, y en ellas* (*fig.* 204), *ó en sus prolongaciones* (*fig.* 204*), *se toman partes* O*a*, O*b*, O*c*,... *que les sean proporcionales,*

1.° *Los puntos* [*a*, *b*, *c*,...] *asi obtenidos determinarán un segundo polígono* [*abcde*] *semejante al polígono dado;*

2.° *El punto arbitrario* O *será el centro de semejanza de las dos figuras.*

En efecto, — 1.° — Los triángulos OAB, O*ab*, son semejantes por tener un ángulo igual [en O] formado por lados proporcionales; de donde se deduce *ángulo* OBA = *ángulo* O*ba*;

luego (n.° 46.) AB es paralela á ab; y darán la serie de razones iguales $$AB : ab :: OA : Oa :: OB : Ob.$$

Del mismo modo se demostraria el paralelismo de los lados BC, bc, y la existencia de la serie de razones iguales

$$BC : bc :: OB : Ob :: OC : Oc;$$

y asi sucesivamente, de uno en otro triángulo.

Donde se ve que los dos poligonos tienen los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales; luego (n.° 189.) son semejantes.

2.°—Sean M y m, dos puntos homólogos tomados á voluntad en los polígonos ABCDE, $abcde$; y júntese el punto O con ellos dos. Esto supuesto, siendo M y m puntos homólogos, debemos tener (n.° 199.)

$$\text{ángulo } MDC = \text{ángulo } mdc, \text{ y } MD : md :: DC : dc.$$

Ademas, de la semejanza de los triángulos ODC, Odc, se deduce

$$\text{ángulo } ODC = \text{ángulo } Odc, \text{ y } DC : dc :: OD : Od :: MD : md.$$

Asi pues, los triángulos OMD, Omd, son semejantes por tener un ángulo igual $[MDO = mdO]$ formado por lados proporcionales. Pero los tres puntos D, d, O, estan en línea recta; luego tambien lo estan los puntos M, m, O, y deben dar

$$OM : Om :: DC : dc.$$

Lo cual significa, en primer lugar, que toda recta homóloga comun á los dos polígonos pasa por el punto O, y en segundo lugar, que las partes de dicha recta comprendidas entre el punto O y los puntos homólogos, estan en la *razon de semejanza* de los dos polígonos.

Fig. 204. Escolio. El punto O (*fig.* 204), correspondiente al caso en que los lados homólogos de los dos polígonos semejantes son paralelos y estan dirigidos en un mismo sentido, se llama centro de semejanza *esterno*, porque en efecto está situado *al esterior en la prolongacion* de la recta que junta cada par de puntos homólogos; — el centro de semejanza se llama *interno* (*figura* 204*) cuando los lados homólogos son paralelos y estan dirigidos en sentido contrario, porque entonces se halla situado *entre* cada dos puntos homólogos. Fig. 204*.

Debemos sin embargo observar que un centro de semejanza *interno* puede estar *fuera* de los dos polígonos, y que un centro de semejanza *esterno* puede estar *entre* el uno y el otro, porque, segun el enunciado del teorema, el punto O se ha tomado arbitrariamente en el plano.

Teorema VI. (*Fig.* 204 y 204*.) Fig. 204 y 204*.

N.° 13. Recíprocamente:—*Dos polígonos semejantes, cuyos lados homólogos son paralelos de dos en dos y estan dirigidos en un mismo sentido ó en sentido contrario, tienen un centro de semejanza* que es *esterno* en el primer caso, é *interno* en el segundo.

En efecto, júntense primero dos pares de vértices homólogos, A y *a*, B y *b*; prolónguense las rectas de union, A*a*, B*b*, hasta que se encuentren en un puuto O, y júntese sucesivamente el punto O con los puntos C y *c*, D y *d*, E y *e*.—Esto supuesto, siendo AB paralela á *ab*, deben ser semejantes los dos triángulos OAB, O*ab*, y dar

$$AB : ab :: OB : Ob, \quad \text{y} \quad \textit{ángulo}\ ABO = \textit{ángulo}\ abO;$$

pero ademas tenemos

$$AB : ab :: BC : bc, \quad \text{y} \quad \textit{ángulo}\ ABC = \textit{ángulo}\ abc;$$

podemos pues deducir

$$OB : Ob :: BC : bc, \quad \text{y} \quad \textit{ángulo}\ CBO = \textit{ángulo}\ cbO;$$

luego los dos triángulos OBC, O*bc*, son semejantes por tener un ángulo igual [CBO$=$*cb*O] formado por lados proporcionales, y dan por consiguiente

$$\textit{ángulo}\ BOC = \textit{ángulo}\ bOc.$$

Luego, supuesto que los tres puntos B, *b*, O, estan en línea recta, deben estarlo tambien los tres puntos C, *c*, O.

Asi se iria probando de uno en otro, que D, *d*, O, y E, *e*, O, estan en línea recta.—*Luego*, etc.

Escolio 1.° En el caso de ser iguales los dos polígonos [permaneciendo siempre paralelos los lados homólogos], el centro de semejanza está situado en el *infinito* si es *esterno*, y en el punto medio de la recta que junta dos puntos homólogos si es *interno*.

Escolio 2.° Dados de posicion en un plano dos polígonos semejantes con los lados homólogos paralelos, se obtiene inmediatamente su centro de semejanza *juntando* dos pares de vértices homólogos, y prolongando las dos rectas de union hasta su punto de concurso.

Pero puede obtenerse el mismo resultado, considerando una sola de esas rectas [Aa, por ejemplo]: y para esto basta *determinar* en ella (n.º 65, *advert.*), los dos *puntos conyugados* que la dividen en la *razon de semejanza* de los dos polígonos. — El punto *esterior* de la recta Aa asi dividida sirve para el caso de ser los lados paralelos y hallarse dirigidos en el mismo sentido; y el punto *interior*, conyugado del primero, sirve para el caso de hallarse los lados dirigidos en sentido contrario.

Fig. 205 y 205*.

TEOREMA VII. (*Fig.* 205 y 205*.)

N.º 14. *Cuando tres polígonos semejantes, P, P′, P″, situados en un mismo plano, tienen sus lados homólogos paralelos, los tres centros de semejanza estan en una misma recta.*

No se pueden presentar mas que dos casos: — ó bien los
Fig. 203. tres centros son *esternos* (*fig.* 203); ó bien, siendo uno esterno,
Fig. 203*. son internos los otros dos (*fig.* 203*). Pero la demostracion es la misma en uno y otro.

[No hemos representado mas que tres de los triángulos que constituyen los polígonos, porque con ellos basta.]

Designemos por O″, O′, O, los centros de semejanza de P y P′, P y P″, P′ y P″; y llamemos X el punto del polígono P que es homólogo del punto O, centro de semejanza de P′ y P″. La recta OX es una línea homóloga en los dos polígonos P′, P″; luego (n.º 12, *Apénd.*) debe pasar por el punto O′, centro de semejanza de estos dos polígonos; pero como es tambien línea homóloga en los dos polígonos P, P′, debe tambien pasar por O″, centro de semejanza de estos dos polígonos; luego los puntos O, O′, O″, estan en línea recta; *L. C. D. D.*

Fig. 206.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 206.)

N.º 15. *Hallándose situados de cualquier modo en un plano dos polígonos* [directamente] *semejantes, siempre tienen un punto homólogo comun* (*).

Esto quiere decir que en el plano de los dos polígonos existe un punto tal, que juntándole con los vértices de ambos, las líneas de union estan en la *razon de semejanza* de los polígonos, y los ángulos formados por ellas son respectivamente iguales.— Puede decirse tambien que es el punto que, tomado por centro de *rotacion* de uno de los polígonos, tiene la posicion indicada
Fig. 204 ó 204*. por una de las dos *figuras* 204 ó 204*.

Esto supuesto, la siguiente construccion suministra el medio de fijar su posicion [sobreentendiéndose el analisis].

(*) Este teorema se debe á Mr. Chasles.

SÍNTESIS. Sean ABCDE, *abcde* (*fig.* 206), los dos polígonos dados, y N el punto en que se encuentran dos lados, AB, *ab*, prolongados si fuere necesario; [estos dos polígonos son *directamente semejantes*; porque bastaria una simple rotacion al rededor del punto *a* por ejemplo, para hacer paralelos sus lados]. Fig. 206.

Determínese (n.° 151, 2.°) el punto P tal que PA=P*a*=PN, y el punto Q tal que QB=Q*b*=QN; *tírese* la recta PQ, y *determínese* (n.° 4, *Apend.*) el punto O simétrico del punto N respecto de PQ:

El punto O será el punto pedido.

En efecto, júntese el punto P con los puntos N y O: — los dos triángulos APN, APO, son isósceles, y dan

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{PAN} = \textit{ángulo}\ \mathrm{PNA}, \quad \text{y} \quad \textit{ángulo}\ \mathrm{PAO} = \textit{ángulo}\ \mathrm{POA};$$

de donde se deduce (n.° 55.)

$$\mathrm{NPA'} = 2\mathrm{PAN}, \qquad \mathrm{OPA'} = 2\mathrm{PAO};$$

ó, restando estas dos igualdades miembro á miembro,

$$\mathrm{NPO} = 2\mathrm{NAO}; \quad \text{es decir}, \quad \mathrm{NPO} = 2\mathrm{BAO}.$$

Del mismo modo, los dos triángulos isósceles *a*PN, *a*PO, darian

$$\mathrm{NPO} = 2\mathrm{N}a\mathrm{O}, \quad \text{ó} \quad \mathrm{NPO} = 2ba\mathrm{O};$$

luego son iguales los ángulos BAO, *ba*O.

Haciendo sobre los cuatro puntos Q, B, *b*, N, el mismo raciocinio que hemos hecho sobre los otros cuatro P, A, *a*, N, se demostraria igualmente que los ángulos ABO, *ab*O, son iguales.

Asi pues, los dos triángulos OAB, O*ab*, son semejantes, y dan

$$\mathrm{OA} : \mathrm{O}a :: \mathrm{OB} : \mathrm{O}b :: \mathrm{AB} : ab.$$

Lo mismo sucederia cualquiera que fuese el número de los triángulos.

Advert. Hagamos *girar* la figura O*abcde* al rededor del punto O, de modo que O*a* venga á caer, ó sobre OA, ó sobre su prolongacion: es facil ver que resultarán paralelos de dos en dos, y colocados en el mismo sentido ó en sentidos contrarios los lados AB y *ab*, AE y *ae*, ED y *ed*,...; de modo que, en el primer caso, será el punto O un centro de semejanza *esterno*, y en el segundo, un centro de semejanza *interno*.

ESCOLIO 1.° El punto O es el *único punto homólogo comun* á los dos polígonos semejantes propuestos; y toda recta que pase por él es *línea homóloga comun*, — y recíprocamente.

Generalizando la definicion arriba dada (n.° 12, *Apénd., escolio*), puede llamarse tambien *centro de semejanza* de los dos polígonos, su *punto homólogo comun.*

Hay tambien, para determinar dicho punto, otro medio de construccion que parece mas natural que el precedente:

Determínese (n.° 284.) la circunferencia de círculo cuyos puntos son todos tales, que las distancias de cada uno de ellos á dos vértices homólogos, A, *a*, esten entre sí en la *razon de semejanza*; *repítase* la misma construccion respecto de otros dos vértices homólogos, B, *b*:

Uno de los puntos en que las dos circunferencias se cortan, es el punto buscado.

No insistiremos en este medio que exigiria una discusion especial.

Escolio 2.° En el teorema precedente se puede suponer que los polígonos semejantes se convierten en iguales. Entonces el punto O es la interseccion de las perpendiculares levantadas sobre los puntos medios de las rectas que juntan los diversos pares de puntos homólogos: por consiguiente, las *perpendiculares* levantadas de este modo, cualquiera que sea su número, *concurren* todas en un mismo punto.

Centros de semejanza de los círculos.

Fig. 113. Teorema IX. (*Fig.* 113.)

N.° 16. *Dos círculos* O, O′ [y lo mismo dos polígonos regulares de *un mismo número par de lados paralelos de dos en dos*], tienen siempre á la vez *dos centros de semejanza*, uno *esterno* y otro *interno.*

Desde luego, cuando los dos círculos son esteriores uno á otro, como en la figura presente, los puntos C y C′ en que las tangentes comunes encuentran á la línea de los centros, son centros de semejanza, puesto que dividen *armónicamente* (número 272.) la distancia OO′, en la razon de los radios R y R′.

Fig. 85. Cuando dos círculos se tocan *esteriormente* (*fig.* 85), su punto de contacto es un centro de semejanza interno; y si se tocan Fig. 87. *interiormente* (*fig.* 87), el punto de contacto es un centro de semejanza esterno.

Pero, en general, se obtienen estos dos centros de semejanza, dividiendo *armónicamente* la distancia OO′ de los centros en la razon de los radios R y R′.

Hay ademas varios casos particulares notables; así:

En dos círculos *concéntricos*, los *centros de semejanza* se reunen en el *centro comun*;

En dos círculos *iguales*, el centro de semejanza *interno* está *en medio* de la línea de los centros, y el centro *esterno* está situado en el *infinito* (véase el *escolio* 1.°, n.° 13, *Apénd.*);—etc.

Tambien se reconoce facilmente, — 1.° — que cuando uno de los círculos degenera en una línea recta, los centros de semejanza estan situados en los *estremos de un diámetro* del otro círculo, *perpendicular á la recta*;—2.° —que si uno de los círculos se reduce á *un punto*, este punto es á la vez centro de semejanza *interno* y *esterno*.

Observemos ademas que generalizando, como en el n.° 15, *Apénd.*, *escol.*, se hallarian una infinidad de centros de semejanza de los dos círculos, es decir, una infinidad de puntos homólogos comunes.

Escolio. Cuando tres círculos estan situados en un mismo plano, lo cual da *seis* centros de semejanza, — 1.° — *los tres centros* de semejanza *esternos*, — 2.° — *un centro esterno* y *dos internos*, — *estan sobre una misma línea recta*; — lo cual da en total *cuatro* rectas que pasan por los seis puntos combinados *de tres en tres*.

Omitimos de intento la demostracion de esta proposicion, porque es enteramente parecida á la del n.° 14 de este *apéndice*.

De los ejes radicales y del centro radical (*).

N.° 17. *Definiciones.* — Se llama *eje radical* de dos círculos situados en un mismo plano, el lugar de los puntos por cada uno de los cuales se pueden tirar á dichos círculos tangentes iguales.

Sean R, R′, los radios de dos círculos O, O′ (*fig.* 207), que Fig. 207.
supondremos, para fijar las ideas, *esteriores* uno á otro. — Determínese (n.° 285.) en la línea de los centros, un punto D tal, que se tenga la relacion

$$OD^2 - O'D^2 = R^2 - R'^2 = n^2,$$

designando n el lado de un cuadrado igual á $(R^2 - R'^2)$ (n.° 285.).

Esto supuesto, digo que la *perpendicular* DL levantada en el punto D á la *línea de los centros*, es un *eje radical*.

En efecto, desde un punto S tomado á volúntad en dicha recta, tírense las tangentes ST, ST′, y tírense los radios OT, O′T′, y las rectas SO, SO′.—Los dos triángulos rectángulos STO, ST′O′, dan las relaciones siguientes:

(*) Véase sobre está teoría una *Memoria* de *Gauthier de Tours* (Journal de l'Ecole polytechnique, t. 9, cahier 16, pág. 124).

$$ST^2 = SO^2 - R^2, \qquad ST'^2 = SO'^2 - R'^2;$$

pero tenemos (n.° 285.) $SO^2 - SO'^2 = OD^2 - O'D^2 = R^2 - R'^2,$

de donde se deduce $\quad SO^2 - R^2 = SO'^2 - R'^2;$

luego $\quad ST = ST',$

y por consiguiente, las tangentes tiradas desde un punto cualquiera S de DL, son iguales.

Como, *recíprocamente*, $ST = ST'$ da $ST^2 = ST'^2$,

de donde $\quad SO^2 - R^2 = SO'^2 - R'^2,$

y $\quad SO^2 - SO'^2 = R^2 - R'^2 = OD^2 - O'D^2.$

resulta que la recta DL es el lugar de todos los puntos por donde pueden tirarse tangentes iguales á los dos círculos; luego DL es un eje radical;

L. C. D. D.

N.° 18.° *Determinacion de este eje.* — Para fijar la posicion del punto D respecto del punto O, por ejemplo, podemos proceder como en el número 285.

Dividiendo miembro á miembro la igualdad

$$OD^2 - O'D^2 = n^2$$

por esta otra $\quad OD + O'D = OO',$

se encuentra $\quad OD - O'D = \dfrac{n^2}{OO'};$

de donde, sumando, y dividiendo por 2,

$$OD = \frac{OO'}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{OO'} = \frac{OO'}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - R'^2}{OO'};$$

es decir, que bastaria tomar, empezando desde el punto medio C de la distancia de los centros OO', y á la derecha de este punto [suponiendo que el círculo menor está tambien á la derecha], una parte igual *á la mitad de una tercera proporcional* á las líneas OO' y n ó $\sqrt{R^2 - R'^2}$.

Pero sin embargo en cada una de las posiciones relativas de los dos círculos, se tiene casi siempre un medio mas sencillo de fijar la posicion del eje radical.

Asi, — 1.° — en el caso actual de dos círculos *esteriores* [ó de cualquier otra posicion en que tengan al menos una tangente comun], como el punto medio de la parte de esta tangente, comprendida entre los dos puntos de contacto, pertenece necesariamente al eje radical, basta *tirar por este punto medio una perpendicular á la línea de los centros*;

2.° — Cuando los círculos *se tocan*, bien sea esterior, bien interiormente (*fig.* 85 *y* 87), el punto comun á las dos circunferencias pertenece necesariamente al eje radical, que entonces es la misma *tangente comun á los dos círculos que pasa por dicho punto*; Fig. 85 y 87.

3.° — Si los dos círculos se cortan, los puntos M, M′ (*fig.* 86), satisfacen evidentemente á la relacion $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$, ó $M'O^2 - M'O'^2 = R^2 - R'^2$. Por consiguiente, las *prolongaciones en los dos sentidos, de la cuerda comun*, forman el eje radical. Fig. 86.

En el caso en que el un círculo es *interior* al otro (*fig.* 88), hay que recurrir á la relacion Fig. 88.

$$OD = \frac{OO'}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2OO'},$$

la cual nos enseña ademas que la distancia del punto C, medio de la linea de los centros, al eje radical, aumenta sin cesar á medida que disminuye la recta OO′; y cuando se supone $OO' = 0$, resulta

$$OD = \frac{R^2 - R'^2}{0},$$

ó *infinita*. — Lo cual demuestra que

Dos circunferencias concéntricas carecen de eje radical; — es decir, que no hay en su plano ningun punto desde donde se les puedan tirar tangentes iguales.

Otros casos particulares: — Cuando los dos *círculos* son *iguales*, OD se reduce á $\frac{OO'}{2}$; es decir, que entonces el eje radical es la *perpendicular levantada en el punto medio de la línea de los centros*.

Si uno de los círculos se reduce á *un punto*, el eje radical se obtiene juntando *los puntos medios de las dos tangentes tiradas desde aquel punto al círculo dado*.

Si uno de los dos círculos degenera en *una línea recta*, el eje radical es *la misma recta*.

Etc., etc.

N.° 19. Del centro radical. — *Tres círculos* situados en un mismo plano [no teniendo los centros en una misma recta], dan, por su combinacion de dos en dos, *tres* ejes radicales; — los cuales se cortan *en un mismo punto.*

En efecto, cortándose los dos primeros, por ser respectivamente perpendiculares á dos rectas que se cortan (n.° 50.), su punto de interseccion es tal, que desde él se pueden tirar tangentes iguales á las tres circunferencias; luego pertenece al tercer eje radical.

Este punto comun á los tres ejes se llama *centro radical* de los tres círculos.

Resulta evidentemente de esta definicion, y de lo demostrado en el número 18, 3.°, *Apénd.*, que — *Si tres circunferencias se cortan de dos en dos, las tres cuerdas que juntan los puntos de interseccion se cortan en un mismo punto, que es el centro radical de los tres círculos.*

Asi, cuando este punto de interseccion es *esterior* á los tres círculos, las *seis tangentes* que de él salen son *iguales.*

Fig. 207.

TEOREMA X. (*Fig.* 207.)

N.° 20. *Si desde un punto cualquiera* S *del eje radical de dos círculos se tira una secante que encuentre á las circunferencias en* CUATRO *puntos*, dos M, N, en la primera, y otros dos, M′, N′, en la segunda, *estos cuatro puntos pertenecen á una misma circunferencia de círculo.*

Porque tenemos (n.° 228.)

$$\overline{ST}^2 = SM \times SN, \quad \overline{ST'}^2 = SM' \times SN';$$

luego, á cuasa de ser $ST = ST'$, resulta

$$SM \times SN = SM' \times SN'.$$

Luego (n.° 229, *recíp.*) los puntos M, N, M′, N′, estan situados en una misma circunferencia.

Advert. Se deduce igualmente de las dos relaciones, y de ser $ST = ST'$, que

$$\overline{ST}^2 = SM' \times SN', \qquad \overline{ST'}^2 = SM \times SN;$$

luego los puntos M′, N′, y T, ó bien M, N, y T′, se hallan situados en una misma circunferencia tangente á ST ó ST′ (*número citado*), y por consiguiente tangente tambien á la circunferencia OT ó á la OT′.

Fig. 208 y 208*.

TEOREMA XI. (*Fig.* 208 *y* 208*.)

N.° 21. *Si por un centro, C, de los dos de semejanza* [esterno ó interno] *de dos círculos*, O, O′, *se tiran á estos círculos dos secantes*: —1.° —*los ocho puntos de interseccion* [A, A′; B, B′, y a, a', b, b'], *combinados de cuatro en cuatro de un modo conveniente, forman* CUATRO *grupos situados respectivamente en otras tantas circunferencias*; —2.° — *estas cuatro circunferencias tienen por* CENTRO RADICAL COMUN *el centro de semejanza que ha servido para determinarlas.*

En efecto, —1.°—siendo C un centro de semejanza, tenemos (n.° 16, *Apénd.*)

$$CA : CB :: Ca : Cb;$$

ademas $\quad Ca : Cb :: Cb' : Ca' \quad$ (n.° 227.);

luego $\quad CA : CB :: Cb' : Ca'$, ó $CA \times Ca' = CB \times Cb'$.

Luego (n.° 229.) los cuatro puntos A, B, a, b, se hallan situados en una misma circunferencia.

Del mismo modo se demostraria que cada uno de los otros tres grupos,

$$A', B', a, b, \quad A, B', a', b, \quad A', B, a, b'.$$

corresponde á una misma circunferencia.

Advert. Para agrupar convenientemente los puntos, debe observarse que ningun grupo debe contener á la vez *ni dos puntos homólogos, ni dos puntos pertenecientes á un tiempo á una misma secante en una misma de las circunferencias dadas.*

2.° —Designemos por CT, CT′, CT″, CT‴, las tangentes [no se han trazado en la figura] tiradas respectivamente á los cuatro círculos

$$ABa'b', \quad A'B'ab, \quad AB'a'b, \quad A'Bab'.$$

Tenemos (n.^{os} 227 y 228.) las cuatro relaciones siguientes:

para el primer círculo, $\quad CA \times Ca' = CB \times Cb' = CT^2;$

para el segundo, $\quad CA' \times Ca = CB' \times Cb = CT'^2;$

para el tercero, $\quad CA \times Ca' = CB' \times Cb = CT''^2;$

y para el cuarto, $\quad CA' \times Ca = CB \times Cb' = CT'''^2;$

de donde, á causa del enlace que hay entre estas igualdades, se deduce

$$CT = CT' = CT'' = CT'''.$$

Luego el punto C es un centro radical comun á los cuatro círculos *tomados de tres en tres*; *L. C. D. D.*

Advert. Considerando el centro de semejanza interno C', se obtendrian otros cuatro círculos que tendrian al punto C' por centro radical comun.

Estos círculos se llaman *recíprocos* de los círculos O y O', respecto del centro de semejanza que les corresponde.

Escolio. Se puede suponer que las dos secantes CA, CB, vienen á reunirse en una sola (*fig.* 209 y 209*); entonces los dos círculos recíprocos AB$a'b'$, A'B'ab, se reducen á la misma secante: y los otros dos, AB'$a'b$, A'Bab', se hacen á la vez tangentes á los dos círculos O, O', uno en A, a', y otro en A', a.

Fig. 209 y 209*.

Recíprocamente: — Todo círculo que toca á la vez á otros dos es uno de sus círculos recíprocos respecto al centro de semejanza *esterno* ó *interno*, segun que el contacto es de la misma especie [*interior* ó *esterior* á la vez], ó de especie diferente; de donde se deduce que

Los dos puntos de contacto estan en línea recta con el centro de semejanza correspondiente.

Escolio general. Desde ahora puede comprenderse cuán útil será en la resolucion de los problemas sobre los contactos de las circunferencias de círculo, la consideracion de los centros de semejanza, de los ejes y de los centros radicales.

La mayor parte de las veces, todo se reduce á determinar la posicion de los centros de semejanza, de los ejes y centros radicales de círculos dados, cuyas cuestiones sabemos ya resolver.

§. II. *Teoría de las transversales. — Haces armónicos. — Polos y polares.*

Bajo la denominacion general de *teoría de las transversales*, se comprende el conjunto de las relaciones métricas que presentan ciertos sistemas de líneas que se cortan con leyes determinadas. — Algunas de las proposiciones relativas á las líneas proporcionales y á la semejanza de las figuras son casos particulares de esta teoría. Ahora vamos á demostrar otros muchos que son de bastante uso.

Transversales rectilíneas.

Fig. 210.

Teorema I. (*Fig.* 210.)

N.º 22. *Toda transversal* XY *determina en los tres lados de un triángulo* ABC, *ó en sus prolongaciones, seis segmentos tales, que el producto*

$$AC' \times BA' \times CB'$$

de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres

$$C'B \times A'C \times B'A.$$

En efecto, tírese por uno cualquiera de los vértices del triángulo, B por ejemplo, la recta BK paralela á la transversal y terminada en K, en el lado opuesto AC. Los dos pares de triángulos semejantes ABK, AC'B', y CA'B', CBK, dan

$$AC' : C'B :: AB' : B'K; \text{ de donde } AC' \times B'K = C'B \times AB';$$

$$\text{y } BA' : A'C :: B'K : CB'; \text{ de donde } BA' \times CB' = A'C \times B'K.$$

Multiplicando estas dos igualdades miembro á miembro y suprimiendo el factor comun B'K, se obtiene

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A; \qquad L.C.D.D.$$

Advert. La transversal puede pasar por el interior del triángulo ó estar completamente situada fuera de él; pero, cualquiera que sea su posicion, los puntos de division A', B', C', estan situados siempre en número *par* [0 ó 2] sobre los *lados* mismos del triángulo, y en número *impar* [1 ó 3] sobre sus *prolongaciones*.

Recíprocamente:—*Hallándose distribuidos sobre los tres lados de un triángulo ó sobre sus prolongaciones tres puntos* (que dan *seis* segmentos), de modo que haya *un solo punto en cada recta*, y que el número de puntos situados en los *lados* mismos sea *par*, *si el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres, los tres puntos estan en línea recta.*

Esta es una consecuencia necesaria del principio establecido en el número 21.

Teorema II. (*Fig.* 211.) Fig. 211.

N.° 23. *Tres rectas* AA', BB', CC', *tiradas desde los tres vértices de un triángulo á un mismo punto* O [interior ó esterior al triángulo], *determinan en los lados opuestos* BC, AC, AB, *seis segmentos tales que el producto* BA' × CB' × AC' *de tres segmentos no consecutivos es igual al producto* A'C × B'A × C'B *de los otros tres.*

En efecto, los dos triángulos ABA', ACA', cortados por las transversales respectivas COC', BOB', en los puntos C', C, O, y B', B, O, dan (n.° 22, *Apénd.*) las dos relaciones

$$AC' \times BC \times A'O = C'B \times CA' \times OA,$$

$$\text{y} \quad AB' \times CB \times A'O = B'C \times BA' \times OA;$$

de donde, multiplicando *en cruz* miembro á miembro, y suprimiendo los factores comunes CB, A'O, OA, resulta

$$AC' \times CB' \times BA' = C'B \times B'A \times A'C;$$

L. C. D. D.

Advert. Es de notar que, cualquiera que sea la posicion del punto O en el plano del triángulo, siempre resulta un número *impar* de puntos de division sobre los lados mismos, y un número *par* sobre sus *prolongaciones*.

RECÍPROCAMENTE: — *Hallándose distribuidos sobre los lados de un triángulo ó sobre sus prolongaciones tres puntos*, de tal manera que haya un número *impar* de ellos sobre los *lados* mismos, *si el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres, las rectas tiradas desde cada punto de division al ángulo opuesto concurren en un mismo punto.*

COROLARIOS. 1.° — *Las tres rectas tiradas desde los vértices de un triángulo á los puntos medios de los lados opuestos*
Fig. 63. (n.° 98, *fig.* 63.), *concurren en un mismo punto*, — porque determinan seis segmentos iguales de dos en dos, que dan

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

2.° — *Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo*
Fig. 60. (n.° 95, *fig.* 60) *concurren en un mismo punto:* — porque tenemos (n.° 202.) las porporciones

$$AC' : C'B :: AC : BC,$$
$$BA' : A'C :: AB : AC,$$
$$CB' : B'A :: BC : AB;$$

de donde se deduce

$$A'C \times BC = C'B \times AC,$$
$$B'A \times AC = A'C \times AB,$$
$$B'C \times AB = B'A \times BC:$$

multiplicando miembro á miembro, y omitiendo los factores comunes,

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

3.° — De un modo análogo se demostraria que *las perpendiculares bajadas desde los tres vértices sobre los lados opues-*

los (n.° 95, *fig*. 62) concurren en un mismo punto: — basta Fig. 62.
comparar los pares de triángulos rectángulos, tales como ABA′ y CBC′, que son evidentemente semejantes, y darán tres relaciones de donde facilmente se deducirá

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

N.° 24. Escolio. — En una palabra, los dos teoremas precedentes y sus recíprocos dan lugar á una multitud de consecuencias que forman otras tantas proposiciones nuevas.

Asi, por ejemplo, si en la relacion del número 23. (*fig*. 211) Fig. 211.

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A,$$

se supone $BA' = A'C$, se reduce á

$$AC' \times CB' = C'B \times B'A;\ \text{de donde}\ AC' : C'B :: B'A : CB';$$

luego (n.° 163.) la recta B′C′ es paralela á BC.

Recíprocamente: — Si B′C′ es paralela á BC, da la proporcion

$$AC' : C'B :: B'A : CB';\quad \text{de donde}\quad AC' \times CB' = C'B \times B'A;$$

y, en virtud de la relacion del número 23,

$$A'B = A'C;$$

Lo cual da lugar al teorema siguiente:

Si, partiendo del vértice A *de un triángulo* ABb (*fig*. 212), Fig. 212.
se dividen los lados adyacentes, AB, Ab, *en partes proporcionales, y desde los estremos* b, B, *de la base, se tiran rectas á los puntos de division* P, Q, R,..., p, q, r,..., *todas estas rectas se cortarán de dos en dos en una misma recta* AK *tirada desde el vértice al medio de la base*; — *y recíprocamente*.

Advert. De aqui se deduce, como caso particular, que — *En un trapecio cualquiera, la recta que junta el punto de concurso de los dos lados no paralelos con el punto de encuentro de las diagonales, pasa por los puntos medios de las dos bases.*

N.° 25. *De los haces armónicos*. — Vimos en el número 202. que si una recta BC (*fig*. 130) está dividida en un punto D en Fig. 130.
una razon dada, existe en la prolongacion de esta recta otro punto D′, tal que da la proporcion

$$BD' : D'C :: BD : DC.$$

Esta proporcion puede ponerse bajo la forma

$$D'B : BD :: D'C : CD;$$

lo cual prueba que los puntos C y B estan situados respecto de la recta DD′, como los puntos D y D′ estan situados respecto de la recta BC.

Los cuatro puntos B, D, C, D′, forman un *sistema armónico* (*); y se llaman *puntos conyugados* de este sistema cada par de puntos B, C, y D, D′, no consecutivos.

Conociéndose tres cualesquiera de estos puntos, se puede facilmente *determinar el cuarto*, con tal que se sepa su lugar.— Basta al efecto para ello, deducir de la proporcion anterior otra proporcion en que solo sea desconocida la distancia de uno de los tres puntos dados al punto buscado.

Por ejemplo, conociendo los puntos B, D, D′, para hallar el punto C, se sacará de la segunda de las dos proporciones precedentes, esta nueva proporcion:

$$D'B + DB : DB :: D'C + DC : DC,$$

ó

$$D'B + DB : DB :: DD' : DC;$$

de donde

$$DC = \frac{DB \times DD'}{D'B + DB'},$$

espresion que puede *construirse* gráficamente, ó *calcularse* numéricamente.

Esto supuesto, se llama *haz armónico* el sistema de las cuatro rectas OX, OY, OZ, OV (*fig.* 213), tiradas desde un mis-

Fig. 213.

(*) Se dice que tres números, m, n, p [dispuestos por orden de magnitud, $m > n > p$], forman una *proporcion armónica*, cuando la diferencia entre el primero y el segundo es á la diferencia entre el segundo y el tercero, como el primero es al tercero. — Tales son los números 6, 4 y 3, ó 15, 12 y 10, ...; y tales son tambien las distancias BD′, BC, BD; porque, siendo

$$BD' - BC = CD', \quad BC - BD = DC,$$

la proporcion

$$CD' : DC :: BD' : BD,$$

se convierte en estotra,

$$BD' - BC : BC - BD :: BD' : BD;$$

de modo que las distancias BD′, BC, BD, estan en proporcion armónica; lo mismo lo estan las distancias D′B, D′D, y D′C.

[La serie de fracciones $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$, se llama *progresion armónica*, porque, como puede probarse facilmente, tres términos consecutivos cualesquiera forman una proporcion armónica.]

mo punto O á cuatro puntos, A, B, C, D, dispuestos armónicamente sobre una recta indefinida.

Las rectas OA, OB, OC, OD, se llaman *radios del haz;* y los pares de radios OA y OC, OB y OD, correspondientes á puntos conyugados, se llaman tambien *radios conyugados.*

Advert. En virtud de la propiedad demostrada en el número 202, los *dos lados* de un ángulo cualquiera BAC (*fig.* 130) Fig. 130. forman, con las *bisectrices* del mismo y de su suplemento CAB', un *haz armónico.*

TEOREMA III. (*Fig.* 213*.) Fig. 213*.

N.° 26. *En todo haz armónico* OABCD, *una recta cualquiera* EF, *tirada paralelamente á uno de los radios,* al OD por ejemplo, *queda dividida en dos partes iguales por los otros tres.*

En efecto, tírese por el punto B la recta IBK paralela á OD, y terminada en los radios OA, OC. — Los dos pares de triángulos semejantes BCK y OCD, AIB y AOD, dan las proporciones

$$BK : OD :: BC : CD, \quad y \quad IB : OD :: AB : AD;$$

pero, como los cuatro puntos A, B, C, D, forman un sistema armónico, tenemos (n.° 25, *Apénd.*)

$$AB : BC :: AD : CD, \quad ó \quad BC : CD :: AB : AD;$$

luego tambien $BK : OD :: IB : OD,$

y por consiguiente, $BK = IB.$

Ahora bien, siendo paralelas las dos rectas EF, IK, deben estar cortadas en partes proporcionales por las tres rectas OA, OB, OC (n.° 201.); luego finalmente

$$EG = GF; \qquad L. C. D. D.$$

RECÍPROCAMENTE: — *Si cuatro rectas* OX, OY, OZ, OV, *que parten de un mismo punto* O, *son tales que una recta cualquiera* IK *tirada paralelamente á una de ellas,* á la OV por ejemplo, *quede dividida en dos partes iguales por las otras tres, las cuatro rectas dichas forman un haz armónico.*

Tírese por el punto B medio de la recta IK una transversal cualquiera ABCD. — Los dos pares de triángulos semejantes ABI y ADO, BCK y OCD, dan las proporciones

$$AD : AB :: OD : IB, \quad y \qquad DC : BC :: OD : BK;$$

de donde, á causa de ser IB = BK, $AD : AB :: CD : BC.$

Luego los cuatro puntos A, B, C, D, son *conyugados* de dos en dos, y las cuatro rectas que salen del punto O forman un haz armónico.

Escolio. Esta recíproca nos enseña el medio de — *Determinar uno de los radios*, OV por ejemplo, *de un haz armónico conociendo los otros tres*, — pues basta, despues de haber tirado por un punto cualquiera B del radio OY, una recta IK que quede dividida *en dos partes iguales* por los otros dos, OX, OZ (n.° 267, *corol.*), tirar despues por el punto O una paralela á dicha recta IK.

Fig. 213. Teorema IV. (*Fig.* 213.)

N.° 27. *En todo haz armónico* OABCD, *los puntos de interseccion de los cuatro radios con una transversal cualquiera forman un sistema armónico.*

En efecto, — la proposicion es desde luego evidente respecto de cualquier recta *mn* paralela á AD, en virtud de la propiedad del número 201.

Respecto de cualquier otra transversal MN, si por el punto P concebimos paralelamente á OD una recta EF, quedará esta dividida en dos partes iguales E, F, segun el teorema precedente; y de la demostracion usada en la recíproca se infiere que la recta MN que pasa por el punto P queda dividida armónicamente en M, P, Q, N.

En fin, quedando dividida toda recta paralela á MN por los radios del haz del mismo modo que MN, quedará tambien dividida armónicamente por los mismos radios;

L. C. D. D.

N.° 28. *Del cuadrilátero completo.* — Asi se llama la figura
Fig. 214. ACBFDE (*fig.* 214) determinada por cuatro rectas indefinidas que se cortan de dos en dos en *seis* puntos diferentes, A, B, C, D, E, F; de modo que por cada uno de los puntos de interseccion no puedan pasar mas que dos rectas de las cuatro dadas.

La razon de haberle dado este nombre, es el haberse observado que en dicha figura ACBFDE se encuentran:

1.° El cuadrilátero ordinario ó *convexo* BCED (n.° 37.), cuyas diagonales son CD y BE;

2.° El cuadrilátero *uni-cóncavo*, ó de un solo ángulo entrante, ABFE, cuyas diagonales son AF y BE;

3.° En fin, — El cuadrilátero *bi-cóncavo* ACBFD, formado por dos triángulos opuestos ABC, DBF: — sus diagonales son AF y CD.

De aqui se sigue que el cuadrilátero completo tiene *tres* diagonales; dos *interiores*, BE, CD, y una *esterior*, AF.

El cuadrilátero completo goza de muchas propiedades muy curiosas deducidas de la teoría de las transversales y de la consideracion de los haces armonicos (*).

TEOREMA V. (*Fig.* 214.) Fig. 214.

N.° 29. *En todo cuadrilátero completo* ACBFDE, *cada diagonal está dividida armónicamente por las otras dos* [de modo que se tienen las proporciones

AI : IF : : AK : FK,
EO : OB : : EI : BI,
y CO : OD : : CK : DK].

En efecto, tírese la recta KE; y, despues de haber prolongado el lado AD hasta su encuentro en D' con KE, determínese el punto M tal que dé la proporcion

EM : MD' : : EK : D'K.

Esto supuesto, la figura AKD'ME es un haz armónico en el cual AM es el radio conyugado de AF. — Ademas, respecto de la transversal KC que pasa por el punto K de la recta KE, tenemos (n.° 27, *Apénd.*)

CO : OD : : CK : DK.

Ahora bien, siendo la figura CKDOC un haz armónico, se sigue que el radio AO es el conyugado de AK ó AF. Asi pues, AO y AM son conyugados del mismo radio AF, y por consiguiente se confunden.

Tambien la figura EKDOC es un haz armónico, y da (n.° 27, *Apénd.*), respecto de la transversal AK que pasa por el punto K,

AI : IF : : AK : FK.

Finalmente, el haz armónico AKD'ME da, respecto de la transversal EI que pasa por el punto E,

EO : OB : : EI : BI;

(1) El cuadrilátero completo es el mas sencillo de los polígonos de *ángulos entrantes*, polígonos que Mr. Poinsot considera como de orden superior, y asegura con estos la teoría de los *polígonos estrellados*.—(*Véase* la Memoria de Mr. Poinsot, en el *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 10.° cahier, t. IV, p. 6 y siguientes. — *Véase* tambien otra Memoria de Mr. Cauchy en el mismo *Journal*, 16.° cahier, t. IX, p. 17.)

quedando con esto completamente demostradas las tres proporciones propuestas.

Ademas, de todo lo anteriormente dicho sobre los haces armónicos, resulta que las otras rectas AD', AM, FC, F'C, estan tambien divididas armónicamente.

N.° 30. Escolio general sobre los haces armónicos. — *De los polos y de las polares en las figuras rectilíneas.*

Acabamos de ver que en el cuadrilátero completo ACBFDE, la recta que junta el punto A con el punto de encuentro de dos diagonales interiores, es conyugada de la recta AF respecto de las otras dos rectas AD, AE. Esto nos conduce á una propiedad muy importante.

Fig. 215. Sea un punto cualquiera P (*fig.* 215) dado en el plano de un ángulo YOX. Desde este punto, tiremos una serie de rectas que encuentren á los lados del ángulo en los puntos A y *a*, B y *b*, C y *c*, D y *d*,..., lo cual determina los cuadriláteros completos O*b*BA*a*P, O*c*CA*a*P, O*d*DA*a*P,... Esto supuesto, todos los puntos, *p*, *p'*, *p''*,..., *de interseccion de las diagonales interiores* de estos cuadriláteros, se hallan situados *en una misma recta que pasa por el vértice* O, y es á la vez el *radio conyugado* del radio OP *respecto de los dos lados del ángulo* YOX.

Esta propiedad se espresa diciendo que el punto P es un *polo* respecto de la recta O*p*, que se llama línea *polar* del punto P.

Observemos ademas: — 1.° — que la misma propiedad se verificaria respecto de cualquier otro punto P' tomado en la recta OP, es decir, que OP tambien seria la polar del punto P'; — 2.° — que esta propiedad corresponde recíprocamente á los dos radios conyugados OP, O*p*, respecto de las rectas OY, OX, que son tambien radios conyugados; — de donde podemos deducir esta consecuencia general:

En todo haz armónico, cada radio es una *polar* respecto de cada punto de su conyugado; y cada punto de este es *un polo* respecto de aquel.

Terminaremos lo relativo al cuadrilátero completo, enunciando dos teoremas cuyas demostraciones pueden deducirse fácilmente de la teoría de las transversales.

Fig. 214. 1.° *Los puntos medios* P, Q, R (*fig.* 214), *de las tres diagonales de un cuadrilátero completo, estan situados en una misma línea recta.*

Fig. 216. 2.° *Si dos triángulos*, ABC, A'B'C' (*fig.* 216), *tienen sus vértices colocados de dos en dos en tres líneas rectas concurrentes* [en un punto O], *los tres puntos de concurso*, o, o', o'', *de los lados correspondientes tomados de dos en dos, estan en línea recta.*

Transversales consideradas en el círculo. — *Puntos conyugados.* — *Polos y polares.*

N.° 31. *De los puntos conyugados.* — Vimos en el n.° 276, que si una recta AX (*fig.* 184) está dividida armónicamente en los puntos A, C, B, C′, la circunferencia descrita sobre CC′ como diámetro es tal, que las *distancias* de cada uno de sus puntos, N, á los dos puntos A y B, guardan entre sí una *razon constante*, que es la de las rectas AC, CB. Fig. 184.

En el enunciado de este teorema se da la posicion del círculo respecto de los puntos A y B que tambien se suponen conocidos; pero puede tambien tomar la cuestion esta otra forma:

Dados un círculo y un punto P (*fig.* 217), *determinar el punto* Q *conyugado de este.* Fig 217.

[Daremos al círculo OA el nombre de *círculo regulador*.]

Por el supuesto debemos tener

$$QA : AP :: QB : PB,$$

ó bien

$$QB : QA :: PB : PA;$$

la figura da sucesivamente

$$QB = OQ + OA,\ QA = OQ - OA,\ PB = OA + OP,\ PA = OA - OP;$$

asi pues, la proporcion se convierte en esta otra

$$OQ + OA : OQ - OA :: OA + OP : OA - OP;$$

de donde, sacando la suma y la diferencia de los dos primeros términos, y comparándolas con la suma y la diferencia de los otros dos, resulta despues de reducir,

$$OQ : OA :: OA : OP;$$

luego (1)

$$OP \times OQ = OA^2;$$

de donde

$$OQ = \frac{OA^2}{OP}.$$

Para construir esta espresion, basta *levantar* la recta PM perpendicular al diámetro OA, *tirando* despues en el punto M una tangente que irá á encontrar á dicho diámetro prolongado en un punto Q que será el punto pedido: — porque tendremos (n.° 203, 3.°)

$$OM^2 = OP \times OQ,$$

ó, por ser OM = OA,

$$OA^2 = OP \times OQ.$$

Recíprocamente: — Para obtener el punto P por medio del punto Q, *se tirarán* las dos tangentes QM, Q*m*, y el punto en que la cuerda M*m* corte á OA será el punto pedido.

[Se [illegible]ma *cuerda de contacto* la recta M*m* que junta los puntos de contacto de dos tangentes tiradas desde un mismo punto Q á una circunferencia.]

Escolio. Como la igualdad (1) determina la posicion relativa de los dos puntos conyugados, podemos sin dificultad alguna deducir de ella su definicion, diciendo que *puntos conyugados* respecto de un circulo, *son dos puntos situados en un mismo radio, y tales que el producto de sus distancias al centro es igual al cuadrado del radio.*

Por otro lado, como la igualdad (1), ó mejor dicho la proporcion

$$OP : OA :: OA : OQ,$$

conduce, por medio de transformaciones inversas de las de arriba, á la proporcion

$$QB : QA :: PB : PA,$$

ó

$$QA : AP :: QB : PB,$$

podemos concluir justamente que

1.° *Los puntos conyugados forman, con los estremos del diámetro que los contiene, un sistema armónico.*

2.° *Las distancias de cada punto de la circunferencia reguladora á los dos puntos conyugados,* P y Q, *guardan entre sí una razon constante,* que es la de QA á AP (n.° 273, *esc[illegible].*).

Pasemos á otras propiedades de los puntos conyugados.

Fig. 218 y 218*. **Teorema VI.** (*Fig.* 218 y 218*.)

N.° 32. *Las cuerdas de contacto,* M*m*, M′*m*′, . . . *de todos los ángulos circunscritos cuyos vértices estan colocados en una recta* LL′, *concurren en un mismo punto* P; *que es el conyugado del punto* Q *pie de la perpendicular bajada desde el centro del círculo á la línea* LL′.

Pueden presentarse dos casos principales: ó la recta es *esterior* á la circunferencia reguladora, ó es *secante* de la misma. — Examinemos estos dos casos sucesivamente.

Fig. 218. Primer caso (*fig.* 218). Consideremos dos puntos de la recta LL′, á saber: el pie Q de la perpendicular bajada á la recta desde el punto O, y un punto cualquiera Q′; sean QM y Q*m*, Q′M′ y Q′*m*′, las tangentes correspondientes, y P, P′, los puntos en que las cuerdas de contacto encuentran á OQ, O′Q′. —

Estos puntos son (n.° 31, *Apénd.*) los conyugados de los puntos Q, Q′, y dan las relaciones

$$OA^2 = OP \times OQ, \quad OA^2 = OP' \times OQ';$$

y por consiguiente la proporcion

$$OP : OP' :: OQ' : OQ.$$

Esto supuesto, si juntamos el punto P′ con el punto P, formaremos dos triángulos OQQ′, OPP′, semejantes entre sí, por tener un ángulo comun O formado por lados proporcionales. Pero el triángulo OQQ′ es rectángulo en Q; luego el triángulo OPP′ es tambien rectángulo en P. — Donde se ve que la recta PP′ se confunde con la cuerda de contacto M′m′; luego las cuerdas Mm, M′m′, pasan por el mismo punto P.

Igual raciocinio podria aplicarse á cualquier otro ángulo circunscrito que tuviera el vértice en Q″, Q‴,... sobre la recta LL′; *luego*, etc.

Segundo caso (*fig.* 218*). — En este caso, el punto P conyugado del punto Q se obtiene tirando en el punto M la tangente MP, hasta encontrar con OA prolongado; el punto P′ resulta aquí tambien, como antes, punto de encuentro de la M′m′ con OQ′; lo cual da la proporcion Fig. 218*.

$$OP : OP' :: OQ' : OQ.$$

Juntando el punto P′ con el punto P, obtenemos los dos triángulos OPP′, OQQ′, semejantes entre sí por tener igual un ángulo O formado por lados proporcionales; pero el triángulo OQQ′ es rectángulo en Q; luego tambien el triángulo OPP′ es rectángulo en P′; y por consiguiente la recta PP′ se confunde con la cuerda de contacto M′m′.

Del mismo modo se demostraria que, respecto de cualquier otro punto Q″, Q‴,... colocado en la recta LL′, la cuerda de contacto correspondiente pasa por el punto P; *luego*, etc.

Queda por lo tanto demostrada la proposicion.

Las dos *figuras* 219 y 219* dan una idea clara de la naturaleza de esta propiedad.

Advert. En el caso particular (*fig.* 219**) de ser la recta LL′ tangente á la circunferencia reguladora, los dos puntos conyugados se confunden con el estremo A del diámetro. Fig. 219**.

Recíprocamente: — Si desde un punto P, *interior* (*fig.* 219) ó *esterior* (*fig.* 219*) á la circunferencia reguladora, se tiran varias rectas que vayan encontrando cada una en dos puntos á la circunferencia, y por esos puntos se tiran tangentes, los *vértices de todos los ángulos circunscritos* así formados por los Fig. 219. Fig. 219*.

diversos pares de tangentes, estarán *situados en una misma recta* LL′ *que pasará por el punto conyugado del primero, y será perpendicular á la recta* OP *tirada desde el centro al punto dado.*

El primer caso de esta recíproca se demuestra facilmente por medio del *principio sobre las recíprocas* (n.° 21), y del segundo caso de la proposicion directa; — y *vice-versa.*

N.° 33. De los *polos* y de las *polares* en el circulo. — Esas dos curiosas propiedades de los puntos conyugados P y Q, han hecho llamar *polo* al punto P, y *polar* á la recta LL′.

Asi pues, dado un *polo*, facilmente se puede determinar su *polar*; — y recíprocamente (n.° 31, *Apénd.*).

Fig. 220. TEOREMA VII. (*Fig.* 220.)

N.° 34. *Toda cuerda* EF *tirada en una circunferencia por un punto* P, *está dividida armónicamente por dicho punto y por su polar* LL′.

En efecto, los puntos P y Q son conyugados, y dan la proporcion (n.° 31) PA : AQ : : BP : BQ;

luego, juntando los puntos P, A, Q, B, con un punto cualquiera N de la circunferencia, resulta un haz armónico en el cual queda dividida *armónicamente* (n.° 27, *Apénd.*) la transversal EF que pasa por uno de los puntos P.

Fig. 221. TEOREMA VIII. (*Fig.* 221.)

N.° 35. *La polar del vértice* P *de un ángulo cualquiera* APB [respecto de un circulo dado], *es la recta que junta los polos de sus dos lados.*

En efecto, si por el punto M, en que el lado PA encuentra á la circunferencia reguladora, se tira una tangente hasta encontrar en G con la perpendicular OG bajada al lado desde el punto O, el punto G pertenece á la polar del punto P (n.° 32, *recíp.*). — Por la misma razon, el punto K en que la tangente tirada por M′ correspondiente al segundo lado PB, encuentra á la perpendicular OK bajada á este lado desde el punto O, pertenece á la polar del punto P. — Luego GK es esa misma polar.

Advert. De aqui se infiere que el punto Q en que la recta GK encuentra á la recta OP prolongada, es el punto conyugado del punto P.

COROLARIO. *Si dos polígonos cualesquiera* ABCD, EFGK (*fi-* Fig. 222. *gura* 222), *son tales que los vértices* E, F, G, K, *del segundo, son los polos respectivos de los lados* AB, BC, CD, DA, *del primero* [respecto de un circulo dado], *recíprocamente los vér-*

tices de este serán los polos respectivos de los lados de aquel.

En efecto, siendo E el polo de AB, y F el polo de BC, resulta que EF es la polar del vértice del ángulo ABC; ó lo que es lo mismo, B es el polo de EF. — De la misma manera se demostraria que el punto C es el polo de FG. — Y asi sucesivamente.

Escolio. Esta última propiedad hace dar á los dos polígonos ABCD, EFGH, el nombre de *polares recíprocos*, en atencion á que cada vértice del uno es polo de un lado del otro; y recíprocamente.

Teorema IX. (*Fig.* 223). Fig. 223.

N.° 36. *En todo cuadrilátero* ABCD, *inscrito al círculo, el punto de concurso* I *de las diagonales* AC, BD, *y los puntos de concurso de los lados opuestos*, AB y CD, AD y BC, *tomados de dos en dos, forman un triángulo* IPQ *que tiene cada vértice por polo del lado opuesto.*

En efecto, las rectas PQ, PA, PI, PC, forman un haz armónico (n.° 29, *Apénd.*); luego las rectas AD, BC, estan divididas armónicamente; la primera en los puntos Q, E, y la segunda en los puntos Q, F. — De aqui resulta que los puntos E, F, pertenecen á la polar del punto Q, y que por consiguiente esta polar es la misma recta PI.

Del mismo modo se probaria que QI es la polar del punto P.

Respecto del tercer lado PQ, debe observarse que su polo debe á la vez hallarse situado en la polar del punto P y en la del punto Q; luego será el punto I (n.° 34, *Apénd.*).

Las transversales consideradas en el círculo tienen otras muchas mas propiedades; pero nos contentaremos con citar las siguientes:

1.° *En todo exágono inscrito al círculo, los puntos de interseccion de los lados opuestos, tomados de dos en dos, se encuentran todos en línea recta;*

2.° *En todo exágono inscrito á un círculo, las diagonales tiradas por los vértices opuestos, tomados de dos en dos, concurren en un mismo punto.*

Estos teoremas dan lugar á varias consecuencias sobre los cuadriláteros y los pentágonos inscritos y circunscritos (*).

(*) Véase la segunda edicion francesa de esta obra, pág. 214 y siguientes; y los *Anales de Matemáticas* en varios puntos, principalmente en el t. XIV, p. 39 y siguientes: véase tambien la *Correspondencia sobre la Escuela Politécnica.*

SEGUNDA SECCION.

§. I. *Consideraciones generales sobre las curvas.*

De las tangentes y de las normales á las curvas.— Curvas polares recíprocas.

N.º 37. Estendiendo á las curvas en general lo que hemos dicho del círculo comparado con los polígonos regulares (número 245.), definiremos una CURVA cualquiera, diciendo que es un *polígono*, ó mejor, una *línea quebrada de infinito número de lados infinitamente pequeños*; — cada uno de los cuales se llama *elemento* de la curva.

Admitida esta definicion, podemos decir que la *tangente* en un punto dado, es la *prolongacion indefinida* en ambos sentidos, del *elemento* que en aquel mismo punto *constituye la curva*; cuya nueva definicion de la tangente concuerda con la que dimos en el n.º 110; porque al decir que la tangente es una secante cuyos dos puntos de interseccion con la curva *se reducen á uno solo*, se significa que la *cuerda* que los junta llega á ser *infinitamente pequeña*, y á confundirse por consiguiente con el *elemento de la curva*. La definicion que dimos en el n.º 102, de la tangente al círculo, solo puede evidentemente admitirse cuando se trate de curvas *convexas*, es decir, de curvas que no pueden encontrar á una recta (n.º 36.) mas que en dos puntos; mientras de la nueva definicion se infiere que una *línea tangente* en un punto, puede á la vez ser secante en otros varios. — Pronto veremos ademas que una misma recta puede *tocar* y *cortar* en un mismo punto á una curva.

Llamaremos de aqui en adelante *normal* á una curva, la recta tirada por el punto de contacto, *perpendicularmente á la tangente*.

N.º 38. La consideracion de los *elementos* de las curvas es de la mayor importancia en la teoría de estas líneas; porque, considerándolas como verdaderos polígonos, podemos por induccion adoptar la consecuencia, de que *toda propiedad general demostrada respecto de una línea quebrada*, independientemente del número, magnitud y mútuas inclinaciones de los lados, *queda tambien demostrada respecto de la línea curva*, que puede considerarse como límite de la otra (n.º 244.).

Asi es, por ejemplo, como inferimos, que siendo cierta la proposicion demostrada sobre las *polares recíprocas* (n.° 35, *corol.*, *Apend.*), cualquiera que sea el número de los lados de dos polígonos, lo es tambien cuando llega á ser infinito dicho número de lados; de cuya observacion nace el notable teorema siguiente:

Si dos curvas trazadas en un mismo plano *son tales que cada punto de la una es el polo de un elemento* (ó de una *tangente*) *de la otra* [respecto de un círculo dado], recíprocamente, *cada punto de la segunda es el polo de un elemento de la primera;* y las dos curvas se llaman POLARES RECÍPROCAS.

De donde resulta necesariamente que — *El número de intersecciones de una de las curvas con una recta cualquiera es igual al número de las tangentes que se pueden tirar á la otra curva, por el polo de aquella recta.*

Del círculo osculador y del radio de curvatura.

N.° 39. Por un punto M dado en una curva AB (*fig.* 224), siempre se pueden hacer pasar una infinidad de círculos que tengan en aquel punto por tangente comun á la tangente ST de la misma curva; de donde resulta que los círculos son tambien tangentes á la curva, porque tienen con ella un elemento comun. Ahora bien, es claro que entre aquellos hay uno que se aproxima mas que todos los otros á la curva en las cercanías del punto M de contacto, es decir, que tiende á confundirse sencillamente con ella, mas que todos los otros, en la estension de un arco pequeño tomado á uno y otro lado del punto dicho. — Ese círculo único se llama CÍRCULO OSCULADOR de la curva en el punto M; y la consideracion de los elementos nos suministra el medio de dar de él una definicion mas exacta y enteramente geométrica. Fig. 224.

Para esto, recordemos qne se necesitan tres puntos [no colocados en línea recta] para determinar una circunferencia de círculo (n.° 127.); de donde resulta que la circunferencia que se aproxime mas que todas las otras á la curva, en las cercanías del punto M, será la que tenga con ella, á uno y otro lado de dicho punto é infinitamente cerca de él, otros dos puntos comunes, es decir finalmente, la que tenga con la curva dos elementos consecutivos comunes, uno á un lado y otro á otro del punto M.

Esto supuesto, el círculo osculador de un punto M (*figura* 225) se construye del modo siguiente: — Suponiendo la curva descompuesta en elementos, sean LM, MN, los dos elementos consecutivos que deben pertenecer al círculo buscado; — por sus puntos medios, *e*, *f*, *levántese* las respectivas norma- Fig. 225.

les, que irán á encontrarse (n.° 50.) en un punto O, *centro del círculo osculador*, cuyos radios serán OL, OM, ON, ó bien Oe, Of, que no difieren sensiblemente de los otros.

N.° 40. El círculo osculador, cuya construccion general acabamos de dar, goza de varias propiedades tan importantes como curiosas: examinaremos las principales.

Prolónguense ante todo los elementos LM, MN; y resultarán dos tangentes consecutivas LT, MU, que formarán entre sí un ángulo *infinitamente pequeño* que se llama *ángulo de contingencia*.—Ahora bien, es claro que cuanto mayor sea este ángulo, tanto mas se aparta la curva en el punto M de la tangente LM; y por consiguiente, tanto *mas curva* es.—El ángulo de contingencia sirve por consiguiente para apreciar lo que se llama *la curvatura* de una curva en un punto dado, y por eso suele tambien llamarse *ángulo de curvatura*.

Ademas, siendo el ángulo TMU evidentemente igual al ángulo eOf, porque tienen ambos por suplemento al ángulo LMN (n.° 70.), se deduce de aqui otro medio de apreciar el grado de curvatura de una curva dada, mas cómodo que el primero, porque reduce su valuacion á la de la curvatura del círculo osculador, que es tanto mas considerable [en un punto dado de la curva] (véase el n.° 262.), cuanto menor es el radio del círculo, pues el radio disminuye evidentemente á medida que aumenta el ángulo de contingencia, y *vice-versa*.

De aqui procede que el círculo osculador suele tambien llamarse *círculo de curvatura*, su centro O *centro de curvatura*, y su radio *radio de curvatura*.

Fig. 226. N.° 41. Supongamos ahora que en todos los puntos de la curva AMB (*fig*. 226), se ha efectuado la construccion arriba dada para el punto M: resultará otra curva POQ, que será el *lugar geométrico de los centros de curvatura* de la curva AB.—De modo que si haciendo centro en cada uno de los puntos [O] de la línea PQ, se describiese con el radio correspondiente de curvatura Oe, un arco de círculo sumamente pequeño [eMf], la curva entera AB podria considerarse como compuesta de todos esos arcos elementales.—Esta descripcion puede ejecutarse muy sencillamente por un medio enteramente *mecánico*, es decir, por un *movimiento contínuo*.

Para esto, admitamos que se haya estendido á lo largo de la curva PQ, supuesta *sólida*, un *hilo flexible* que se apoya exactamente en toda la estension de su contorno, sobrando solo, en el punto P, una longitud PA igual al radio de curvatura del punto A. Es claro que si, en esta hipótesis, se van separando sucesivamente los diversos elementos del hilo PQ [empezando en el punto P], de los elementos á quienes cubrian respectivamente en la curva sólida PQ, permaneciendo siempre tendido el hilo restante, el estremo A irá describiendo sucesivamente los diversos elementos de la curva AB.

La curva PQ se llama, por esta propiedad, la *evoluta* de la curva AB; y recíprocamente esta se llama la *evolvente* de aquella. La *evoluta* de un círculo se reduce á un punto único, que es su centro; y la evoluta de una curva cualquiera es respecto de ella lo que el centro es respecto del círculo. La evoluta viene á ser en cierto modo un centro variable correspondiente á un radio variable que es el del círculo osculador; y la evolvente puede considerarse descrita de una manera análoga al círculo, por medio de ese centro y de ese radio que varían de continuo.

Así como un círculo no tiene mas que un centro, y sin embargo un punto puede ser centro de muchos círculos, así tambien una evolvente no puede tener mas que una sola evoluta, mientras que una misma evoluta puede pertenecer á una infinidad de evolventes. Porque es claro que si empezando desde el punto A, tomamos en el hilo APQ, á uno y otro lado del punto A, una longitud cualquiera AA', el mismo movimiento que ha hecho al punto A describir la curva AB, bastará para que el punto A' engendre otra curva *equidistante* de la primera, y *paralela* á esta.

Observaremos finalmente que todos los *radios de curvatura* son tangentes á la evoluta, porque son sus elementos [prolongados], y ademas son *normales* á los elementos de la evolvente.

De la convexidad y concavidad de las curvas. — Puntos singulares.

N.° 42. Vamos ahora á dar las nociones mas claras que podamos sobre las diversas formas que puede tener una curva trazada en un plano.

En la parte especulativa de la Geometría y en las Matemáticas sublimes, ocurre muchas veces considerar dos clases principales de curvas: unas *reentrantes y cerradas* ABCD, A'B'C'D'E' (*fig.* 227), como el círculo; otras que se estienden Fig. 227.
indefinidamente en ambos sentidos, como la línea recta: tales son las curvas MNP y M'N'P'Q'R'S' (*fig.* 228). — Algunas veces Fig. 228.
tambien suelen estar compuestas de diversas partes, cerradas unas, é indefinidas otras.

Pero rara vez sucede que una curva, considerada como *lugar geométrico*, se detenga bruscamente en un punto sin pasar adelante de uno ú otro modo.

Ademas, cada una de las dos clases de curvas recien definidas, se subdivide en dos especies: unas, como la ABCD (*figura* 227) y la MNP (*fig.* 228), se llaman líneas *convexas*; otras, Fig. 227. Fig. 228.

Fig. 227 y 228. como las A'B'C'D'E'F' (*fig.* 227) y M'N'P'Q'R' (*fig.* 228), tienen *sinuosidades.*

Para distinguir estas dos especies, obsérvese que, á imitacion de la línea recta, toda línea curva divide en *dos regiones* (n.° 11.) al plano en que está trazada.

Fig. 227. Si la curva es reentrante y cerrada (*fig.* 227), una de las regiones, llamada *interior*, es un espacio *limitado;* mientras Fig. 228. la otra region es indefinida. — En el caso de la *fig.* 228, son indefinidas ambas regiones.

Esto supuesto, el carácter verdaderamente esencial de una curva convexa [ademas de los que resultan de su comparacion (n.° 36.) con los polígonos convexos (n.° 37, *Apénd.*)], consiste en que sus *centros de curvatura estan todos situados en la misma region;* — y entonces se dice que la curva vuelve su *concavidad* hácia los puntos de esta region, y su *convexidad* hácia los puntos de la otra.

Cuando por el contrario la curva tiene sinuosidades, unas de sus partes tienen sus centros de curvatura situados en una Fig. 227. region, y otras los tienen en la opuesta. Asi, en la *fig.* 227, la parte F'A'B'C'D' tiene sus centros de curvatura situados en la region interior, y la parte D'E'F' en la region esterior.

N.° 43. Todo punto F', comun á dos partes cuyos centros de curvatura corresponden á dos regiones diferentes, se llama punto de inflexion. — Al pasar por él, la curva que era *convexa* respecto de una region, se hace *cóncava* respecto de la misma, y *vice-versa.*

Otro carácter distintivo del punto de *inflexion*, es que se confunden en él las direcciones de dos *elementos consecutivos* de la curva; de modo que la tangente puede alli considerarse como una secante *cuyos tres puntos de interseccion con la curva se reunen en uno solo.*

Fig. 227*. Se ve tambien (*fig.* 227*) que en dicho punto, A, la tangente PQ corta á la curva al mismo tiempo que la toca, segun anunciamos en el n.° 37. En fin, la tangente en aquel punto es tal, que las dos partes de la curva se hallan situadas en region distinta respecto de ella.

N.° 44. Puede suceder que la curva pase muchas veces por Fig. 229. un mismo punto A, ó B, ó C (*fig.* 229); y entonces el punto se llama *multiplo:* su carácter principal es que en él hay tantas tangentes como ramas de curva; pudiendo suceder sin embargo que se confundan dos ó mas tangentes. — Lo mismo sucede respecto de los centros de curvatura del mismo punto.

Algunas veces la curva vuelve atrás repentinamente des-Fig. 230. pues de haber llegado á un punto cualquiera A (*fig.* 230), que entonces se llama *punto de retroceso.*

Los dos arcos de curva que se reunen en un punto de re-

troceso, siempre tienen allí comun la tangente; y esto le distingue del punto *multiplo*, en el cual las tangentes solo se confunden *accidentalmente*.

Se distinguen dos especies de puntos de retroceso, segun se hallan situados á distinto lado ó á uno mismo respecto de la tangente los dos arcos de curva AB y AC, ó AB y AD(*).

Los puntos *multiplos*, los de *inflexion*, y los de *retroceso*, suelen llamarse en general *puntos singulares*. — Y son en las curvas puntos naturales de division de las diversas partes que las componen.

N.° 45. En fin, cuando una rama de curva, tal como ABC (*fig*. 231), se estiende indefinidamente, acercándose *sin cesar* Fig. 231.
y cuanto se quiere á una recta TS situada en su plano, sin encontrarla jamas, la recta se llama *asímptota* de la curva; y la curva es tambien *asímptota* de la recta. — Es importantísima la consideracion de las asímptotas en las curvas que tienen una ó mas ramas indefinidamente prolongadas.

N.° 46. Dos curvas, ó dos arcos de curva, que tienen comun un punto, se llaman *tangentes* si tienen un elemento comun, y por consiguiente una tangente comun; en cualquier otro caso son simplemente secantes, aun cuando el punto comun fuera el estremo comun de dos arcos de curva. — Dos curvas pueden cortarse y tocarse á la vez en un número cualquiera de puntos.

N.° 47. Debemos ahora decir algunas palabras sobre lo que se llama ley de continuidad en las curvas.

Para que una curva sea contínua entre dos de sus puntos, es necesario que las direcciones de su tangente y de su normal varien *por grados insensibles*, lo mismo que los valores de su radio de curvatura; de modo que entre dos elementos consecutivos, sea completamente inapreciable el ángulo de contingencia (n.° 40, *Apénd.*), y por consiguiente la diferencia de los dos radios de curvatura correspondientes. — Cuando faltan estas condiciones, es *discontínua* la curva, y debe considerarse como un conjunto de curvas diferentes.

Las artes, y en particular la arquitectura, usan numerosas aplicaciones de curvas *discontínuas*. Sirvan de ejemplo el *floron* (*fig*. 232) y la *ojiva* (*fig*. 233), compuestas de arcos de círculo Fig. 232. Fig. 233.
que se cortan; el *talon* (*fig*. 234) y la *escocia* (*fig*. 235), compuestas de arcos de círculo tangentes, y en general los *perfiles* Fig. 234. Fig. 235.

(*) Mr. Francœur ha propuesto las denominaciones de *ceratoide* y de *ramfoide* para caracterizar las dos especies: el primer nombre significa *semejante á un cuerno*, y el segundo *semejante á un pico de pájaro*.

de todas las *molduras*. — Tambien citaremos los *óvalos*, compuestos de cuatro arcos de círculo tangentes de dos en dos,
Fig. 236. BA, AC, CD, DB (*fig.* 236), y que suelen llamarse *asas de cesta*.

Es claro que todas estas curvas son *discontinuas*, porque
Fig. 236. siendo los radios de curvatura (*fig.* 236) los mismos radios de los arcos AB, BD, DC, CA, que componen la curva, resulta que la curvatura es constante en toda la estension de cada uno de los arcos, y varía *de repente* en los puntos de enlace, A, B, D, C.

Terminará estas consideraciones una proposicion general sobre las líneas convexas envueltas por otras líneas.

Fig. 237 y 238. TEOREMA. (*Fig.* 237 y 238.)

N.º 48. *Una línea convexa cerrada* ABCDA, *quebrada, curva, ó mista, es menor que una línea cualquiera* PQRSTP (convexa ó cóncava) *que la envuelve por todas partes.*

Consideremos primero el caso en que la línea envuelta es
Fig. 237. un polígono (*fig.* 237), y prolonguemos todos sus lados AB, BC, CD, DA, en el mismo sentido (n.º 87, *nota*), hasta encontrar en a, b, c, d, con la línea envolvente.

Esto supuesto, en virtud de la definicion de la línea recta, tendremos esta serie de desigualdades

$$\begin{aligned} AB + Ba &< Ad + dP + PQ + Qa, \\ BC + Cb &< Ba + aR + Rb, \\ CD + Dc &< Cb + bS + Sc, \\ DA + Ad &< Dc + cT + Td, \end{aligned}$$

ó, sumando miembro á miembro, y simplificando,

$$AB + BC + CD + DA < PQ + QR + RS + ST + TP,$$

ó simplemente $\quad ABCDA < PQRSTP.$

Si la línea envuelta es una línea curva [ó mista] ABCD
Fig. 238. (*fig.* 238), los lados del polígono que acabamos de considerar se hallarán reemplazados [en todo ó en parte] por los elementos de una curva; y, suponiendo todos los elementos prolongados en un mismo sentido segun sus respectivas tangentes, será aplicable á la nueva hipótesis la precedente demostracion. Luego la proposicion es verdadera siempre que es convexa la línea envuelta.

Puede ademas demostrarse directamente la proposicion respecto de las curvas, de la manera siguiente:

Tírese por un punto cualquiera A (*fig*. 238) de la curva envuelta, la tangente MAN. — Tendremos desde luego Fig 238.

$$MN < MPQN \text{ (n.° 5.)};$$

de donde $$MNRSTM < MPQNRSTM.$$

Por el punto M, tírese tambien la tangente MCS; y se tendrá la nueva desigualdad

$$MS < MTS,$$

de donde $$MNRSM < MNRSTM.$$

Continuando asi tirando tangentes á la curva ABCD, se obtiene una serie de líneas siempre envolventes respecto de CBCD, pero envueltas por las precedentes, cuyas líneas [mistas] van siendo mas y mas pequeñas á medida que se aproxima su contorno á la línea ABCD; luego esta, que es su límite, es mas pequeña que todas ellas, y por consiguiente, con mayor razon, menor que la curva PQRSTP.

Escolio 1.° Las diversas proposiciones demostradas en los números 243, 262,..., solo son casos particulares de la proposicion precedente.

Escolio 2.° Es bien claro que esta proposicion es tambien aplicable al caso en que la línea envuelta ABCD y la línea envolvente AECD (*fig*. 239) tienen una parte comun ADC, ó puntos comunes, con tal que la parte envuelta ABC sea convexa y vuelva su convexidad hácia la linea envolvente (n.° 42, *Apénd.*) Fig. 239.

§. II. *De algunas de las curvas mas sencillas. — Elipse, hipérbola, parábola. — Construccion de sus tangentes y de sus normales.*

Nos proponemos en este párrafo dar á conocer algunas de las curvas mas sencillas entre las que pueden describirse facilmente, ya por puntos, ya por movimiento continuo (como el círculo), por medio de la *regla* y del *compás*.

De la Elipse. (*Fig*. 240.) Fig. 240.

N.° 49. *Se llama* elipse *una curva plana, tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos*, M, *á dos puntos fijos*, F, F′, *es constante é igual á una línea dada* 2a [mayor necesariamente que la distancia FF′ de los dos puntos fijos].

La elipse asi definida comprende al círculo como caso particular, porque basta suponer que los dos puntos F, F′, se confunden en uno solo, lo cual da $FM + F'M = 2FM = 2a$; de donde $FM = a$.

Resulta de esta definicion, que si en la recta indefinida XY, que junta los puntos F, F', *se toman* desde el punto O medio de FF', dos distancias OA, OB, iguales á a [que darán $FA = F'B$], los dos puntos A, B, asi determinados, pertenecerán á la curva.

En efecto, tendremos en virtud de la construccion,

$$FA + F'A = FA + FF' + F'B = OA + OB = 2a,$$
$$F'B + FB = F'B + F'F + FA = OB + OA = 2a.$$

Ademas, si desde los puntos F, F', como centros, con el mismo radio a [mayor que OF, OF'], se *describen* arcos de círculo que se corten en dos puntos C, D, situados en la perpendicular ZU, levantada sobre el punto O, dichos dos nuevos puntos perteneecerán á la curva.

Porque tendremos

$$FC + F'C = 2a, \qquad FD + F'D = 2a.$$

Para obtener otros puntos de la curva, *señalemos* en AB un punto cualquiera I [situado entre los puntos O y F']; y haciendo centro respectivamente en los puntos F, F', con los radios respectivos AI, IB, *trácense* arcos de círculo que se corten en dos puntos M, M'; los cuales pertenecerán á la curva;— porque tendremos

$$FM + F'M = AI + IB = 2a.$$

Advert. Mientras el punto I está situado entre O y F', resulta

$$AI - IB, \quad ó \quad FM - F'M < FF';$$

y como ya tenemos $FM + F'M$, ó $2a > FF'$, resulta que los arcos descritos se cortan necesariamente (n.° 143.).

Los puntos N, N', simétricos (n.° 4, *Apénd.*) de los puntos M, M', respecto de ZU, pueden describirse con los mismos radios AI, IB (*véase* el n.° 167.).

Podremos pues de este modo obtener cuantos puntos queramos de la curva buscada; y uniéndolos todos por una línea *contínua*, tendremos la elipse pedida.

N.° 50. *Descripcion por movimiento contínuo:* — Despues de fijar en los puntos F, F', los dos estremos de un hilo tan largo como $2a$, *atirántese* el hilo por medio de una punta que pueda señalar; muévase esta punta al rededor de F, F', conservando el hilo siempre *tirante*, y pasando sucesivamente por los puntos A, B, de la recta XY; con cuyo movimiento quedará descrita la curva pedida.

N.° 51. *Definiciones.*—En la elipse, las dos rectas XY, ZU, son evidentemente dos *ejes de simetría* (n.° 4, *Apénd.*); por cuya razon se llaman ejes de la curva las dos rectas AB, CD.—La mayor, AB, se llama *eje mayor*, y la otra, CD, se llama *eje menor*.

El punto O, que es un *centro* de simetría, se llama *centro* de la curva.

Los puntos F, F′, que han servido para la descripcion de la curva, se llaman *focos*; y las distancias FM, F′M, FN, F′N, se llaman *radios vectores* de la curva.

TEOREMA. (*Fig.* 241.) Fig. 241.

N.° 52. *En toda elipse, el ángulo formado por uno de los radios vectores*, F′M, *tirado por un punto cualquiera* M *de la curva, y la prolongacion* MK *del otro radio vector*, FM, *queda dividido en dos partes iguales por la tangente* SMT *tirada en el mismo punto.*

Antes de demostrar esta proposicion, debemos observar que despues de trazada la curva, tenemos respecto de cualquier punto *esterior* P (*fig.* 240), $FP+F'P>2a$, y por el contrario, respecto de cualquier punto P′ *interior* á la curva, $FP'+F'P'<2a$. Fig. 240.

En efecto, en el primer caso, juntando el punto F con el punto M en que F′P encuentra á la curva, tendremos (n.° 38.)

$$FP+PF'>FM+MF';$$

pero $$FM+MF'=2a;$$

luego $$FP+F'P>2a.$$

En el segundo, prolongando la línea FP′ hasta *m*, y tirando la *m*F′, tendremos

$$FP'+P'F'<Fm+mF',$$

luego $$FP'+P'F'<2a.$$

Esto supuesto, consideremos un punto cualquiera M (*figura* 241) de la curva. Tírense los radios vectores FM, F′M, y prolónguese FM hasta K; divídase despues el ángulo F′MK en dos partes iguales: digo que la *bisectriz* SMT es tangente á la curva; y la demostracion se reduce á probar que todo punto N de la recta, escepto el punto M, está situado fuera de la curva. Fig. 241.

Si tomamos pues en MK la linea $MG = MF'$, y tiramos las rectas $F'G$, NG, NF', NF, resulta $F'I = IG$ (n.° 61.), y $NF' = NG$ (n.° 40.).

Tenemos ademas

$$FN + NG > FG,$$

ó $$FN + NF' > FM + F'M:$$

pero $$FM + F'M = 2a;$$

luego $$NF + NF' > 2a.$$

Asi pues, el punto N está situado fuera de la curva.

Pudiéndose aplicar el mismo razonamiento á cualquier otro punto de la recta SMT, resulta que es tangente esta línea;

L. C. D. D.

Advert. Llamaremos *círculo director* á un círculo descrito desde el punto F ó F' con el radio $2a$: — *Todo punto* M *de la curva dista lo mismo del segundo foco*, F' ó F, *que de la circunferencia directriz.*

N.° 53. ESCOLIO 1.° Esta propiedad de la tangente suministra un medio sencillo de — *Tirar una tangente á la elipse,* — 1.° — *por un punto* M *dado en la curva,* — 2.° — *por un punto* N *dado fuera de la curva.*

Fig. 241. PRIMER CASO. (*Fig.* 241.) *Tírese* el radio FMG del círculo director; *júntese* M con F'; *tísese* la bisectriz del ángulo F'MK; — y se tendrá la tangente pedida.

Fig. 241*. SEGUNDO CASO. (*Fig.* 241*.) — 1.° — Haciendo centro en N, con un radio igual á NF', *descríbase* un arco de círculo que cortará á la circunferencia directriz en dos puntos G, G'; — 2.° — *júntese* el punto F con los puntos G, G': las rectas FG, FG', encontrarán á la curva en dos puntos M, M'; — 3.° — en fin, *tírense* NM, NM'; — y se tendrán las dos tangentes que se pueden tirar desde el punto dado.

Advert. Mientras sea esterior á la curva el punto N, se cortarán las dos circunferencias trazadas con los radios NF' y $2a$; porque ademas de ser el punto F' *interior* á la circunferencia directriz, si se tira FN y se prolonga hasta encontrar en L con *circunferencia* NF, como tenemos $FN + NF' > 2a$, tendremos tambien $FN + NL > 2a$, ó $FL > 2a$; luego el punto L es *esterior* á la circunferencia directriz. Luego (n.° 136.) se cortan las dos circunferencias; y el problema admite dos soluciones.

Fig. 241 y 241*. N.° 54. ESCOLIO 2.° — En las construcciones precedentes, hemos observado que la recta F'G (*fig.* 241 y 241*) queda dividida en dos partes iguales por la tangente ST; es decir, que

$F'I = IG$. En virtud de esta observacion, si juntamos el punto O con el punto I, formaremos dos triángulos semejantes $F'FG$, $F'OI$, porque $F'F = 2F'O$, y $F'G = 2F'I$.—Ahora bien, tenemos

$$FG = FM + MF' = 2a;$$

luego $$OI = \frac{FG}{2} = a;$$

lo cual prueba que

La circunferencia descrita sobre $AB = 2a$ *como diámetro, es el lugar de los pies de las perpendiculares bajadas desde el foco* F' *á las tangentes.*

Advert. El punto F goza de la misma propiedad, como fácilmente puede demostrarse.

Por temor de estendernos demasiado, omitimos aquí la esposicion de otras muchísimas propiedades que podriamos demostrar, fundándonos solo en los principios de la Geometría elemental.

De la Hipérbola. (*Fig.* 242.)

Fig. 242.

N.° 55. La hipérbola es una *curva plana, tal que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos*, M, *á dos puntos fijos*, F, F', *es constante, é igual á una línea dada* $2a$.—[Aqui es evidente que para la existencia de la curva, es necesaria la condicion $2a < FF'$.]

De la relacion $$FM - F'M = 2a,$$

se saca $$FM = F'M + 2a;$$

por consiguiente, $F'M$ puede tener valores tan grandes como se quieran, resultando siempre un valor correspondiente para FM.—Luego la curva se estiende indefinidamente.

Si en la recta indefinida XY que junta los puntos F, F', se toman, contando desde el punto O medio de la recta FF', dos distancias $OA = OB = a$, los puntos A y B pertenecerán á la curva.

Porque tendremos

$$F'A - FA = F'B + AB - FA = AB = 2a,$$

y $$FB - F'B = FA + AB - F'B = AB = 2a.$$

Para obtener otros puntos de la curva, basta describir haciendo centro en el punto F', con un radio cualquiera $F'M$ [mayor sin embargo que $F'B$], un arco de círculo; y haciendo centro en F, con el radio $F'M + 2a$, otro arco de círculo; estos dos arcos se cortan en dos puntos M, M′ [simétricos respecto de XY], que pertenecen á la curva.

Cambiando los radios F′M, FM (*véase* el n.° 167.), se pueden obtener otros dos puntos M″, M‴, simétricos de los puntos M, M′, respecto de la perpendicular ZU levantada en el punto O sobre la recta XY. De donde se infiere que la curva consta de *dos ramas* distintas MBM′, M″AM‴, iguales y opuestas, que se estienden indefinidamente á la derecha y á la izquierda de la recta ZU, por encima y por debajo de la recta XY.

Las rectas XY, ZU, se llaman tambien aqui *ejes de simetría*, y el punto O *centro de simetría*. — Lo que distingue los ejes de la elipse de los de la hipérbola, es que en la primera los dos encuentran á la curva en cuatro puntos, y en la segunda solo la encuentra uno de ellos. Por eso el primero, XY, ó mas bien su parte AB, se llama *eje transverso*, ó *primer eje* de la hipérbola; y el otro, *eje no transverso*, ó *segundo eje*.

Los puntos F, F′, se llaman *focos* de la curva; y las líneas FM, F′M, *radios vectores*.

Tambien puede describirse la hipérbola por medio de un movimiento *contínuo*, usando un *hilo* y una *regla* que se hace girar sobre uno de los focos; pero no podemos entrar en mas pormenores sobre esta descripcion.

Sería facil probar:

1.° Que todo punto P interior á la curva, da

$$FP - F'P > 2a;$$

2.° Que todo punto P′ esterior á la curva, da por el contrario

$$FP' - F'P' < 2a.$$

En fin, aqui, lo mismo que en la elipse, se llama *círculo director* cualquiera de los descritos con un radio igual á $2a$, haciendo centro en F ó en F′.

Esto supuesto, la tangente á la hipérbola tiene una propiedad análoga á la de la elipse.

Fig. 242. TEOREMA. (*Fig.* 242.)

N.° 56. *La tangente á la hipérbola en un punto cualquiera* M, *divide en dos partes iguales el ángulo formado por los dos radios vectores* FM, F′M.

En efecto, dividamos el ángulo FMF′ en dos partes iguales; digo que la bisectriz SMT es tal, que cualquiera de sus puntos N, distinto del punto M, está situado fuera de la curva.

Para demostrarlo, tómese en MF la parte MG = MF', y tírense las rectas F'G, NF', NF, NG. En virtud de la construccion, se tiene F'I=IG (n.° 61.), NF'=NG, MF'=MG (n.° 40.); de donde MF—MG=$2a$. — Ademas, el triángulo NFG da (número 38.) NF — NG < FG, y por consiguiente

$$NF - NF' < 2a;$$

luego el punto N está situado fuera de la curva.—*Luego*. etc.

Escolio 1.° De aqui resulta el medio de — *Tirar una tangente*, — 1.° — *por un punto* M *dado en la curva*; — 2.° — *por un punto* N *dado fuera de la curva*.

Primer caso. (*Fig*. 242). *Tírese* la bisectriz del ángulo FMF'; Fig. 242.
y se tendrá la tangente pedida.

Segundo caso. (*Fig*. 242*). Haciendo centro en el punto N, Fig. 242*.
con el radio NF', *descríbase* un arco de círculo que corte en dos puntos, G, G', á la *circunferencia directriz* descrita desde el foco F [con el radio $2a$]; *tírense* las rectas FG, FG', y *prolónguense* hasta encontrar á la curva en M, *m*, y *tírense* las rectas NM, N*m*: — y se tendrán las dos tangentes que desde el punto N se pueden tirar á la curva.

Advert. El problema es posible mientras el punto N está situado en la parte de la *convexidad* de la curva, lo cual puede probarse facilmente, como respecto de la elipse, haciendo ver que el círculo NF' tiene un punto esterior y otro interior á la circunferencia $2a$.

Escolio 2.° Respecto de las *normales* á la elipse y á la hipérbola, como no son mas que unas perpendiculares á las tangentes, tiradas por los puntos de contacto, será facil observar que

1.° *En la elipse, la normal es la bisectriz del ángulo de los dos radios vectores;—y la tangente la bisectriz de su adyacente.*

2.° *En la hipérbola, la tangente es la bisectriz del ángulo de los radios vectores; — y la normal la bisectriz de su adyacente.*

Escolio 3.° En fin, *en la hipérbola como en la elipse, la circunferencia descrita sobre el eje transverso* AB *tomado por diámetro, es el lugar de los pies de las perpendiculares tiradas desde los focos á las tangentes.*

De la Parábola. (*Fig*. 243.) Fig. 243.

N.° 57. La parábola es *una curva tal que cada punto suyo dista lo mismo de un punto fijo* F, *llamado* foco, *que de una recta* LL', *llamada* directriz.

Desde el punto dado F bájese á la directriz LL' una perpendicular XY, y tómese FA igual á la mitad de la distancia FD: el punto A pertenecerá á la curva; porque, en virtud de esta construccion, el punto A dista lo mismo del punto F que de la directriz LL'.

Para obtener otros puntos, *tómese* en XY un punto cualquiera P, y levántese la perpendicular indefinidad PK; despues haciendo centro en F, con un radio igual á PD, descríbase una circunferencia que corte á la recta PK, en dos puntos M, M'; que pertenecerán á la curva.

Tenemos en efecto $FM = PD = MG$;

luego el punto M dista lo mismo del punto F que de la recta LL'.

Como el punto P puede tomarse en cualquier sitio de la recta XY [escepto sin embargo en la distancia DA], resulta que la curva se estiende indefinidamente por la parte de F, tanto por encima como por debajo de XY, que la divide simétricamente.

Siendo la recta XY el único eje de simetría de la curva, se llama *eje* de la parábola, y el punto A su *vértice.*

Fig. 243.

TEOREMA. (*Fig.* 243.)

N.° 58. *La tangente* ST *á la parábola divide en dos partes iguales el ángulo formado por el radio vector* FM *y una paralela al eje tirada por el punto de contacto* M.

Ante todo, es facil probar que respecto de cualquier *punto interior*, la distancia al punto F es menor que la distancia á la directriz; y que por el contrario la distancia de un punto esterior al punto F es mayor que su distancia á la directriz.

Esto supuesto, consideremos un punto cualquiera M de la curva; y despues de tirar el radio vector FM y la recta MG perpendicular á LL', *divídase* el ángulo FMG en dos partes iguales: digo que la bisectriz ST tiene todos sus puntos, menos el punto M, fuera de la curva, y le es por lo mismo tangente.

Porque si respecto del punto N, tiramos las rectas FG, NF, NG, y la NH perpendicular á LL', tendremos $IF = IG$ (n.° [illegible]1.), $NF = NG$ (n.° 40.). Pero NF ó $NG > NH$; luego el punto N está situado fuera de la curva.

Podria aplicarse el mismo raciocinio á cualquier punto de la recta ST; luego esta recta es tangente.

ESCOLIO 1.° Para tirar una tangente á la parábola por un punto M dado en la curva, basta *dividir* en dos partes iguales el ángulo FMG.

Fig. 243*. Para tirarle una tangente por un punto N (*fig.*243*) dado fuera de la curva, se describirá haciendo centro en él, con el

radio NF, un arco de círculo que corte á LL′ en dos puntos G, G′; *tírense* GE, G′E′, paralelas á XY, *júntese* el punto N con los puntos M, M′, en que las paralelas encuentran á la curva; y se tendrán las dos tangentes que se pueden tirar á la curva desde el punto N cuando es esterior.

La discusion de este segundo caso no ofrece dificultad, por lo cual no nos detenemos en ella.

ESCOLIO 2.° *La normal á la parábola divide en dos partes iguales el ángulo formado por la paralela al eje y la prolongacion del radio vector.*

ESCOLIO 3.° De ser FI = IG, FA = AD, resulta que el punto I se encuentra en la tangente AB perpendicular al eje; lo cual prueba que, — *En la parábola, la perpendicular al eje, tirada por el vértice, es el lugar de los pies de las perpendiculares bajadas desde el foco á las tangentes.*

ESCOLIO GENERAL. Las tres curvas cuya naturaleza y principales propiedades acabamos de esponer, son importantísimas en todas las partes de las matemáticas, y aun de las ciencias físico-matemáticas. Se comprenden todas con el nombre de secciones cónicas, porque resultan de la interseccion de un cono con un plano, como veremos en el segundo apéndice.

FIN DE LA PRIMERA PARTE.

PARTE SEGUNDA.

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.

Advertencia. En esta parte de la Geometría, las figuras deben suponerse penetrables y transparentes.

LIBRO TERCERO.

DE LAS FIGURAS CONSIDERADAS EN EL ESPACIO.

CAPITULO PRIMERO.

DEL PLANO Y DE LOS CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES PLANAS.

PRELIMINARES.

N.° 290. En el n.° 8 admitimos como evidente que —*Por tres puntos que no estan en línea recta, siempre puede pasar un plano, y no puede pasar mas de uno*: — esta proposicion puede ahora demostrarse rigorosamente.

Sean A, B, C (*fig.* 244), tres puntos situados arbitrariamente en el espacio; y concibamos que un plano [materializado por el pensamiento] esté dispuesto de modo que pase por dos de ellos A, B; con lo cual contendrá en sí enteramente á la recta AB, segun la definicion del n.° 7. — Esto supuesto, hagamos girar el plano al rededor de AB como al rededor de una charnela, hasta que pase por el tercer punto C. Es claro que el plano quedará entonces fijo de posicion en el espacio, porque no puede ya continuar su movimiento al rededor de AB, sin dejar de pasar por el punto C. — Luego el plano queda asi sujeto á pasar por los tres puntos A, B, C. Fig. 244.

Ahora digo ademas que cualquier otro plano que pase por los mismos puntos, coincide con el primero en toda su estension. — En efecto, perteneciendo á la vez á entrambos planos los tres puntos A, B, C, se infiere que se encuentran simultáneamente en uno y en otro las rectas AB, BC, CA. Lo mismo sucederá por consiguiente con la recta CD que junta el punto C con un punto cualquiera D de la prolongacion de AB, y de todas las rectas AE, AF,..., tiradas desde el punto A á los diferentes puntos de BC, CD. Pero todas las rectas tiradas en esa forma al rededor del punto A, y prolongadas indefinidamente, constituyen, digámoslo asi, con su conjunto, las dos superficies que consideramos; luego coinciden ambas en toda su estension.

N.° 291. De aqui se deducen las consecuencias siguientes, ya enunciadas en los n.os 8, 9, 10 y 32:

1.° *La comun interseccion de dos planos es una línea recta,* — porque si hubiera tres puntos de la interseccion que no estuvieran en línea recta, los dos planos coincidirian; lo cual es contra el supuesto.

2.° *Dos planos indefinidos que pasan por un mismo punto, tienen ademas comunes una infinidad de puntos, situados todos en línea recta.*

3.° *Dos rectas que se cortan se hallan en un mismo plano, cuya posicion determinan,* — porque dos puntos de la primera y uno de la segunda forman un sistema de tres puntos no colocados en línea recta.

4.° *Dos paralelas se encuentran siempre en el mismo plano,* segun su definicion (n.° 32), y *determinan su posicion,* — porque dos puntos de la una y un punto de la otra forman aqui tambien un sistema de tres puntos no situados en línea recta.

Añadiremos como consecuencias de esta última proposicion, que,

5.° *Por un punto del espacio no se pueden tirar dos paralelas á una misma recta,* — porque, de lo contrario, las dos paralelas y la recta estarian en el mismo plano, lo cual es un *absurdo* (n.° 31, 1.a *consec.*).

6.° *Todas las paralelas que pueden tirarse por los diversos puntos de una recta, estan en un mismo plano.*

N.° 292. En el dibujo se representa comunmente un plano por medio de un paralelógramo y de dos letras escritas en

Fig. 244. los vértices opuestos; asi el plano MN (*fig.* 244). — Este plano, que siempre debe suponerse indefinidamente prolongado, divide el espacio en dos porciones indefinidas, que se llaman *regiones* (n.° 11).

Se dice *paralela* á un plano la recta que nunca puede encontrarle, por mas que se prolonguen uno y otro.

N.° 293. *Definicion de los ángulos diedros, triedros,...* —

Asi como dos rectas, cuando se cortan, dividen la estension de su plano en *cuatro* porciones que hemos llamado *ángulos planos*, ó simplemente *ángulos* (n.º 10), asi tambien dos planos que se cortan, dividen el espacio en *cuatro* porciones indefinidas que se llaman ÁNGULOS DIEDROS. — Los *lados* del ángulo plano estan aqui reemplazados por dos mitades de plano que comprenden cada ángulo diedro, y que se llaman sus *caras*; y el vértice del ángulo está reemplazado por la interseccion OP (*fig.* 245) de los dos planos, que se llama el *arista* del ángulo diedro. — Cuando un ángulo diedro está solo, se designa por *dos* puntos tomados en su arista; pero cuando la misma arista corresponde á varios, se designa cada uno por medio de *cuatro* puntos [ó cuatro letras], dos tomadas en la arista, que se nombran en medio, y dos tomadas en cada una de las caras, que se nombran á los estremos. — Así los cuatro ángulos diedros de la figura 245 se enunciarán respectivamente AOPE, COPG, BOPF, DOPK, mientras que cada uno de ellos, considerado separadamente, se designaria solo por OP. Fig 245.

Ahora, si por un punto cualquiera S (*fig.* 246) de la interseccion SA de dos planos, se hace pasar otro que la corte, cada uno de los cuatro ángulos diedros formados por los dos primeros planos, queda dividido en dos porciones indefinidas de espacio, de igual naturaleza que los ángulos diedros, y que reciben el nombre de ÁNGULOS TRIEDROS; donde se vé que cuando *tres planos* se cortan en un mismo punto descomponen siempre el espacio en *ocho* ángulos triedros, como se ve en la figura 246, en la cual Fig. 246.

SABC, SA′B′C′, SA′BC, SAB′C,
SABC′, SA′B′C, SA′BC′, SAB′C′,

son los ocho ángulos *triedros* formados por los tres planos SAB, SAC, SBC, prolongados indefinidamente en todos sentidos.

N.º 294. En general se llama ÁNGULO POLIEDRO [y algunas veces, aunque impropiamente, ÁNGULO SÓLIDO] la porcion indefinida del espacio comprendida entre varios planos que se cortan en un mismo punto S (*fig.* 247). — Este punto se llama *vértice*; y se llama *cara* cada uno de los ángulos planos que comprenden el ángulo poliedro; su conjunto forma su superficie, y sus intersecciones, SA, SB, SC,..., son Fig. 247.

las *aristas.*—Cada arista sirve á la vez de lado á dos caras contíguas.—Tambien deben distinguirse en los ángulos poliedros, tantos ángulos diedros como caras hay.

Un ángulo poliedro cuando está solo, se enuncia con la única letra de su vértice; y si está unido á otros, se añaden otras letras que designan un punto de cada arista.

Se llama *plano diagonal*, todo plano SAC, SAD, tirado por dos aristas no pertenecientes á la misma cara.—Por su medio puede un ángulo poliedro descomponerse en ángulos triedros, del mismo modo que un polígono se descompone en triángulos.

Tambien suelen dividirse los ángulos poliedros en *ángulos poliedros convexos*, que son los que tienen *salientes* todos los ángulos diedros; y ángulos poliedros *cóncavos*, que son los que tienen uno ó mas ángulos diedros *entrantes*.

Los caractéres principales de los ángulos poliedros *convexos* son (*véase* el n.° 35),

1.° Que *una recta* no puede *atravesar* mas que en *dos puntos* su superficie;

2.° Que son *interiores* todos sus planos *diagonales*;

3.° Que cuando se prolonga indefinidamente una cara en todos sentidos, cada una de las otras queda enteramente situada á *un mismo lado* [ó en una misma region] respecto de la primera.

N.° 295. Un POLIEDRO [ó impropiamente hablando, un SÓLIDO] es *el espacio completamente circunscrito por varios planos que se cortan de dos en dos.*

Los diferentes polígonos que limitan el espacio se llaman *caras* del poliedro, los lados de las caras se llaman *aristas*, y las intersecciones de las aristas, *vértices.*—*Diagonal* es toda recta tirada entre dos vértices que no terminan en la misma arista; y *plano diagonal* todo plano que pasa por *tres* vértices no situados en la misma cara.

Los poliedros *convexos* tienen los mismos caractéres que los ángulos poliedros (n.° 294).

N.° 296. Este capítulo tendrá *cuatro* párrafos: el *primero* tratará de las *rectas* y *planos perpendiculares*, como tambien de los ángulos *diedros* y de su medida; el *segundo*, de las *rectas* y *planos paralelos*; el *tercero*, de los ángulos *triedros* y *poliedros*, como tambien de la teoría de los ángulos triedros *iguales*; en fin, el *cuarto*, de las diferentes clases de *poliedros* y de sus propiedades principales, prescindiendo de su estension.— (*Véase* en la página 29, la division del cap. 1.° del lib. 1.°).

Pero antes de entrar en materia diremos algunas palabras sobre el modo de representar en el papel de dibujo un sistema de puntos, de líneas y de planos, cuyas diversas partes tienen entre sí ciertas relaciones de posicion.

El primer medio, que es el que da en general la idea mas exacta de la figura, consiste en *sombrear*, á fin de hacer resaltar mejor las partes que se ven y las que quedan ocultas.— (*Véanse* las figuras 245, 246, 247). Fig. 245, 246 y 247.

Algunas veces se indica bastante el relieve de una figura, representando los desgarros ACB, A′B′C′, ABCDE (*fig.* 246, 247), hechos en las caras. Fig. 246 y 247.

Cuando varias rectas PA, PB (*fig.* 248), estan tiradas por un mismo punto P de un plano MN, y se quiere hacer entender que estan situadas en el mismo plano, es costumbre representarlas por *trazos llenos* prolongados hasta encontrar con los lados del paralelógramo que figura el plano; representándose despues las prolongaciones por *líneas de puntos*. Fig. 248.

Cuando por el contrario, una recta, tal como EF, no debe tener mas que un punto P comun con el plano, ó en otros términos, cuando solo *atraviesa* el plano, se representa con trazo lleno, hasta mas allá de los lados del paralelógramo, cuidando sin embargo de *puntuar* la parte PE, oculta por el plano, respecto de la vista.

Igualmente, si por las rectas PE, PB, que se cortan en un punto P, se quiere hacer pasar otro plano, como entonces una parte del plano MN queda oculta por el plano EPB, se puntúa la parte GB de la recta MI, cuya vista está interceptada.

Todos estos medios, que son de pura convencion, son superfluos para el que está ejercitado en *leer en el espacio*, es decir, en juzgar sobre el dibujo, de la posicion relativa de las diversas partes de una misma figura.

§. I. *De las rectas y de los planos perpendiculares entre sí.— Angulos diedros.*

Lema. (*Fig.* 249.) Fig. 249.

N.° 297. *Por un punto cualquiera* P *de una recta* EF *situada arbitrariamente en el espacio, pueden pasar una infinidad de rectas perpendiculares á la recta dada.*

En efecto, hagamos pasar un plano por la recta EP, lo cual siempre es posible (n.º 291), y tiremos en él la recta PA perpendicular á PE; despues hagámosle girar al rededor de PE, que suponemos fija; y en este movimiento, la recta PA irá tomando las posiciones sucesivas PA′, PA″, PA‴,...; y se tendrán una infinidad de rectas perpendiculares á PE en un mismo punto P.

Escolio. Hemos visto (n.º 27) que en un plano dado y por un mismo punto no se puede tirar mas que una sola perpendicular á una recta; ahora acabamos de ver que en el espacio se le pueden tirar *infinitas*. [Pronto veremos la naturaleza del lugar geométrico de todas ellas.]

Fig. 250.

Teorema I. (*Fig.* 250.)

N.º 298. *Si una recta* OP *es perpendicular á otras dos,* PA, PB, *tiradas por uno de sus puntos,* P, *es perpendicular á cualquiera otra recta* PL *tirada por el mismo punto* P *en el plano* MN *de las otras dos.*

Prolónguese la recta OP por debajo del plano MN, y tómese PO′ = PO; despues córtense las rectas PA, PL, PB, por una transversal cualquiera CED, y tírense las rectas OC, OE, OD, y O′C, O′E, O′D. — Esto supuesto, tenemos OC = O′C, OD = O′D (n.º 40); luego los dos triángulos OCD, O′CD, son iguales (n.º 63, tercer caso); y en la superposicion de estos triángulos, las rectas OE, O′E, coincidirán; por consiguiente, la recta PE es perpendicular á OO′ (n.º 42).

Advert. El mismo raciocinio podria aplicarse á toda recta diferente de PL, tirada por el punto P en el plano MN.

Fig. 249.

Teorema II. (*Fig.* 249.)

N.º 299. *El lugar de todas las perpendiculares* PA, PA′, PA″,..., *tiradas á una recta* EF *por uno de sus puntos*, P, *es un plano.*

Para demostrarlo basta probar que las tres rectas PA, PA′, PA″, por ejemplo, estan en un mismo plano. — Supongamos pues que asi no sea, y que el plano de las rectas PA, PA″, no contenga á PA′; hagamos pasar por PE y PA′ otro plano cuya interseccion con el plano APA″ será la recta PK distinta de PA′. — Esto supuesto, en virtud del teorema precedente, siendo PE perpendicular á PA, PA″, lo será tambien á PK; pero, tambien por el supuesto, la misma PE es perpendicular á PA′: tendriamos pues dos rectas perpendiculares á PE, *en un mismo punto y en el mismo plano* de la dicha recta, lo cual es *absurdo* (n.º 27).

Por consiguiente, no se puede suponer que PA, PA′, PA″, no estén en un mismo plano.

El mismo razonamiento se haria respecto de cualesquiera otras rectas PA‴, PA$^{\text{IV}}$,... *Luego*, &c.

Escolio. El plano que contiene todas las rectas PA, PA′, PA″,..., perpendiculares á EF, se llama *plano perpendicular* á esta recta; y recíprocamente, la recta EF, perpendicular á todas las que pasan por su pie en el plano, es *perpendicular* al plano.

Corolario 1.º *Por un punto P dado en una recta EF (fig. 249), siempre se puede hacer pasar un plano perpendicular á la recta; — y no se puede hacer pasar mas de uno.* Fig. 249.

La *primera* parte de esta proposicion es consecuencia inmediata de lo que antecede.

Para probar la *segunda*, admitamos, por un momento, que por el punto P puedan pasar dos planos perpendiculares á EF; si hacemos pasar por esta recta un plano cualquiera [distinto del que pasa por la interseccion de los dos primeros], este plano cortará á los otros dos en dos rectas perpendiculares á PE. — Tendriamos pues dos perpendiculares á una *misma recta, por un mismo punto y en su mismo plano*, lo cual es absurdo; — *luego*, &c.

Corolario 2.º Asi tambien, — *Por un punto C (figura 250), dado fuera de una recta OO′, siempre puede pasar un plano perpendicular á la recta, y no puede pasar mas que uno.* Fig. 250.

Primeramente, despues de hacer pasar un plano por el punto C y por la recta OO′ (n.º 290), tiremos en él la recta CP perpendicular á OO′; despues, desde el punto P, en otro plano cualquiera que pase por OO′, trácese otra recta PD perpendicular tambien á OO′: esta será perpendicular al plano que pase por PD y PC (n.os 298 y 299, *escolio*); y recíprocamente, el plano PDC será perpendicular á la recta OO′ (*escolio* precedente); *luego*, &c.

En segundo lugar, sea, si es posible, otro plano perpendicular á OO′, y que pase por el punto C: el plano OPC cortaria á los dos planos perpendiculares á OO′ en dos rectas que pasarian por el punto C, y serian ambas perpendiculares á OO′; lo cual es *absurdo*; — *luego*, &c.

Advert. Un plano queda determinado en el espacio con la doble condicion de *pasar* por un punto, y *ser perpendicular* á una recta; lo cual prueba que la condicion de perpendicularidad equivale á *dos* condiciones, pues en general se necesitan *tres* para determinar un plano en el espacio (*véase* el n.° 291).

Fig. 251.

Teorema III. (*Fig.* 251.)

N.° 300. *Cuando una recta* AP *es perpendicular á un plano* MN, *si en este se tira arbitrariamente otra recta* BC, *y desde el pie* P *de la primera, se baja una perpendicular* PD *á la segunda, esta es perpendicular al plano de las otras dos.*

Tomemos en BC, desde el punto D, dos distancias iguales DE, DF; tiremos las rectas PE, PF, y juntemos un punto cualquiera A de la recta AP con los mismos puntos E, F. — Esto supuesto, los dos triángulos, APE, APF, son iguales, por ser rectángulos en P (n.° 298); y ademas tienen el lado AP comun, y PE = PF (n.° 40); de la igualdad de estos triángulos resulta que AE = AF; luego (n.° 42) la recta AP es perpendicular á las rectas DA, DP, que pasan por su pie en el plano APD, y por consiguiente, es perpendicular á este plano (n.° 298); *L. C. D. D.*

Escolio 1.° Si, por el punto D, en el plano APD, se tira la recta DL paralela á PA, la recta BC, perpendicular al plano APD, es necesariamente perpendicular á DL (n.° 298); recíprocamente, siendo la recta DL perpendicular á BC, será tambien perpendicular á DP (n.° 34, 2.°); luego es perpendicular al plano MN (n.° 298).

Fig. 251. Escolio 2.° La *figura* 251 ofrece el ejemplo de dos rectas AP, BC, perpendiculares á una misma recta PD, y que sin embargo no pueden encontrarse, porque AP no hace mas que atravesar el plano MN, mientras la otra está situada en él enteramente. — (*Véase* para este objeto *la definicion de las paralelas*, n.° 32).

Fig. 252 y 253.

Teorema IV. (*Fig.* 252 y 253.)

N.° 301. *Por un punto dado en un plano ó fuera de un plano,* MN, — 1.° — *siempre se puede tirar al plano* *una perpendicular*; — 2.° — *no se le puede tirar mas que una.*

Demostraremos primero ambas proposiciones para el caso de darse el punto *en el plano* MN.

Sea P el punto (*fig.* 252); trácese en el plano MN una recta cualquiera EPG; despues por el punto P concíbase (número 299, *corol.* 1.°) el plano RS perpendicular á EG, y sea CPR su interseccion con el plano MN; en fin, sobre el punto P, en el plano RS, levántese la recta PK perpendicular á PR. — Esto supuesto, siendo EG perpendicular al plano RS, es necesariamente perpendicular á PK; recíprocamente, PK es perpendicular á PE; pero lo es tambien, por construccion, á CPR; luego lo debe ser al plano MN; y queda probada la primera proposicion. Fig. 252.

Sea ahora, si es posible, otra segunda recta PL perpendicular al plano MN. Hagamos pasar por las dos rectas PK, PL, un plano que corte al plano MN en una línea II′, á la cual deberán ser perpendiculares simultáneamente las rectas PK, PL. Resultarian pues dos perpendiculares levantadas sobre un mismo punto de una recta en el mismo plano de esta, lo cual es un *absurdo*; — *luego*, &c.

Consideremos ahora el caso de darse el punto *fuera del plano*, y séalo A (*fig.* 253). Fig. 253.

En un punto cualquiera P′ del plano MN, levántese la recta P′A′ que le sea perpendicular; tambien lo será la recta AP tirada por el punto A [en el plano AA′P′], paralelamente á A′P′ (n.° 300, *escolio* 1.°); queda pues demostrada la primera proposicion.

Finalmente, desde el punto A no se pueden bajar dos rectas perpendiculares AP, AQ, al plano MN; porque si se pudieran bajar, se tendrian dos perpendiculares AP, AQ, desde un mismo punto bajadas á una recta en su mismo plano; lo cual es un *absurdo* (n.° 27).

Queda pues completamente demostrado el teorema.

N.° 302. Escolio. — Dado un punto fuera de un plano, todas las rectas que pasan por él y van á los diferentes puntos del plano, escepto la perpendicular, se llaman *oblicuas* al plano; y sus puntos de encuentro con el plano se llaman sus *pies*.

Se dice que dos oblicuas *distan igualmente* de la perpendicular cuando sus *pies* estan equidistantes del pie de la perpendicular. — Esto supuesto,

Fig. 254.

TEOREMA V. (*Fig.* 254.)

N.º 303. Si desde un punto O, tomado fuera de un plano MN, se le tiran una perpendicular OP y diferentes oblicuas OA, OA′,..., OB,

1.º *La perpendicular es mas corta que todas las oblicuas;*

2.º *Dos oblicuas* OA, OA′, *que distan igualmente del pie de la perpendicular, son iguales;*

3.º *La oblicua* OB, *que se aparta mas de la perpendicular, es mas larga que la* OA.

En efecto, — 1.º — Sea OA una oblicua cualquiera: el triángulo rectángulo OPA da $OP<OA$ (n.º 39);

2.º — Sea $PA'=PA$: los triángulos rectángulos OPA, OPA′, son iguales (n.º 63, 2.º *caso*), y dan $OA'=OA$;

3.º — Puesto que tenemos $PB>PA$, tomemos en PB una distancia $PA'=PA$, y tiremos la oblicua OA′; con lo cual tendremos $OB>OA'$ (n.º 40); pero tenemos por otro lado $OA'=OA$; luego resulta $OB>OA$; *L. C. D. D.*

Las recíprocas son *ciertas*, como consecuencias del principio establecido en el número 21.

COROLARIO 1.º *La perpendicular bajada desde un punto á un plano, mide la verdadera distancia del punto al plano.*

COROLARIO 2.º *Un punto cualquiera* O *de la línea* OP *perpendicular á un plano está equidistante de todos los puntos de la circunferencia descrita desde su pie como centro con un radio cualquiera.*

ESCOLIO 1.º Esta perpendicular se llama *eje* del círculo.— Todos los puntos del eje se pueden considerar como otros tantos centros del círculo, y las oblicuas como radios, que pueden servir para describirlo.

ESCOLIO 2.º El pie de la perpendicular se determina *prácticamente* del siguiente modo: se toma un hilo tirante, se pone uno de un estremo en el punto O, y con el otro [armado de un lapiz] se señalan en el plano tres puntos A, A′, A″; despues se determina (n.º 151) el centro del círculo que pasa por ellos; y ese centro será el pie buscado de la perpendicular.

N.º 304. ESCOLIO 3.º — Las propiedades comprendidas en el enunciado del teorema precedente son análogas á las de los números 39 y 40. — La proposicion siguiente corresponde á las propiedades espuestas en el número 41.

Cuando por el punto medio de una recta se le tira un plano perpendicular,

1.° — *Cada punto del plano dista igualmente de los dos estremos de la recta;*

Y — 2.° — *Todo punto situado fuera del plano dista desigualmente de los estremos de la recta.*

En otras palabras, — *El lugar de todos los puntos equidistantes de los estremos de una recta es el plano tirado perpendicularmente por su punto medio.*

Para demostrar esta proposicion, basta concebir por la recta dada un plano que corte al plano dado en una línea perpendicular á la otra, y que pase por su punto medio: — con solo lo cual la proposicion queda comprendida en la del número 41.

De los ángulos diedros y de su medida.

N.° 305. Definiciones. — Cuando se cortan dos planos *indefinidos* (n.° 293, *fig.* 245), determinan *cuatro* espacios que hemos llamado *ángulos diedros.* — Esto supuesto, Fig. 245.

Se llaman iguales *dos ángulos diedros* cuando pueden disponerse de modo que *coincidan* los planos del primero con los del segundo.

Asi, sean los dos ángulos MABP, M'A'B'P' (*fig.* 255); y concibamos que el plano M'A'B' se transporta sobre el MAB de modo que la arista A'B' *coincida* con la arista AB; si hecho esto acontece que el plano P'A'B' se confunde con el plano PAB, coincidiendo los cuatro planos de dos en dos, los dos ángulos diedros se confunden evidentemente en uno *solo*, sucediendo lo mismo con sus opuestos y sus adyacentes. Fig. 255.

Se llama un plano *perpendicular á otro plano* cuando el primero forma con el segundo dos ángulos adyacentes *iguales*, que se llaman *ángulos diedros rectos.*

Podriamos desde ahora establecer sobre los ángulos diedros adyacentes ú opuestos, y lo mismo sobre los planos perpendiculares, proposiciones análogas á las demostradas en los preliminares del *Libro* 1.° (números 29, 30 y 31); pero resultarán mas sencillamente de lo que ponemos á continuacion.

Fig. 255.

LEMA I. (*Fig.* 255.)

N.° 306. *Si, en las aristas* AB, A′B′, *de dos ángulos diedros iguales, se toman arbitrariamente dos puntos* C, C′, *y por ellos se tiran en los cuatro planos rectas* CD *y* CE, C′D′ *y* C′E′, *respectivamente perpendiculares á las aristas, los ángulos rectilíneos resultantes* DCE, D′C′E′, *correspondientes á los ángulos diedros supuestos iguales, son tambien iguales.*

En efecto, hagamos coincidir los dos ángulos diedros de modo que el punto C′ caiga sobre el punto C y se confundan las aristas. Como, por construccion, las rectas C′D′, C′E′, son perpendiculares á A′B′, y CD, CE, perpendiculares á AB, resulta que superpuestos los planos, aquellas dos coincidirán con estas dos (n.° 299); y por consiguiente los ángulos DCE, D′C′E′, serán iguales.

Advert. Debemos aqui observar [y es observacion muy importante] que, como el ángulo D′C′E′ puede hacerse coincidir con el DCE, cualquiera que sea la posicion del punto C en el arista AB, resulta que el ángulo DCE *tiene siempre el mismo valor, cualquiera que sea el punto del arista en que se levanten las perpendiculares.*

RECÍPROCAMENTE:—*Si los ángulos rectilíneos* DCE, D′C′E′, *san iguales, tambien lo son los ángulos diedros correspondientes.*

Porque si se coloca el ángulo D′C′E′ sobre su igual DCE, como las aristas A′B′, AB, son respectivamente perpendiculares á las rectas C′D′ y C′E′, CD y CE, y por consiguiente tambien á su plano (n.° 298), y como ademas el punto C′ se ha confundido con el punto C, la recta A′B′ deberá coincidir con AB; luego los planos que pasan por A′B′ y C′D′, A′B′ y C′E′, deben confundirse con los que pasan por AB y CD, AB y CE; *luego*, &c.

Advert. Para abreviar el lenguaje, convendremos en llamar *ángulo plano correspondiente* á un ángulo diedro, al ángulo rectilíneo formado por las perpendiculares levantadas al arista de un ángulo diedro en los dos planos que le determinan.

Fig. 255.

LEMA II. (*Fig.* 255.)

N.° 307. *Dos ángulos diedros cualesquiera son entre sí* *como los ángulos planos correspondientes* — [tomando esta última espresion en el sentido que acabamos de darle].

Supondremos para mayor sencillez metido el ángulo NABP dentro del ángulo MABP, de modo que este sea mayor que el otro. — Esto supuesto, digo que tenemos

$$\text{MABP} : \text{NABP} :: \text{DCE} : \text{FCE}.$$

Pueden presentarse dos casos, segun sean conmensurables ó inconmensurables los ángulos rectilíneos DCE, FCE.

Primer caso. Sea DCE : FCE : : 12 : 7, por ejemplo. Concibamos la unidad angular colocada 12 veces en DCE, y por consiguiente 7 veces en FCE; despues, por las rectas de division y por el arista AB, hagamos pasar una serie de planos. — El ángulo diedro MABP quedará asi dividido en 12 ángulos iguales (n.° 306), de los cuales habrá 7 contenidos en el ángulo diedro NABP. Tendremos por consiguiente

$$\text{MABP} : \text{NABP} :: 12 : 7 :: \text{DCE} : \text{FCE}.$$

Respecto del caso en que los ángulos rectilíneos DCE, FCE, son inconmensurables, nos referiremos á la especie de demostracion dada en los números 115, 182,...

La *recíproca* es *verdadera* y se demostraria tambien facilmente.

Teorema VI.

N.° 308. *Todo ángulo diedro tiene por medida el ángulo plano correspondiente.*

Este teorema es una consecuencia evidente del lema que acabamos de demostrar, porque solo significa (n.° 119) que la *razon* entre el ángulo diedro propuesto y el ángulo diedro recto, es *igual á la razon* entre el ángulo plano correspondiente al primero, y el ángulo plano correspondiente al segundo (*).

Esto supone, á la verdad, que — *Todos los ángulos rectos diedros son iguales*; — pero esta proposicion resulta necesa-

(*) Mas adelante volveremos á tratar de este asunto, y probaremos que el *ángulo plano correspondiente* [tal cual le hemos definido] es el único ángulo rectilíneo que puede servir de medida al ángulo diedro. (*Véase* la nota al número 331.)

riamente de ser iguales todos los ángulos rectos formados por líneas rectas (n.º 306).

COROLARIO. Puesto que, bajo el punto de vista de los *valores numéricos*, pueden los ángulos diedros ser reemplazados por los ángulos planos correspondientes, resulta que,

1.º *Todos los ángulos diedros rectos son iguales*, segun acabamos de manifestar;

2.º *Si un plano es perpendicular á otro*, recíprocamente, *este lo es tambien á aquel*; — y los dos juntos se llaman *perpendiculares entre sí*;

3.º *Cuando un plano forma con otro dos ángulos diedros adyacentes desiguales, la suma de ellos vale dos ángulos diedros rectos*;

4.º *Los ángulos diedros que tienen las aristas opuestas son iguales*, &c.

De los planos mutuamente perpendiculares.

Fig. 256. TEOREMA VII. (*Fig.* 256.)

N.º 309. *Cuando una recta* AB *es perpendicular á un plano* MN, *cualquier otro plano* PQ, *que pase por la recta dada, es perpendicular al plano dado.*

Tiremos por el punto A, en el plano MN, una línea AC perpendicular á PR, interseccion de los planos MN y PQ. — Puesto que las dos rectas AB, AC, son perpendiculares á PR, su ángulo BAC medirá (n.º 308) el ángulo diedro QPRN; pero siendo AB perpendicular al plano MN, por el supuesto, debe serlo tambien á AC, y por consiguiente debe ser recto el ángulo ABC. — Luego los dos planos son perpendiculares entre sí.

ESCOLIO. Como por una recta cualquiera pueden pasar una infinidad de planos, resulta que

Por una recta perpendicular á un plano, pueden pasar, perpendiculares á este, una infinidad de diferentes planos.

Fig. 256. TEOREMA VIII. (*Fig.* 256.)

N.º 310. *Por una recta* PR, *situada en un plano* MN, *siempre puede pasar un plano perpendicular al primero, y no puede pasar mas que uno.*

Primeramente, en un punto cualquiera A de PR, levantese la recta AB perpendicular al plano MN; despues hágase pasar un plano por AB y PR; y este será perpendicular al MN en virtud del teorema precedente. Queda pues demostrada la parte primera de la proposicion.

En segundo lugar, sea, si es posible, otro plano PQ′ que pase por PR y sea perpendicular á MN: los dos ángulos diedros QPRN, Q′PRN, siendo *rectos*, habian de ser *iguales* (n.° 308, *corol.*); y la *parte* sería igual al *todo*, lo cual es un *absurdo*; — luego, &c.

Teorema IX. (*Fig.* 256.) Fig. 256.

N.° 311. *Cuando dos planos*, MN, PQ, *son perpendiculares entre sí, toda recta* AB, A′B′,..., *perpendicular á uno de ellos*, MN, *en un punto de su comun interseccion* PR, *está situada enteramente en el otro*, PQ.

En efecto, si AB, por ejemplo, no estuviera situada en el plano PQ, como el plano tirado por AB y PR sería perpendicular al plano MN en virtud del teorema precedente, y como ya el plano PQ, que tambien pasa por PR, es perpendicular á MN, por hipótesis, resultaria que por una recta situada en un plano podria pasar mas de un plano perpendicular al primero, lo cual es un *absurdo*.

Corolario. *El lugar de todas las líneas perpendiculares á un plano, tiradas por todos los puntos de una recta situada en él, es otro plano, que pasa por la misma recta, y es perpendicular al primero.*

Escolio. Como la recta AB, perpendicular á MN, es á la vez, y por lo mismo, perpendicular á la interseccion comun RP de dos planos, y queda completamente determinada por la doble condicion de hallarse situada en el plano PQ y ser perpendicular á PR, resulta este nuevo teorema:

Cuando dos planos son mutuamente perpendiculares, toda línea tirada en el uno, perpendicularmente á su comun interseccion, es necesariamente perpendicular al otro.

Teorema X. (*Fig.* 257.) Fig. 257.

N.° 312. *La comun interseccion* AB *de dos planos* PQ, RS, *perpendiculares á un tercero* MN, *es tambien perpendicular á este.*

En efecto, si desde el punto A en que se encuentran las rectas PP', RR', intersecciones respectivas de los primeros con el tercero, levantamos una perpendicular á este plano, deberá encontrarse á la vez en cada uno de los otros dos PQ, RS, en virtud del teorema precedente; por lo tanto deberá confundirse con su interseccion.

Fig. 258. **Corolario.** *Por una recta* AB (*fig.* 258) *oblícua ó paralela al plano* MN, *no puede pasar mas que un plano perpendicular al primero*: — esto procede inmediatamente del teorema que se acaba de demostrar.

Ademas, siempre puede pasar uno, que se obtiene bajando, desde un punto cualquiera A de la recta AB, una perpendicular AA' al plano MN; — con lo cual el plano que pase por AB y AA' será perpendicular á MN (n.° 309).

Este plano es á la vez el lugar de las perpendiculares bajadas desde los diferentes puntos de la recta AB al plano MN (n.° 311, *corol.*); de donde se infiere que sus pies A', B', C',..., estan todos situados *en una misma línea recta*. — Muchas veces tendremos ocasion de citar esta proposicion.

Escolio. *Cuando tres rectas que pasan por un mismo punto, son de dos en dos perpendiculares entre sí, cada una de ellas es perpendicular al plano de las otras dos; y los tres planos son perpendiculares entre sí.*

Recíprocamente: — *Si tres planos son perpendiculares entre sí, lo son tambien sus mútuas intersecciones.*

En otras palabras: — *Si son rectos los tres ángulos diedros de un ángulo triedro* (n.° 293), *las tres aristas son perpendiculares entre sí*; — y vice-versa para la proposicion directa.

§. II. *De las rectas y planos paralelos.*

Fig. 253.

Teorema I. (*Fig.* 253.)

N.° 313. *Dos rectas* AP, A'P', *perpendiculares á un mismo plano* MN, *son paralelas entre sí.*

Por la recta AP y por el punto P', pie de la segunda recta, hágase pasar un plano, el cual, por contener á la recta AP perpendicular al plano MN, deberá tambien (n.° 309) ser perpendicular á este plano; y por consiguiente (n.° 311, *corol.*) contendrá tambien á la recta P'A', que es perpendicular al plano MN, en un punto de su comun interseccion. Hallándose pues las dos rectas AP, A'P', en un mismo plano, y siendo perpendiculares á la misma recta PP', son paralelas entre sí (n.º 32).

Recíprocamente: — *Si una recta* AP *es perpendicular á un plano* MN, *toda recta* A'P' *paralela á la primera es perpendicular al mismo plano.*

Esta recíproca se demuestra facilmente *ad absurdum* por medio de la directa, y se halla comprendida, sin notable dificultad, en el *escolio* 1.º del número 300.

Puede tambien enunciarse asi: — *Las rectas paralelas tienen comunes sus planos perpendiculares.*

Corolario 1.º *Dos rectas* A, B, *paralelas á una tercera* C, *son paralelas entre sí.*

Porque si tiramos un plano perpendicular á la recta C por uno cualquiera de sus puntos, deberá tambien serlo á las otras dos, en virtud de la recíproca precedente; pues son paralelas á C; y siendo entonces A y B perpendiculares á un mismo plano, en virtud de la proposicion directa, serán paralelas.

Corolario 2.º *Si dos planos que se cortan contienen respectivamente á dos rectas* A, B, *paralelas entre sí, la interseccion de aquellos es paralela á estas.*

Concibamos, en efecto, un plano M perpendicular á las rectas A y B, el cual tambien lo será á los planos dados (número 309); y por consiguiente la comun interseccion C de estos tambien será perpendicular á aquel (n.º 312); siendo pues las tres rectas A, B, C, perpendiculares á un mismo plano M, son paralelas entre sí, en virtud del teorema principal.

Teorema II. (*Fig.* 259.) Fig. 259.

N.º 314. *Por un punto* C *dado fuera de un plano* MN, *se pueden tirar una infinidad de rectas paralelas á dicho plano.*

Trácese de cualquier modo, en el plano MN, una recta AB, y por ella y por el punto C hágase pasar un plano; despues en este último, y por el mismo punto C, tírese la CD paralela á AB: — la recta CD es tambien paralela al plano MN; porque si no lo fuera, no podria encontrarle mas que en un punto de AB, lo cual es *imposible*, pues le es paralela por construccion.

Advert. El conjunto de todas las rectas que pueden tirarse en esta forma por el punto C paralelamente al plano MN, constituye evidentemente un plano *paralelo* á este (n.º 292).

Corolario. *Toda recta* CD *paralela á otra* AB *situada en un plano, es paralela á este plano.*

Esta proposicion procede inmediatamente de la última demostrada.

Fig. 259.

Teorema III. (*Fig.* 259.)

N.° 315. *Cuando una recta* CD *es paralela á un plano* MN, *cualquier plano que pase por la recta y corte al dado, forma con él una interseccion* AB *paralela á la recta* CD.

Porque si AB y CD no fueran paralelas, se encontrarian por estar en un mismo plano; y por consiguiente CD encontraria al plano MN; lo cual es contra el supuesto.

Advert. Todos los planos] cuyo número es infinito] que pasando por CD encuentran al MN, cortan á este en una serie de rectas paralelas á CD, y por consiguiente paralelas entre sí (n.° 313, *corol.* 1.°).

Corolario 1.° *Cuando una recta* CD *es paralela á un plano* MN, *cualquier otra recta tirada paralelamente á la primera por un punto cualquiera* A *del plano, se halla toda entera en este.*

Supongamos, en efecto, que asi no fuera, y que tuviera, por ejemplo, la direccion AK; — como la interseccion del plano DCA con el plano MN es una recta AB paralela á CD, resultaria que por el punto A podrian tirarse dos paralelas á una misma recta, lo cual es un *absurdo* (n.° 291).

Fig. 260. Corolario 2.° *Cuando una recta* CD (*fig.* 260) *es á un tiempo paralela á un plano* PQ, *y perpendicular á otro* MN, *los dos planos son perpendiculares entre sí.*

En efecto, siempre puede pasar por CD un nuevo plano que corte á PQ en una recta AB, que será paralela á CD por lo recien demostrado, y por consiguiente perpendicular al plano MN (n.° 313, *recíp.*); luego tambien el plano PQ es perpendicular al plano MN (n.° 309).

Fig. 261.

Teorema IV. (*Fig.* 261.)

N.° 316. *Una recta* CD, *paralela á un plano* MN, *dista en todos sus puntos igualmente de este plano.*

Desde dos puntos E y F, tomados á voluntad en CD, bájense perpendiculares EK, FG, al plano MN; las cuales serán paralelas (n.° 313), y se hallarán en un mismo plano (n.° 310), que cortará al MN en una recta KG paralela á EF ó CD; luego la figura EKGF es un rectángulo, y da EK = FG; *luego*, &c.

Escolio. La recta EK, que á la vez es perpendicular á la recta CD y al plano MN, *mide* la *verdadera* distancia de la recta al plano; porque cualquiera otra recta no paralela á EK, sería oblícua al plano, y por consiguiente *mas larga* que EK (n.º 303).

De los planos paralelos.

Lema.

N.º 317. *Por un punto dado* A *fuera de un plano* MN (*fig.* 262), *siempre puede pasar un plano paralelo al primero.* Fig. 262.

Bájese desde el punto A la recta AB, perpendicular al plano MN; despues por el mismo punto A, concíbase (n.º 299, *corol.* 1.º) otro plano PQ perpendicular á AB: los dos planos MN y PQ serán paralelos; pues si asi no fuese, se encontrarian en un punto O, que unido á los puntos A y B daria un triángulo AOB, cuyos ángulos en A y en B serian rectos (n.º 299), lo cual es *absurdo*; luego los planos no pueden encontrarse.

Teorema V. (*Fig.* 263.) Fig. 263.

N.º 318. *Las intersecciones* EF, GK, *de dos planos paralelos* MN, PQ, *con un tercer plano* GF, *son paralelas.*

Porque si EF, GK, no fueran paralelas, se encontrarian por estar situadas en un mismo plano; y como pertenecen á los planos MN, PQ, tambien estos deberian encontrarse, lo cual sería contra el supuesto.

Corolario. *Cuando dos planos son paralelos, si por un punto de uno de ellos se tira una recta paralela al otro, se encuentra toda entera en el primero.*

Teorema VI. (*Fig.* 262.) Fig. 262.

N.º 319. *Cuando dos planos* MN, PQ, *son paralelos, toda recta* AB *perpendicular á uno de ellos* [á MN por ejemplo], *es tambien perpendicular al otro.*

Por la recta AB hágase pasar un plano cualquiera, cuyas intersecciones con MN y PQ serán dos rectas BD, AC, paralelas entre sí (n.º 318). — Esto supuesto, siendo AB perpendicular al plano MN, lo es tambien á BD (n.° 299); pero ademas AC es paralela á BC; luego AB es á la vez perpendicular á AC. — Como el plano que pasa por AB se ha dispuesto arbitrariamente, resulta que sucederia lo mismo con otro cualquiera, y que por consiguiente AB es perpendicular á toda recta, situada en el plano PQ que pase por el punto A; luego es perpendicular al dicho plano.

Advert. Se dice por lo tanto que: — *Dos planos paralelos*, MN, PQ, *tienen comunes sus perpendiculares.*

Corolario. *Por un punto dado fuera de un plano* MN, *no puede pasar mas que un plano que le sea paralelo;* — porque, en efecto, por el punto A no se puede tirar mas que un plano perpendicular á la recta AB (n.° 299, *corol.* 1.°).

Fig. 262.

Teorema VII. (*Fig.* 262.)

N.° 320. *Dos planos paralelos* MN, PQ, *estan por todas partes equidistantes uno de otro.*

Desde dos puntos cualesquiera A y C del plano PQ, bájense las rectas AB y CD perpendiculares á MN; las cuales serán paralelas (n.° 313), y determinarán un plano cuyas intersecciones BD, AC, con MN y PQ, serán paralelas (n.° 318). Luego la figura ABCD es un rectángulo que da AB = CD;

L. C. D. D.

Escolio 1.° La perpendicular, AB, comun á los dos planos, mide su *verdadera distancia*; porque cualquiera otra recta no paralela á AB, sería oblicua á los planos MN, PQ, y sería por consiguiente *mas larga* que AB (n.° 303).

Escolio 2.° *Las partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos, son iguales.*

Basta para probarlo observar que AB y CD, en vez de ser perpendiculares al plano MN, son dos rectas paralelas cualesquiera tiradas entre los dos planos.

Fig. 264.

Teorema VIII. (*Fig.* 264.)

N.° 321. *Las partes de dos rectas cualesquiera*, AB, CD, *comprendidas entre tres planos paralelos*, MN, PQ, RS, *son proporcionales.*

Sean A, B, E, los puntos en que la primer recta atraviesa á los tres planos; y C, D, F, los puntos en que los atraviesa la segunda recta. Júntese el punto A con el punto D, y sea

O el punto de interseccion de la recta AD con el plano RS.— Tírense, finalmente, las rectas BD, EO, AC, OF.

Esto supuesto, las rectas AB, AD, que tienen comun el punto A, estan en un mismo plano (n.° 290), cuyas intersecciones BD, EO, con los planos MN, RS, son paralelas (n.° 318). Tenemos pues la proporcion (n.° 183)

$$AE : EB :: AO : OD.$$

Por la misma razon, las rectas AC, OF, son paralelas, y dan

$$AO : OD :: CF : FD;$$

de donde, á causa de la razon comun, se deduce

$$AE : EB :: CF : FD;$$

L. C. D. D.

Advert. Podria suceder que las dos rectas AB, CD, estuvieran en un mismo plano; en cuyo caso los tres puntos se hallarian situados (n.° 318) en una recta paralela á BD y AC; y la proposicion quedaria comprendida en la del número 183, ó en el *escolio* 2.° del número 320.

Teorema IX. (*Fig.* 265.)

Fig. 265.

N.° 322. *Cuando dos ángulos* BAC, B′A′C′ [no situados en el mismo plano], *tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios*; — y ademas, — *los planos en que estan son paralelos.*

Pueden presentarse varios casos, que son los mismos que si los ángulos estuvieran en un mismo plano (n.° 52).

Suponiendo primero á los lados AB y A′B′, AC y A′C′, dirigidos respectivamente en el mismo sentido, tómese en AB, A′B′,

$$AD = A'D',$$

y en AC, A′C′,

$$AE = A'E';$$

tírense despues las rectas AA′, DD′ EE′.—Los dos cuadriláteros AA′D′D, AA′E′E, son paralelógramos (n.° 74); luego las rectas DD′, EE′ son iguales y paralelas, por ser cada una respectivamente igual y paralela á AA′ (n.° 313, *corol.* 1.°). Tiremos ahora las rectas DE, D′E′: el cuadrilátero DEE′D′ será tambien un paralelógramo; luego las rectas DE, D′E′, serán iguales y paralelas. Luego los triángulos ADE, A′D′E′, son iguales (n.° 63, *caso* 3.°); y por consiguiente tambien lo son los ángulos DAE, D′A′E′, ó BAC, B′A′C′.

En los demas casos se concluye la demostracion como en el número 52.

Falta probar que los planos de los ángulos son paralelos.— Para esto supongamos que no lo sean; y concibamos por el punto A un plano paralelo al plano B′A′C′, el cual cortaria á una de las rectas DD′, EE′, en un punto diferente del punto D ó del punto E. Sea pues el punto G, el punto de interseccion del plano nuevo con la recta DD′: — tendriamos (n.° 320, *escol.* 1.°) GD′ = AA′; pero ya teniamos DD′ = AA′, segun lo arriba dicho; luego resultaria GD′ = DD′, es decir, *la parte igual al todo*, lo cual es un *absurdo*; luego &c.

Escolio. *Si tres rectas* AA′, DD′, EE′ [en el espacio], *son iguales y paralelas, las rectas que juntan sus estremos forman triángulos iguales y paralelos* [es decir, triángulos cuyos lados son respectivamente iguales y paralelos].

Con mas generalidad, — *Si desde los vértices de un polígono se tiran* [en el espacio] *rectas iguales y paralelas* [y dirigidas en el mismo sentido], *sus estremos opuestos serán los vértices de otro polígono igual y paralelo al primero.* (*Véase* el escolio del número 163).

Fig. 266.

Teorema X. (*Fig.* 266.)

N.° 323. *Dos rectas cualesquiera*, AB, CD, *estan siempre en un mismo plano, ó en planos paralelos.*

En efecto, si no estan en un mismo plano, por un punto cualquiera I de la primera tírese la recta IK paralela á la segunda; y por un punto cualquiera G de la segunda, tírese GE paralela á la primera: los dos ángulos KIB, DGE, estarán situados en planos paralelos, en virtud del teorema precedente; luego queda demostrada la proposicion.

Escolio 1.° Este sistema de dos planos paralelos, MN, PQ, que contienen cada uno una de las dos rectas, es único.— Porque todo plano que pase por AB y sea paralelo á CD, debe contener á la recta IK (n.° 315, *corol.* 1.°); luego no puede menos de confundirse con el plano KIB; por la misma razon, todo plano que pase por CD y sea paralelo á AB, ha de contener la recta GE, y debe por consiguiente confundirse con el plano BGE.

Para designar estos dos planos, cuyo sistema es único para cada par de rectas no situadas en un mismo plano, los llamaremos *los planos paralelos* de dichas rectas.

Advert. Estos dos planos se confunden cuando las rectas estan en uno mismo.

Escolio 2.° Resulta ademas de la demostracion espuesta mas arriba que, cuando dos rectas no estan en un mismo plano, siempre se puede hacer pasar por cada una de ellas un plano paralelo á la otra; y que no se puede hacer pasar mas de *uno*.

Escolio 3.° Siempre que dos rectas tienen *comun una perpendicular* [en el *escolio* 2.° del 300 se ve un ejemplo], *esta lo es tambien á los planos paralelos de las dos rectas, y mide la mas corta distancia de ellas.*

Admitamos, por un instante, que la recta IL (*fig.* 266) sea á la vez perpendicular á las dos rectas AB, CD: — tírese por el punto I la recta IK paralela á CD; la cual deberá hallarse entera en el plano MN (n.° 315, *corol.*). Pero siendo por hipótesis IL perpendicular á CD, lo es tambien á su paralela IK; luego IL, perpendicular á las dos rectas AB, IK, que pasan por su pie en el plano MN, es perpendicular á este plano (n.° 299), y lo mismo al plano PQ, paralelo al primero. Fig. 266.

La perpendicular IK comun á los dos planos, MN, PQ, mide su mas corta distancia (n.° 320), y por consiguiente la distancia tambien mas corta de las rectas AB, CD.

Teorema XI. (*Fig.* 267.) Fig 267.

N.° 321. *Entre dos rectas* AB, CD, *no situadas en un mismo plano,* — 1.° — *siempre existe una perpendicular comun;* — 2.° — *no existe mas que una.*

Suponiendo construido el sistema de los dos planos paralelos MN, PQ, tírese por AB un plano ABEF perpendicular al plano PQ: — la interseccion EF de estos dos últimos planos, siendo paralela á AB (n.° 315), no podria serlo al mismo tiempo á CD; pues si lo fuera, CD y AB serian paralelas (n.° 313, *corol.* 1.°), lo cual sería contra el supuesto: luego la recta EF, y por consiguiente el plano ABEF, corta á CD en un cierto punto L. — Igualmente, si por CD pasamos un plano CDGK perpendicular al plano MN, cortará á AB en un cierto punto I. Los dos planos ABEF, CDEK, que pasan uno por AB y por el punto L, y otro por CD y por el punto I, se cortan necesariamente en la recta LI; la cual es á la vez perpendicular á los dos planos MN, PQ (n.º 312), y por consiguiente á las dos rectas AB, CD (n.º 298).

Luego queda demostrada la parte primera de la proposicion.

Para demostrar la segunda observaremos que toda perpendicular comun á las dos rectas, debiendo pasar por un punto de CD y ser perpendicular al plano MN (n.º 323, *escol.* 3.º), debe hallarse contenida en el plano perpendicular CDGK; por la misma razon debe estar contenida en el plano ABEF. Luego no puede menos de ser su interseccion, y como interseccion no hay mas que una, tampoco habrá mas que una perpendicular. — Luego finalmente, dos rectas siempre pueden tener una sola perpendicular comun.

Advert. Esta perpendicular se llama LA DISTANCIA MAS CORTA de las dos rectas (n.º 323, *escol.* 3.º).

Fig. 266. *Otra demostracion.* — Sean AB, CD (*fig.* 266), las dos rectas dadas. — Desde un punto cualquiera F de la recta AB, tiremos la FH paralela á CD; y por AB y FH hagamos pasar un plano MN, el cual será paralelo á la recta CD (n.º 314, *corol.*). — Ahora, desde un punto G de CD, bajemos la GK perpendicular al plano MN: la interseccion del nuevo plano CGKI con MN será una recta KI paralela á CD, que encontrará á AB en un punto I; y si desde este punto tiramos en el plano CGKI, la recta IL paralela á GK, tendremos la recta pedida.

En efecto, siendo IL paralela á KG, es perpendicular al plano MN (n.º 313, *recíp.*); luego es perpendicular á las dos rectas AB, IK (n.º 298); luego finalmente es perpendicular comun á las dos rectas dadas.

Es ademas la única recta que puede tener esa propiedad; porque debiendo toda perpendicular comun, ser perpendicular al plano MN, y pasar por un punto de CD, debe hallarse en el plano CGIK (n.º 311, *corol.*); pero la recta IL es evidentemente la única que hallándose comprendida entre AB y CD, puede á la vez ser perpendicular al plano MN; *luego*, &c.

Advert. Esta demostracion puede al pronto parecer mas complicada que la primera; pero le lleva la ventaja de no exigir mas que la construccion de uno de los planos paralelos de las dos rectas. — Insistiremos sobre este punto en el capítulo de los problemas.

PROBLEMA XII. (*Fig.* 268). Fig. 268.

N.° 325. *Dos planos respectivamente perpendiculares á dos rectas no paralelas, se encuentran siempre.*

Sean AB, CD, dos rectas que se encuentran, ó que, sin ser paralelas, no se encuentran; y sean MN, PQ, dos planos que les sean respectivamente perpendiculares.

Ante todas cosas, los dos planos no podrán confundirse en uno solo, porque entonces, siendo las rectas AB, CD, perpendiculares á un mismo plano, serian paralelas (n.° 313), lo cual es contra el supuesto. — Tampoco podrán ser paralelos los planos, porque tambien resultaria que las rectas AB, CD, serian paralelas (n.° 319). — Luego los dos planos deben cortarse en una línea MR. — (*Véase* el n.° 50).

ESCOLIO 1.° Cuando las dos rectas se cortan en un punto O, los planos MN, MP, encuentran al plano BOD en dos líneas IG, GK, respectivamente perpendiculares á la comun interseccion MR; y el ángulo IGK formado por ellas [y que mide el ángulo de los dos planos MN, MP, (n.° 308)], es suplementario del ángulo de las dos rectas dadas (n.° 70). — El ángulo KGI′, suplementario de IGK, es igual al ángulo de las rectas.

De aqui puede concluirse que — *El ángulo de dos planos respectivamente perpendiculares á dos rectas que se cortan en el espacio, es igual al ángulo de las mismas, ó á su suplemento*, segun sean ambos de una *misma especie*, ó de *especies diferentes.*

Cuando las dos rectas estan en diverso plano, se llama *ángulo de las dos rectas*, el que forma una de ellas con una paralela á la otra, tirada por un punto de la primera [ó mas generalmente, el ángulo formado por dos rectas tiradas por un punto del espacio, paralelamente á las primeras]; y la proposicion es tambien verdadera en este caso.

ESCOLIO 2.° Hablando propiamente, el ángulo de dos rectas que se *cruzan* en el espacio sin encontrarse, es el *ángulo diedro* que forman entre sí dos planos perpendiculares á los planos paralelos de las rectas, y que contienen á estas respectivamente.

Asi, en la *fig.* 267, el ángulo de las rectas AB, CD, es el Fig. 267.

ángulo diedro ELIG, que en efecto tiene por medida (n.° 308) el ángulo BIG, es decir, el ángulo que forma AB con la recta KG tirada por el punto B, paralelamente á CD.—Tal es al menos la idea mas clara que podemos formarnos del ángulo de dos rectas no situadas en un mismo plano.

Fig. 251. Cuando el ángulo diedro ELIG es *recto*, las rectas dadas se llaman perpendiculares entre sí.—La *fig.* 251 presenta un ejemplo: las rectas AP, BC, se cruzan en *ángulo recto*, lo cual significa que la segunda está situada en un plano perpendicular á la primera.

N.° 326. ESCOLIO 3.°—*Angulo de una recta con un plano.*

Fig. 269. Sea AB (*fig.* 269) una recta oblicua á un plano MN.—Desde uno cualquiera B de sus puntos, bájese la BB′ perpendicular al plano; y tírese la recta AB′: [esta recta se llama la *proyeccion* de AB sobre el plano MN].

Siendo el plano BAB′ (n.° 311, *escolio.*), el lugar de todas las perpendiculares bajadas al plano MN desde todos los puntos de AB, resulta que AB′ es el *lugar* de los *pies* de todas ellas.

Esto supuesto, se llama *ángulo de una recta con un plano*, el ángulo que forma la recta con su proyeccion en el plano.

La razon de este nombre es el ser el ángulo BAB′ el MÍNIMO de todos los que la recta AB forma con las diferentes rectas que por su pie se pueden tirar en el plano.

En efecto, tiremos por el punto A, en el plano MN, cualquiera otra recta AL, y tomemos en ella AG = AB′, tirando despues la BG: los dos triángulos ABB′, ABG, tienen dos lados respectivamente iguales [AB comun y AB′ = AG]; el tercer lado BB′ del primero es menor que el tercero BG del segundo; luego (n.° 64) el ángulo BAB′ es menor que el ángulo BAG.

Consideremos ahora en el plano MN, y á diferente lado respecto del plano BAB′, dos rectas cualesquiera AL, AL′, y un círculo descrito desde el punto A con un radio cualquiera: se demostraria como arriba que los ángulos BAL, BAL′, no pueden ser iguales si no se tiene

$$arco\ B'G' = arco\ B'G.$$

De donde se deduce esta consecuencia importante:

Una recta no puede formar ángulos iguales con tres rec-

tas situadas en un mismo plano, á no ser perpendicular á este plano, y por consiguiente, *á cada una de las tres rectas.*

Advertencia genéral sobre los dos párrafos precedentes.

N.º 327. Las proposiciones que han sido el asunto de estos dos párrafos pueden ser consideradas como fundamentales en la geometría del espacio. Reduciendo cuanto hemos podido el número de las proposiciones principales, y enlazándoles escolios ó corolarios, hemos procurado hacer mas comprensible su encadenamiento; porque no puede disimularse que las dificultades de la teoría de los planos proceden menos de las demostraciones mismas, que del modo de presentarlas.

Aqui es donde el estudiante, llevado de aparentes analogías con ciertas proposiciones de geometría plana, puede creer verdaderas muchas proposiciones falsas; cuyos errores provienen principalmente de que la indeterminacion es por necesidad mas frecuente cuando los objetos del razonamiento pueden estar situados de cualquier modo en el espacio, que no cuando estan sujetos á la condicion de no salir de un plano.

Por eso es tan reducido el número de las recíprocas en esta teoría, segun habrá podido observarse.

N.º 328. Daremos fin á estos dos párrafos, enunciando algunos teoremas cuyas demostraciones se deducirán facilmente de lo que antecede.

Teorema I. *Dos rectas paralelas tienen la misma inclinacion respecto de un plano cualquiera.*—[La recíproca es *falsa.*]

Teorema II. *Dos planos paralelos estan igualmente inclinados sobre una recta cualquiera.*—[La recíproca es *falsa.*]

Teorema III. *Cuando se encuentran una recta y un plano, todo plano perpendicular á la recta, y toda recta perpendicular al plano, se encuentran tambien.*—[Recíproca evidente.]

Teorema IV. *Dos planos paralelos cortados por un tercero, forman con este ángulos diedros alternos-internos, correspondientes*, &c.... *iguales entre sí.*—[*Véase* el n.º 45.] [La recíproca es *falsa.*]

Teorema V. *Si desde un punto tomado, ó en el interior, ó en el esterior de un ángulo diedro, se baja una perpendicular á cada una de las caras, el ángulo diedro y el formado por las dos perpendiculares son iguales ó suplementarios.* Iguales si el punto está tomado dentro del ángulo ... las caras ... este, dentro del ángulo ... el vértice ó ... suplementarios en caso contrario.

Teorema VI. *El plano bisector de un ángulo diedro es el lugar de todos los puntos equidistantes de las dos caras.*

Teorema VII. *El plano tirado por la bisectriz de un ángulo plano perpendicularmente á su plano, es el lugar de todos los puntos equidistantes de los lados del ángulo dado.*

Estas últimas proposiciones se reducen facilmente á sus análogas en *Geometría plana.*

§. III. *De los ángulos poliedros.*

N.º 329. *Observaciones preliminares.*—En todo lo subsiguiente trataremos solo de los ángulos poliedros *convexos*, cuyos caractéres enumeramos en el n.º 293.

Una propiedad que esencialmente pertenece á todo ángulo poliedro convexo, es el poderse concebir siempre por su vér-
Fig 270. tice S (*fig.* 270), un plano PQ tal, que *á un mismo lado* respecto de él quedan situadas todas las caras del ángulo poliedro:— de donde se infiere que si, por un punto cualquiera de una de las aristas, se tira un plano MN, paralelo al primero PQ, cortará necesariamente á todas las demas aristas (número 315, *corolario* 1.º), y determinará por sus intersecciones con las caras un polígono ABCDEF.—A la verdad, esta propiedad pertenece igualmente á ciertos poliedros *cóncavos*, co-
Fig. 271. mo se ve en la *figura* 271; pero lo que entonces distingue al ángulo poliedro convexo del ángulo poliedro cóncavo, es el ser *polígono convexo* (n.º 36) el polígono obtenido en el primer caso, mientras en el segundo resulta un polígono con uno ó mas ángulos entrantes; de donde se sigue, que en los poliedros cóncavos, una misma recta puede encontrar á la superficie lateral en mas de dos puntos, O, O′, O″, O‴,...

Admitiremos de ahora en adelante que—*Todo ángulo poliedro convexo puede ser cortado por un plano cuyas intersecciones con las caras determinan un polígono convexo.*

El ángulo *triedro*, con arreglo á esta propiedad, es un ángulo poliedro *convexo*; y, con arreglo á la marcha que hemos seguido en la Geometría plana (§. 3.°, cap. 1.°, lib. 1.°), empezaremos el estudio de los ángulos poliedros convexos por el de los ángulos triedros.

TEOREMA I. (*Fig.* 272.) Fig. 272.

N.° 330. *Si desde un punto cualquiera* [*s*] *tomado en el interior de un ángulo triedro* SABC, *se bajan perpendiculares á las tres caras* [*sa* á SBC, *sb* á SAC, *sc* á SAB], *resultará un nuevo ángulo triedro* [*sabc*] *cuyas caras serán los suplementos respectivos de los ángulos diedros del primero*; — y recíprocamente, — *las caras del primero serán los suplementos respectivos de los ángulos diedros del segundo.*

Observemos desde luego que el plano tirado por las dos aristas *sc*, *sb*, es perpendicular á cada una de las caras SAB, SAC (n.° 309), y por consiguiente, perpendicular á su comun interseccion SA (n.° 312); luego debe cortar á las caras estas en dos líneas A*c*, A*b*, perpendiculares al arista SA (n.° 298). Igualmente, el plano *sab* corta á SAC, SBC, en C*b*, C*a*, perpendiculares al arista SC. — Ahora, de ser SA perpendicular á A*b*, A*c*, resulta que SA es tambien perpendicular á la cara *sbc* del segundo ángulo triedro; y por la misma razon, SB, SC, son respectivamente perpendiculares á las caras *sac*, *sab*.

De donde debe concluirse que el ángulo triedro SABC se halla respecto del *sabc* en el mismo caso que este respecto de aquel.

Esto supuesto, si consideramos el cuadrilátero SA*c*B, vemos que los dos ángulos en S y en *c* son suplementarios. [*Véase* el escolio 1.° del n.° 325.] Pero el ángulo A*c*B mide al ángulo diedro formado en *sc* (n.° 308.); luego ya tenemos que la cara ASB es el suplemento del ángulo diedro formado en *sc*. — Del mismo modo se probaria que las caras ASC, BSC, son los suplementos respectivos de los ángulos diedros en *sb*, *sa*.

Luego, en virtud de la observacion de arriba, las caras *asb*, *asc*, *bsc*, son los suplementos respectivos de los ángulos diedros en SC, SB, SA.

Advert. Cada cara del primer ángulo triedro es suplemento del ángulo diedro opuesto en el segundo; y *vice-versa*.

En razon de esta propiedad recíproca, los dos ángulos triedros S y s se llaman SUPLEMENTARIOS uno respecto de otro.

ESCOLIO. La demostracion precedente supone que los pies c, b, a, de las perpendiculares bajadas desde el punto s á las caras del ángulo triedro S, son *interiores* á estas caras, lo cual no siempre sucede cuando se toma el punto s completamente á voluntad en el ángulo S. — Pero tambien puede escogerse uno que cumpla esa condicion: para lo cual basta, por ejemplo, tomar un punto cualquiera de la interseccion de los planos bisectores de dos ángulos diedros en SA, SB (n.º 328, *Teorema* VI). [*Véase* el n.º 70.]

Este teorema debe considerarse como fundamental en la teoría de los ángulos triedros.

Fig. 273.

TEOREMA II. (*Fig.* 273.)

ángulo plano

N.º 331. *En todo ángulo triedro S, una cara cualquiera es* — 1.º — *menor que la suma de las otras dos,* — y 2.º — *mayor que su diferencia.*

1.º No hay que demostrar la primera parte mas que respecto de la mayor de las tres caras.

Tiremos una recta AB que corte á SA, SB, en dos puntos A, B; despues, por el punto S, y en el plano ASB, tiremos la recta SC′ que forme un ángulo BSC′ igual al ángulo BSC, y que corte á AB en un punto C′. Tomemos en el arista SC una distancia SC igual á SC′; y tiremos en fin las líneas CA, CB.

De esta construccion resultan iguales los triángulos BSC, BSC′ (n.º 63, *caso* 2.º); luego BC = BC′. Pero en el triángulo ABC tenemos

$$AB < AC + CB, \quad \text{ó} \quad AC' + C'B < AC + CB;$$

luego, á causa de ser $\quad C'B = CB,$

tendremos $\quad AC' < AC,$

y por consiguiente (n.º 64) $\quad ASC' < ASC.$

Añadiendo respectivamente á los dos miembros de esta desigualdad los ángulos iguales BSC′, BSC, tendremos

$$ASC' + BSC' < ASC + BSC, \quad \text{ó} \quad ASB < ASC + BSC.$$

2.° Suponiendo $ASC > BSC$,

como tenemos $ASB + BSC > ASC$,

resultará $ASB > ASC - BSC$;

L. C. D. D.

Corolario 1.° *Si tres ángulos*, ASB, ASC, BSC, *que tienen comun un vértice en* S, *son tales que uno de ellos equivalga á la suma de los otros dos, deben confundirse los planos de los tres*; — porque de lo contrario formarian un ángulo triedro, y el mayor de los tres valdria menos que la suma de los otros, segun se acaba de demostrar; lo cual sería contra el supuesto (*).

Corolario 2.° *Si por el vértice* S (*fig.* 274) *de un ángulo triedro cualquiera* SABC, *se tira una recta* SD *en lo interior, y por ella dos planos que terminen en las aristas* SA, SB, *de una misma cara* ASB, *la suma de los dos ángulos planos resultantes* ASD, BSD, *será menor que la suma de las otras dos caras*, ASC, BSC, *del ángulo triedro.* Fig. 274.

(*) Aqui es donde conviene demostrar que el único ángulo que puede medir al ángulo diedro, es el *ángulo plano correspondiente*, cual se definió en el n.° 306.

En efecto, es necesario que los lados del ángulo plano apto para servir de medida esten igualmente inclinados sobre la arista, pues debe hecerse *nulo* al mismo tiempo que el ángulo diedro.

Sean pues BM', BN' BP (*fig.* 255), tres rectas trazadas por un mismo punto B del arista AB, en las caras MAB, NAB, PAB. — Para tener constantemente Fig. 255.

$$MABP : NABP :: M'BP : N'BP,$$

es necesario que los ángulos ABM', ABN', ABP, sean iguales.

Ademas, puesto que entre los tres ángulos driedros tenemos la

relacion $MABP = MABN + NABP$,

es tambien necesario que los ángulos rectilíneos M'BP, M'BN', N'BP, esten unidos entre sí por la relacion

$$M'BP = M'BN' + N'BP;$$

lo cual exige, segun el corolario recien demostrado, que esten en un plano las rectas BM', BN', BP.

Debiendo pues estas tres rectas estar en un mismo plano, é igualmente inclinadas sobre el arista AB, deberá serles esta perpendicular (n.° 326); *L. C. D. D.*

[Para que se vea mejor la figura, hemos cortado el ángulo triedro por medio de un plano que determina en las caras que se van á considerar, las rectas AC, CB, AB, y las rectas AD, DB;—pero la construccion de este plano no es indispensable para la demostracion].

Prolónguese el plano ASD, por ejemplo, hasta encontrar á la cara CSB, en una recta SE; en virtud del teorema precedente, tendremos

1.° En el ángulo triedro SACE, $ASE < ASC + CSE$;

2.° En el ángulo triedro SDBE, $DSB < DSE + ESB$;

de donde, sumando miembro á miembro estas desigualdades,

$$ASE + DSB < ASC + CSE + DSE + ESB,$$

es decir, $ASD + DSB + DSE < ASC + DSE + CSB$;

ó bien finalmente, restando DSE de ambos miembros,

$$ASD + DSB < ASC + CSB;$$

L. C. D. D.

Escolio. Este corolario y su teorema principal corresponden á la tercera y á la primera proposicion del n.° 38; y las demostraciones son análogas.—La segunda proposicion del mismo número tiene tambien su correspondiente en los ángulos triedros; pero nos limitaremos á enunciarla sobre la *figu-*
Fig. 275. *ra.*—La *fig.* 275 representa dos ángulos triedros SABC, SADE, opuestos en el arista SA; deberia tratarse de probar que

1.° $BSC + DSE < DSC + ESB$,

2.° $ESC + DSB < DSC + ESB$;

lo cual es muy facil considerando, con arreglo al teorema precedente, los ángulos triedros

SABC, SADE, y luego los SABD, SACE.

TEOREMA III. (*Fig.* 276.) Fig. 276.

N.° 332. *En todo ángulo triedro* S, *la suma de las tres caras vale menos de* 4 *ángulos* RECTOS.

Cortemos el ángulo triedro por medio de un plano ABC (n.° 329); y despues de tomar un punto cualquiera O interior al triángulo ABC, tiremos las tres rectas OA, OB, OC; con lo cual formaremos tres triángulos que tendrán respectivamente las bases AB, AC, CB, y por vértice comun el punto S; y otros tres que tendrán las mismas bases, y por vértice comun el punto O. — Esto supuesto, el ángulo CAB, igual á la suma de los ángulos OAC, OAB, es menor que la suma de los ángulos SAC, SAB (n.° 331); é igualmente

$$ACB < ACS + SCB, \quad y \quad ABC < ABS + SBC;$$

donde se ve que la suma de los ángulos de la base de los triángulos que tienen su vértice en O, es menor que la suma de los ángulos de la base de los triángulos que tienen su vértice en S. Ahora bien, la suma de los ángulos de los tres triángulos es la misma en ambos sistemas (n.° 55); luego la suma de los ángulos en S es mayor que la suma de los ángulos en O; y como esta vale *cuatro rectos* (n.° 31), resulta que la otra vale menos de *cuatro rectos*;

L. C. D. D.

COROLARIO. *En todo ángulo triedro, la suma de los ángulos diedros vale mas de* DOS RECTOS, *y menos de* SEIS.

En efecto, la suma de los ángulos diedros del ángulo triedro propuesto, añadida á la suma de las caras de su ángulo triedro suplementario, forma *seis rectos* (n.° 330). Pero esta suma parcial está comprendida entre *cero* y *cuatro rectos*; luego la otra debe ser *menor* que *seis* y *mayor* que *dos*.

ESCOLIO 1.° Es facil concebir que las caras de un ángulo triedro pueden ser *tres ángulos agudos á la vez* [tan pequeños ó tan grandes como se quiera], ó bien, *dos ángulos agudos* y *uno obtuso*, ó *uno agudo* y *dos obtusos*, ó *tres ángulos obtusos*; ó en fin, *tres ángulos rectos*.

Luego la suma de sus ángulos diedros puede pasar por todas las magnitudes desde *dos rectos* hasta *seis rectos*.

Asi pues, un ángulo triedro puede tener *uno*, *dos*, ó *tres* ángulos diedros *rectos*; *uno*, *dos*, ó *tres* ángulos diedros *obtusos*.

Esto supuesto, un ángulo triedro se llama *unirectángulo* [ó simplemente *rectángulo*], *birectángulo*, *trirectángulo*, segun tiene *uno*, *dos* ó *tres* ángulos diedros rectos.

Cuando los tres ángulos diedros son *rectos*, las tres aristas son entre sí perpendiculares de dos en dos (n.º 308), y las tres caras son ángulos planos *rectos*.

Si el ángulo triedro es *birectángulo*, solo una de las aristas es perpendicular á las demas; y estas forman entre sí un ángulo que mide el tercer ángulo diedro (n.º 308).

N.º 333. Escolio 2.º — Podrian establecerse respecto del ángulo triedro muchas proposiciones análogas á varios teoremas demostrados respecto del triángulo en el capítulo 1.º del lib. 1.º, esceptuando sin embargo las fundadas en la propiedad del n.º 54, porque en el ángulo triedro no es constante la suma de los ángulos diedros, que puede variar desde *dos rectos* hasta *seis*.

Pero las propiedades del triángulo isósceles tienen sus correspondientes en el ángulo triedro.

Asi, 1.º — *Cuando son iguales dos caras de un ángulo triedro, son tambien iguales los ángulos diedros opuestos*; — de donde resulta inmediatamente que, — *si las tres caras son iguales, son tambien iguales los tres ángulos diedros*;

2.º — *Cuando dos caras son desiguales, á la mayor se opone el mayor ángulo diedro*;

3.º — *Recíprocamente*, &c., &c. — (*Véase* el n.º 58 y sig.)

Se llama *regular* un ángulo triedro [ó, en general, un ángulo poliedro] cuando son iguales todas sus caras entre sí, y lo mismo todos sus ángulos diedros.

Los ángulos triedros que tienen *dos* caras iguales, por analogía con el triángulo isósceles, pueden llamarse *isoedros*; — la tercer cara, diversa de las otras dos, se llama en este caso *base* del ángulo triedro.

Nos reduciremos aqui á demostrar la primera de las proposiciones que acabamos de enunciar.

Fig. 277. Sea SABC (*fig.* 277) un ángulo triedro en el cual suponemos ASC = BSC.

Tiremos la bisectriz SD de la base ASB: siendo el plano tirado por SD, perpendicularmente á la cara ASB, el lugar de todos los puntos equidistantes de los lados SA, SB (n.º 328, *teor.* 7.º), contiene necesariamente á la recta SC, y tambien á la perpendicular DC levantada en un punto cualquiera D de SD, al plano ASB (n.° 311). Ahora bien, si desde el mismo punto D, tiramos las DA, DB, perpendiculares á SA, SB, y juntamos los puntos A y B con el punto C en que DC encuentra á SC, las rectas CA, CB, serán (n.° 300) respectivamente perpendiculares á las rectas SA, SB; y los ángulos CAD, CBD, medirán á los ángulos diedros en SA, SB.

Esto supuesto, los dos triángulos CDA, CDB, son iguales, por tener AD=DB, y DC comun; luego los ángulos CAD, CBD son iguales; luego tambien lo son los ángulos diedros medidos por ellos.

Advert. Habriamos podido simplificar la demostracion bajando directamente desde un punto C del arista SC una perpendicular al plano SAB; pero hemos preferido este método, que está mas en relacion con el del n.° 43.

De la igualdad de los ángulos triedros.

N.° 334. *Advertencias preliminares.*—Cuando dos ángulos triedros son superponibles, se dice que son *iguales*; y entonces tienen todos sus elementos [*caras* y *ángulos*] iguales respectivamente. Ahora bien, dos ángulos triedros pueden tener sus tres caras respectivamente iguales, pero inversamente dispuestas; y entonces se llaman *ángulos triedros simétricos.*

A fin de hacer comprender mejor esta definicion, consideremos primero en particular un ángulo triedro SABC (*figura* 278); y prolonguemos cada una de las aristas SA, SB, SC Fig. 278.
en sentido opuesto respecto del punto S: asi resulta un nuevo ángulo triedro S*abc*, cuyas caras y ángulos son evidentemente los mismos que las caras y los ángulos de SABC.—Se ve sin embargo que no podrian coincidir esos dos ángulos triedros, aunque al S*abc* se podrán dar diversas posiciones respecto del SABC.

Imaginemos, por ejemplo, que se hace girar la cara S*ab* en su plano, en torno del punto S, de modo que S*a* venga á coincidir con SA, y S*b* con SB. — En este movimiento como el arista S*c* está, respecto de la vista, detras del plano S*ab*, mientras que el arista SC está delante, la primera tomará una posicion SC′, tal que el ángulo diedro C′SAB será igual al ángulo *c*S*ab*, ó CSAB, el ángulo diedro C′SBA igual al *c*S*ba* ó CSBA, y las caras ASC′, BSC′ respectivamente iguales á las caras *a*S*c*, *b*S*c*, ó ASC, BSC. Se obtendrán pues dos ángulos triedros SABC, SABC′, opuestos en la cara ASB, y compuestos de elementos respectivamente iguales [caras y ángulos].

Ahora podemos imaginar que la cara S*ab* dé una media vuelta al rededor de la bisectriz LL′ de los ángulos AS*b*, *a*SB.— En este movimiento, el arista S*b* vendrá á coincidir con el arista SA, el arista S*a* con la SB; y como las dos caras *b*S*c*, *a*S*c*, se hallarán entonces delante de la cara ASB, resulta que el ángulo triedro S*abc* tomará una posicion tal como SABC″.

Nada impide hacer que este se mueva paralelamente á sí mismo (n.° 62), de modo que tome la nueva posicion TDEF, en la cual las caras DTE, ETF, FTD, serán respectivamente iguales á las caras CSB, BSA, CSA, pero dispuestas en orden *inverso* respecto de ellas.

Los cuatro ángulos triedros S*abc*, SABC′, SABC″, TDEF, no forman hablando propiamente mas que uno solo, pues los tres últimos no son otra cosa que el primero S*abc*, mudado de posicion; — y como *tres ángulos planos* no pueden reunirse mas que de dos modos para formar un ángulo triedro, resulta justificada la definicion.

Pero se ve al mismo tiempo que no sucede con dos ángulos triedros *simétricos* como con dos triángulos simétricos, los cuales, *revolviéndolos*, pueden siempre superponerse (n.° 6, *Apénd.*, *escol.* 1.°).

Advert. Dos ángulos triedros simétricos *isoedros* (n.° 333) son *iguales* y *superponibles*; porque haciendo coincidir las dos *bases* de modo que los dos ángulos triedros queden á un mismo lado respecto de la cara comun, las otras caras coincidirán. á causa de la igualdad de los ángulos diedros adyacentes.

En este caso los ángulos triedros son á la vez *simétricos* y *superponibles.*

Ahora podemos, como en las figuras planas (n.° 62), demostrar una especie de *Lema* propio para facilitar el estudio de las propiedades relativas á la igualdad [ó á la semejanza] de las figuras en el espacio.

LEMA.

N.° 335. *Cuando dos poliedros tienen las caras iguales respectivamente, y reunidas de la misma manera, y tienen tambien iguales los ángulos diedros, pueden siempre colocarse en una posicion tal, que apoyándolos por una de sus caras iguales contra el mismo lado de un plano, queden las otras respectivamente paralelas.*

En efecto, desde luego podemos hacer que los polígonos apoyados sobre el plano (n.º 62) tengan sus lados paralelos de dos en dos y dirigidos en el mismo sentido; con cuyo movimiento quedarán los dos poliedros situados á un lado mismo del plano. Ahora bien, á causa de la igualdad de los ángulos diedros respectivos, adyacentes á los lados de aquellas figuras, quedarán paralelas y dirigidas de dos en dos en el mismo sentido las caras de dichos ángulos: lo mismo sucederá con sus adyacentes: — y asi iremos de unas en otras hasta el fin.

Dejamos aqui para el *segundo Apéndice* la teoría de las figuras simétricas, como hicimos en la parte primera; y solo consideraremos ahora los poliedros susceptibles de ser colocados segun acaba de sentar el Lema. — Se espresa esta posicion relativa diciendo que las caras estan *semejantemente dispuestas* [ó mejor, *dispuestas del mismo modo*]. Es claro que para el estudio de las propiedades, no es necesario colocar efectivamente á los poliedros en la susodicha posicion, bastando que exista la *posibilidad de hacerlo*, si llegara el caso.

Teorema V. (*Fig.* 279.)

Fig. ~~281.~~ 279

N.º 336. *Dos ángulos triedros*, SABC, S'A'B'C', *son iguales*,

1.º — *Cuando tienen una cara igual* [SAB=S'A'B'] *adyacente á dos ángulos diedros iguales* y [dispuestos del mismo modo];

2.º — *Cuando tienen un ángulo diedro igual* [BSAC=B'S'A'C'] *formado por caras respectivamente iguales* [y dispuestas de la misma manera];

3.º — *Cuando tienen sus tres caras respectivamente iguales* [é igualmente dispuestas].

Primer caso. Apliquemos la cara S'A'B' sobre su igual SAB, de modo que se confundan las aristas correspondientes SA, S'A' y SB, S'B'. Como los ángulos diedros en SA y S'A' son iguales por el supuesto, la cara S'A'C' coincidirá con SAC; y por la misma razon coincidirá S'B'C' con SBC; luego el arista S'C', comun á las dos caras S'A'C', S'B'C', se confundirá con el arista SC comun á las caras SAC, SBC; quedando por lo tanto confundidos los ángulos triedros.

Segundo caso. Apliquemos como antes la cara S'A'B' sobre su igual SAB; — siendo iguales los ángulos diedros en SA, S'A', la cara S'A'C' se confundirá con SCA; y como tambien tenemos $S'A'C' = SCA$ por el supuesto, el arista $S'C'$ se confundirá con SC, coincidiendo por consiguiente las caras SBC, $S'B'C'$; y confundiéndose los ángulos triedros.

Tercer caso. [*Véase* antes el n.º 63.] — Quedaria demostrada la igualdad de los ángulos triedros si se pudiera probar que el ángulo diedro en $S'A'$, por ejemplo, es igual al ángulo diedro en SA, porque entonces se reducia este caso al segundo. Para esto pues, supongamos por el pronto que sea

$$BS\overset{AC}{\cancel{CA}} > B'S'\overset{A'C'}{\cancel{C'A'}},$$

y coloquemos como antes la cara $S'A'B'$ sobre su igual SAB: en virtud del supuesto que hemos hecho, la cara $S'A'C'$ caerá por dentro del ángulo diedro BSCA; y por consiguiente, el arista $S'C'$ deberá tomar una direccion interior al ángulo triedro, ó caer en SI sobre el plano SBC, ó tomar la direccion SD' esterior á la cara SBC. — Examinaremos solo el último caso. — Tendremos en él

$$B'S'C' = BSC = BSD'.$$

Como el plano ASD' corta á la cara SBC en una recta SI, que determina dos ángulos triedros SIAC, $SIBD'$ opuestos por una arista SI, resulta (n.º 531, *escol.*)

$$ASC + BSD' < BSC + ASD',$$

de donde, restando de una parte, ASC, y de otra su igual ASD',

$$BSD' < BSC,$$

resultado contradictorio con la igualdad $SBC = BSD'$ arriba puesta.

Las otras dos hipótesis se resuelven mas facilmente.

Es pues absurdo suponer al ángulo diedro $B'S'A'C'$ diferente de BSAC; *luego*, &c., &c. (*).

Corolario. *Dos ángulos triedros son tambien iguales*

(*) El uso de una demostracion análoga á la del número 63 nos habria conducido á la consideracion de dos ángulos triedros simétricos; inconveniente que hemos querido evitar.

cuando tienen respectivamente iguales los tres ángulos diedros [dispuestos del mismo modo].

En efecto, si consideramos los ángulos triedros respectivamente suplementarios (n.° 330) de los dados, veremos que sus caras son respectivamente iguales, como suplementos respectivos de ángulos diedros iguales respectivamente por el supuesto; los suplementarios son iguales en virtud del tercer caso de la proposicion precedente; luego sus ángulos diedros son respectivamente iguales, y tambien lo serán sus suplementos, los cuales no son otra cosa que las caras de los ángulos triedros propuestos. Luego, &c., &c.

Se observará facilmente que esa misma propiedad de los ángulos triedros suplementarios enlaza entre sí á los dos primeros casos de la proposicion anterior.

ESCOLIO 1.° Podriamos demostrar otros dos casos de igualdad, tambien unidos entre sí por la propiedad de los ángulos triedros suplementarios. — Pero los dejamos para el tercer capítulo.

Asi pues, un ángulo triedro queda determinado conociendo tres de los seis elementos que le constituyen [*tres* caras y *tres* ángulos diedros formados por ellas]; lo cual da seis combinaciones diferentes, unidas de dos en dos por el ángulo triedro suplementario.

Réstanos añadir que satisfecha la condicion de igualdad de dos ángulos triedros, resultan las *caras iguales* opuestas á *ángulos diedros iguales*; y recíprocamente. Consecuencia necesaria de la posibilidad de una superposicion completa de los dos ángulos triedros.

ESCOLIO 2.° Finalmente, la demostracion del caso tercero, y la del que podemos llamar cuarto caso [el de ser iguales los ángulos diedros], dan lugar á dos teoremas análogos á los del número 64; á saber:

1.° *Cuando dos caras de un ángulo triedro son respectivamente iguales á dos de otro, si el ángulo diedro comprendido por las primeras es mayor que el ángulo diedro comprendido por las segundas, la cara tercera del primer ángulo triedro será mayor que su correspondiente en el segundo*; — y recíprocamente.

2.° *Cuando dos ángulos diedros de un ángulo triedro son iguales respectivamente á dos ángulos diedros de otro ángulo triedro, si la cara, adyacente á los dos primeros, es mayor que la cara adyacente á los dos segundos, el tercer* *ángulo diedro del primer ángulo triedro es mayor que su correspondiente en el segundo*; — y recíprocamente.

Fig. 280. TEOREMA VI. (*Fig.* 280.)

N.° 337. *En todo ángulo poliedro convexo* SABCDEF, *la suma de las caras vale menos de* 4 RECTOS.

Cortemos (n.° 319) el ángulo poliedro por un plano cualquiera [no paralelo á las aristas]; y obtendremos un polígono ABCDEF, dentro del cual podremos tomar un punto cualquiera O que juntaremos por medio de rectas con los diferentes vértices A, B, C, D,..., del polígono.

Esto supuesto, considerando primero las tres caras que tienen por vértice comun el punto A, luego las que tienen por vértice comun el punto B, y asi sucesivamente, iremos probando como en el número 332, que la suma de los ángulos de la base de todos los triángulos que tienen su vértice en S, es mayor que la suma de los ángulos de la base de los triángulos que tienen su vértice en O; luego para que haya compensacion, la suma de los ángulos en S, pertenecientes á los primeros triángulos, debe valer menos que la suma de los ángulos en O de los segundos; pero esta vale 4 *rectos*; luego la otra vale menos de 4 *rectos.*

En el *Apéndice* completaremos la teoría de los ángulos triedros y poliedros.

§. IV. *De los poliedros convexos.*

[*Véase* su definicion general en los números 294 y 295, donde ademas hemos espuesto sus principales caractéres].

Los dos poliedros que mas nos ocuparán en adelante, son el *prisma* y la *pirámide.*

Del prisma y de sus varias especies.

N.° 338. *El* PRISMA *es un poliedro que tiene por caras dos polígonos planos, iguales y paralelos, y ademas tantos paralelógramos como lados tiene cada polígono.*

De esta definicion se infiere evidentemente que todos los ángulos poliedros del prisma son ángulos *triedros.*

Para formar un prisma, consideremos un polígono plano
Fig. 281. ABCDE (*fig.* 281); y por sus vértices tiremos fuera de su plano, y hácia el mismo lado respecto de este, las rectas AA′, BB′, CC′,..., iguales y paralelos, formando despues el polígo-

no A'B'C'D'E'.—Los cuadriláteros AB', BC', CD',..., serán paralelógramos (n.º 74); y el polígono A'B'C'D'E' será igual al ABCDE (n.º 322, *escol.*)

[La *figura* del número 163, 3.ª *construccion*, es enteramente análoga á la *figura* 281, que consideramos ahora: la única diferencia consiste en hallarse las líneas AA', BB', CC',..., de la *figura* 106 trazadas en un mismo plano, mientras las de la actual estan arbitrariamente dirigidas en el espacio, aunque paralelas entre sí.]

Los paralelógramos AB', BC',..., se llaman *caras laterales* del *prisma*, y *bases* del mismo los dos polígonos paralelos: *altura* es la perpendicular comun á las dos bases.

Sin dificultad se conoce que

Toda seccion MNPQR, *dada á un prisma por un plano paralelo á las dos bases, es un polígono igual á estas.*

De donde resulta que el prisma puede tambien considerarse como engendrado por el movimiento de una de sus bases paralelamente á sí misma, á lo largo de una arista lateral AA'; y es de notar que, durante este movimiento, pasa el prisma por *todas las magnitudes* desde *cero* hasta el *infinito*.

Para hacerle tomar un valor determinado, basta tirar un plano paralelo á ABCDE, tan cerca ó tan lejos de esta base como sea necesario.

Advert. Todo plano no paralelo á las bases, divide al prisma en dos poliedros que se llaman *prismas truncados*, ó *troncos de prisma*.

N.º 339. Llámase *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*,..., un prisma, segun es su base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono,..., es decir, segun tiene 3, 4, 5,..., *caras laterales*.

Se llama *prisma recto* aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares á las bases; — y entonces la altura es igual á cualquiera de ellas.

Se llama *regular* un prisma cuando es *recto* y sus bases son *polígonos regulares*. — Entonces son *rectángulos* todas sus caras laterales.

Finalmente, todo prisma *puede descomponerse* en prismas *triángulares*, para lo cual basta tirar *planos diagonales* por las aristas AA' y CC', AA' y DD', &c., que no pertenecen á la misma cara (n.º 294).

N.º 340. *Del paralelepípedo* (*fig.* 282). — Cuando las bases del prisma son tambien paralelógramos, toma la figura el Fig. 282.

nombre de **PARALELEPÍPEDO.** — Entonces el prisma está formado por *seis caras paralelográmicas* opuestas de *dos en dos.*

En todo paralelepípedo las *caras opuestas son iguales*; porque considerando las caras ABFE, DCGK, por ejemplo, tenemos

$$AB = DC, \quad BF = CG \text{ (n.}^{\circ}\text{ 74),}$$

y *ángulo* ABF = *ángulo* DCG (n.° 322); luego son iguales estos paralelógramos (n.° 78).

Es ademas visible que toda seccion, dada en un paralelepípedo, paralelamente á una cara, es un *paralelógramo* (n.° 318).

El paralelepípedo se llama *recto* cuando las aristas laterales son perpendiculares á las bases; y *rectángulo* cuando ademas de esa condicion tiene la de ser rectángulos sus bases, en cuyo caso son rectángulos todas sus caras.

El paralelepípedo rectángulo se llama **CUBO** cuando sus bases son dos *cuadrados*, á cuyo lado *es igual el arista lateral ó lado.* — De modo, que *cubo* es un prisma formado por *seis cuadrados iguales*; y es respecto de los poliedros en general, lo que el cuadrado respecto de los polígonos (n.° 80).

N.° 341. *De las diagonales* del paralelepípedo. — Se llaman *aristas opuestas* las *dos* que siendo paralelas, como AE,
Fig. 285. CG (*fig.* 285), no estan situadas en una misma cara; de cuya definicion resulta que respecto de cada arista solo hay una que le sea opuesta. Hay en un paralelepípedo *doce aristas*; luego el número *de pares de aristas opuestas* es *seis.*

Cada par determina un paralelógramo AEGC (n.° 74) cuyo plano es un *plano diagonal* (n.° 294); hay pues *seis* planos diagonales. — Cada paralelógramo de estos tiene *dos diagonales*, y esas son las que se llaman *diagonales* del paralelepípedo. De donde parece resultar que el paralelepípedo tiene *doce* diagonales. — Pero observemos que cada diagonal, como AG, es comun á *tres* planos diagonales ABGK, ADFG, AECG; luego en todo paralelepípedo no hay realmente mas que *cuatro diagonales diferentes*; á saber: AG, BK, CE, DF; — sus estremos se llaman *vértices opuestos* del paralelepípedo.

Hay ademas otras *doce* diagonales situadas en la superficie del poliedro: tales son AC, AK, AF, BE,...

Fig 285.

TEOREMA I. (*Fig.* 285.)

N.° 342. *Las cuatro diagonales de un paralelepípedo* *concurren en un mismo punto*; — el cual es á la vez *el punto medio de la recta que junta los centros de dos caras opuestas, ó los medios de dos aristas opuestas.*

En efecto, consideremos primero las dos diagonales AG, CE, por ejemplo: como pertenecen al mismo paralelógramo ACGE, se cortan (n.º 76) mutuamente en dos partes iguales. Pero la misma diagonal AG, con otra diagonal DF, pertenecen á otro paralelógramo ADGF; luego el punto O, medio de AG, CE, lo es tambien de DF. — Del mismo modo se demostraria que tambien O es el punto medio de BK; quedando con esto demostrada la primera parte de la proposicion.

Ahora la recta IL, que junta los puntos medios I, L, de dos lados opuestos del paralelógramo ACGE, pasa por su centro O (n.º 75); lo cual demuestra la segunda parte de la proposicion.

Escolio 1.º El punto O, medio de las cuatro diagonales del paralelepípedo, y de las varias rectas que juntan los centros de las caras opuestas, se llama *centro* del paralelepípedo.

Escolio 2.º *En todo paralelepípedo rectángulo* AG (*fig.* 283), *el cuadrado de cada diagonal*, DF, *es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas*, BF, BA, BC, *que forman un mismo ángulo triedro* B. Fig. 283.

Tírese la diagonal BD de la cara ABCD. — El triángulo FDB da

$$FD^2 = FB^2 + BD^2;$$

pero por hipótesis, el triángulo BDA es tambien rectángulo en A; luego tenemos $DB^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2$;

luego, sustituyendo en lugar de BD^2 su valor en la igualdad anterior, tendremos

$$FD^2 = FB^2 + BA^2 + BC^2.$$

Lo mismo se demostraria de las demas diagonales.

De donde resulta necesariamente que — *Las cuatro diagonales de un paralelepípedo rectángulo son iguales* (n.º 79).

De la pirámide.

N.º 343. Se llama **pirámide** un *poliedro entre cuyas caras hay una que es un polígono cualquiera, cuyos lados* *sirven respectivamente de base á las demas caras, que son triángulos y tienen todas comun un vértice.*

Fig. 270. Un ángulo poliedro (*fig.* 270) cuyas caras se cortan por un plano MN, da una pirámide SABCDEF.

Fig. 286. La cara ABCDE de una pirámide SABCDE (*fig.* 286), se llama su *base*; el vértice S, comun á todos los triángulos SAB, SBC, SCD,..., toma mas particularmente el nombre de *vértice* ó *cúspide* de la pirámide; su *altura* es la perpendicular SO bajada desde el vértice á la base. — Las caras SAB, SBC,..., se llaman *caras laterales*, y las aristas SA, SB, SC,..., se llaman *aristas laterales*.

Se llama *pirámide regular* la que tiene por base un polígono regular, hallándose su vértice y el centro de este en una misma perpendicular á la base. — En este caso todas las caras laterales son triángulos *iguales* é *isósceles* (n.º 303).

Las perpendiculares bajadas desde el vértice S á los lados de la base se llaman *apotemas* de la pirámide regular, y son todas iguales, porque lo son tambien las apotemas del polígono regular que sirve de base.

Una pirámide, regular ó irregular, se llama *triángular*, *cuadrangular*, *pentagonal*,..., segun es su base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono,...; pero la pirámide triangular se designa por lo comun con el nombre de TETRAEDRO, que es el que usaremos en adelante.

Fig. 286.

TEOREMA II. (*Fig.* 286.)

N.º 344. *Todo plano tirado en una pirámide paralelamente á la base determina una seccion semejante á esta, y divide á las aristas laterales, y á la altura* SO, *en partes proporcionales.*

Siendo paralelos los planos ABCDE, *abcde*, resultan tambien paralelas las rectas AB y *ab*, BC y *bc*, CD y *cd*,..., (n.º 318); luego los ángulos ABC y *abc*, BCD y *bcd*,..., son respectivamente iguales (n.º 322). — Ademas, los pares de triángulos semejantes SAB y S*ab*, SBC y S*bc*,..., dan (n.º 195) las series de razones iguales

$$SA : Sa :: AB : ab :: SB : Sb,$$
$$SB : Sb :: BC : bc :: SC : Sc,$$
$$SC : Sc :: CD : cd :: SD : Sd;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de donde se saca, á causa de las razones comunes,

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: \ldots.$$

Asi pues, los dos polígonos ABCDE, *abcde*, son semejantes (n.° 198).

Considerando ahora solo las razones entre las aristas laterales, tenemos, de las mismas series arriba puestas,

$$SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc :: \ldots;$$

donde se ve que las aristas estan cortadas en partes proporcionales.

En fin, si, por la arista SB y la altura SO, tiramos un plano, su interseccion *bo* con el plano *abcde* será paralela á BO (n.° 318); y los dos triángulos semejantes SBO, *Sbo*, darán

$$SO : So :: SB : Sb :: SA : Sa :: \ldots;$$

lo cual completa la demostracion del teorema enunciado.

Corolario. *Cuando dos pirámides* SABCDE, TMNP, *tienen bases equivalentes* [pudiéndose suponer estas situadas en un mismo plano] *y alturas iguales*, SO=TQ, *las dos secciones* abcde, mnp, *hechas por un mismo plano paralelo á las bases, son tambien equivalentes.*

Puesto que son semejantes los polígonos ABCDE, *abcde*, tenemos la proporcion

$$ABCDE : abcde :: AB^2 : ab^2;$$

luego, en virtud de la proposicion anterior,

$$ABCDE : abcde :: SO^2 : So^2.$$

Los dos polígonos MNP, *mnp*, dan tambien

$$MNP : mnp :: TQ^2 : Tq^2;$$

pero por construccion tenemos,

$$SO = TQ, \quad So = Tq;$$

de consiguiente $ABCDE : abcde :: MNP : mnp.$

Ahora bien, por hipótesis, ABCDE=MNP; luego tambien, $abcde = mnp$; *L. C. D. D.*

Escolio. Si las bases de dos pirámides son no solo equivalentes, sino tambien *iguales y superponibles*, debe suceder lo mismo con las secciones hechas á la misma altura en las pirámides; pues no podrian ser semejantes á sus bases respectivas, y equivalentes entre sí, sin ser iguales.

De la igualdad de los poliedros.

Teorema III.

N.° 345. *Dos poliedros convexos que tienen los mismos vértices y en el mismo número,* son iguales, porque *coinciden enteramente.*

Siendo la demostracion enteramente análoga á la que se dió respecto de los polígonos (n.° 88), nos limitaremos á advertirlo asi, añadiendo que aquella sirve para este sitio mudando las palabras *lados* y *diagonales* en *caras* y *planos diagonales.*

Fig. 287.

Teorema IV. (*Fig.* 287.)

N.° 346. *Dos prismas cualesquiera son iguales cuando tienen un ángulo triedro igual* [A, A′] *formado por tres polígonos iguales respectivamente, y reunidos del mismo modo.*

Siendo iguales las bases, y teniendo á la vez

$$ABGF = A'B'G'F', \quad AELF = A'E'L'F',$$

resulta que los tres ángulos planos que forman el ángulo triedro en A son respectivamente iguales á los que forman el ángulo triedro en A′, lo cual revela la igualdad de los ángulos diedros (n.° 336). Luego si colocamos la base A′B′C′D′E′ sobre su igual ABCDE, las caras A′B′G′F′, A′E′L′F′, coincidirán con sus iguales ABGF, AELF; coincidirán pues los tres puntos F′, G′, L′, con los puntos F, G, L; y los planos de las bases superiores, teniendo tres puntos comunes, se confundirán totalmente (n.° 290); y como estas bases son iguales, deberán coincidir los otros vértices I′, K′, con los I, K; quedando por consiguiente confundidos en uno los dos prismas (n.° 345).

Escolio 1.° *Dos prismas rectos son iguales cuando tienen la misma base y la misma altura.*

Porque, si hacemos coincidir las bases de modo que se confundan los vértices homólogos, como por el supuesto las aristas laterales son perpendiculares á las bases, deberán tomar la misma direccion; y como son todas iguales, coincidirán sus estremos, que son los vértices de las bases superiores, quedando confundidos por consiguiente los prismas.

Escolio 2.º En el *Apéndice* demostraremos que los dos prismas triangulares ABCEFG, ADCEKG (*fig.* 282) son *simétricos*; y por consiguiente, en general, no pueden superponerse, aunque tienen las caras y los ángulos diedros iguales respectivamente. — Solo siendo recto el paralelepípedo (*fig.* 283) es como son superponibles los dos prismas; y entonces, para hacerlos coincidir, basta revolver al segundo de modo que su base inferior BCD venga á confundirse con su igual ADB. Siendo rectos los prismas por hipótesis, tomarán la misma direccion las aristas (n.º 301); y como estas son iguales, coincidirán sus estremos, que son los vértices de las bases superiores; quedando por lo tanto los prismas confundidos.

Fig. 282.
Fig. 283.

Concluyamos de aqui que — *Los dos prismas rectos en que queda dividido un paralelepípedo recto por cualquiera de los planos diagonales, son iguales y superponibles.*

Teorema V. (*Fig.* 288.)

Fig. 288.

N.º 347. *Dos tetraedros son iguales* en dos casos principales:

1.º — *Cuando tienen un ángulo diedro igual* [DABC = D′A′B′C′] *formado por dos caras iguales respectivamente, y reunidas de la misma manera;*

2.º — *Cuando tienen un ángulo triedro igual* [A = A′] *formado por tres caras respectivamente iguales, é igualmente dispuestas.*

Primer caso. Colóquese la cara A′B′D′ sobre la ABD; — como el ángulo diedro en A′B′ es igual al ángulo diedro en AB, la cara A′B′C′ caerá sobre la ABC; y como estas caras son iguales, las rectas B′C′, A′C′, coincidirán respectivamente con BC, AC. Coincidiendo pues los vértices A′, B′, C′, D′, con los A, B, C, D, quedarán confundidos los tetraedros.

Segundo caso. Siendo las tres caras del ángulo triedro A′ iguales respectivamente á las del ángulo triedro en A, resulta (n.º 290) que son tambien iguales los ángulos diedros en A′B′ y AB; quedando con esto la proposicion reducida al caso precedente.

Corolario. *Dos tetraedros son iguales cuando tienen sus* *aristas respectivamente iguales, é igualmente dispuestas:*

Es decir, de modo que los *triángulos* resultantes sean igua- y esten reunidos de la misma manera (n.º 335); porque entonces son iguales las caras.

Escolio 1.º *Dos tetraedros son* tambien *iguales cuando tienen una cara igual*, y *los ángulos diedros adyacentes iguales respectivamente y dispuestos de la misma manera*;—porque, haciendo coincidir las dos caras iguales, los planos de las otras tres caras del uno de los ángulos triedros habrán de confundirse con los de las otras tres del segundo ángulo triedro:— y por consiguiente el punto de concurso de los tres planos primeros deberá confundirse con el de los tres segundos.

Escolio 2.º *Dos pirámides son iguales cuando tienen un ángulo triedro igual formado por tres caras* [la base y dos laterales] *iguales respectivamente, é igualmente dispuestas.*

En efecto, colocando las bases una sobre otra, iriamos demostrando como antes que deben coincidir las caras, coincidiendo por consiguiente los vértices de las pirámides: luego, &c.

N.º 348. *Descomposicion de un poliedro en tetraedros.*

Antes de pasar á la teoría de los poliedros iguales en general, daremos algunas nociones sobre su descomposicion en tetraedros.

Asi como hay (n.º 83) muchos medios de descomponer un polígono en triángulos, asi tambien puede un poliedro descomponerse en tetraedros de varios modos, siendo los dos principales análogos á los empleados en los polígonos.

Primer medio. Concibamos un punto O tomado arbitrariamente en lo interior de un poliedro [que suponemos convexo]; y hagamos pasar por él y por cada una de las aristas una serie de planos:—todos estos se irán cortando de dos en dos en unas rectas, que concurriendo en el punto O, determinarán otras tantas *pirámides* triangularès, cuadrangulares, &c., *como caras tiene el poliedro* con sus vértices en el punto O.

Ahora, si desde un mismo vértice de cada cara cuadrangular, pentagònal, &c., se tiran diagonales á los demas, quedará dividida la superficie poliédrica en triángulos, y por consiguiente el poliedro en *tantos tetraedros* con su vértice en el punto O, como *triángulos haya* en la superficie total, sirviéndoles estos de bases.

Segundo medio. Consideremos un vértice cualquiera A del poliedro, y descompongamos en triángulos [por medio de diagonales tiradas desde un mismo ángulo de cada cara] todas las caras menos las concurrentes en A; despues hagamos pasar planos por este punto y por los diferentes lados de los triángulos resultantes, y tendremos el poliedro descompuesto en *tantos tetraedros* con el vértice en A, como *triángulos haya* en las caras del poliedro, escepto las concurrentes en A.

Asi, en el paralelepípedo, por ejemplo, como es *triedro* cada ángulo sólido, quedan por descomponer tres caras, que dan cada una dos triángulos; luego el poliedro es igual á la suma de seis tetraedros que tienen por vértice comun el punto A (*fig.* 282), y por bases los triángulos recien nombrados. Fig. 282.

N.º 349. *Observacion importante* sobre estos dos métodos de descomposicion.—Cualquiera que sea el medio que escojamos, siempre hay que dividir los tetraedros resultantes en *dos* especies principales, unos *esteriores* y otros *interiores*.

Llámanse *tetraedros esteriores* los que tienen *dos* ó *tres* caras en la superficie del poliedro; y *tetraedros interiores* los que solo tienen en la superficie del poliedro una cara, que es la que les sirve de base.

La *fig.* 289, en que la descomposicion del poliedro se ha hecho por el segundo método [que es el mas usado] hará conocer las dos especies esplicadas de tetraedros. Fig. 289.

En el poliedro ABCDEFGKILM se distinguen *siete* caras *anteriores*, ABDE, BCD, DEF, CDFG, CGK, KCB, KBAI; y *cinco* caras *posteriores*, ALMFE, GMF, GMLK, LIK, AIL.

Tomando el punto A, por ejemplo, por vértice comun, como en él se reunen las cuatro caras, KBAI, ABDE, AIL, ALMFE, solo hay que descomponer en triángulos las caras anteriores BCD, DEF, CDFG, CGK, KCB, lo cual da *seis* triángulos; y las posteriores LIK, GLMK, GMF, que dan *cuatro* triángulos.—De donde resulta que el poliedro podrá descomponerse en *diez* tetraedros con el vértice comun en A.

Advert. Es ventajoso tomar el vértice en que concurran el mayor número de caras.

Los tetraedros ABCD, ADEF, AKBC,..., son de la primera especie, por tener *dos* ó *tres* caras en la superficie del poliedro.

El tetraedro AMGF es de la segunda especie, porque no tiene en la superficie del poliedro mas que la cara GMF, siendo interiores las aristas AG, AM, AF.

En general puede determinarse facilmente la especie de cada tetraedro por la inspeccion de la base y de las caras laterales [supuesto el vértice en A].

Añadiremos que, en los tetraedros de la primera especie, *tres* ángulos diedros, ó solo un ángulo diedro, son ángulos diedros del poliedro dado; mientras que en los tetraedros *interiores* todos los ángulos diedros son *diferencias* de otros pertenecientes ó al poliedro, ó á tetraedros *esteriores*, ó á tetraedros *interiores*.

Esto procede de que todos los tetraedros que componen la figura estan reunidos por caras comunes sin penetrarse nunca.

Todas estas observaciones serán muy útiles en adelante, y se debe tratar de comprenderlas bien á fondo.

N.° 350. *Igualdad de los poliedros en general.*—Dos poliedros cualesquiera se llaman iguales y superponibles, cuando se les puede hacer coincidir enteramente.

De donde resulta que—1.°—*Dos poliedros iguales tienen iguales respectivamente todas sus aristas y sus diagonales;*

2.° que—*Pueden descomponerse en un mismo número de tetraedros iguales, é igualmente dispuestos;*

3.° que—*Todas sus caras son iguales respectivamente, y lo mismo sus ángulos diedros.*

Las dos últimas proposiciones son susceptibles de recíprocas que se demostrarán en los dos teoremas siguientes.

Teorema VI.

N.° 351. *Dos poliedros son iguales cuando estan compuestos de un mismo número de tetraedros iguales respectivamente, y dispuestos de la misma manera.*

Porque en este caso, siendo los tetraedros adyacentes unos á otros en los dos poliedros (n.° 349), y hallándose dispuestos en el mismo orden, bastará hacer coincidir un tetraedro, para que todos los demas vayan coincidiendo unos en otros; con lo cual se confundirán los dos poliedros.

Teorema VII.

N.° 352. *Dos poliedros son iguales cuando tienen sus caras respectivamente iguales, é igualmente colocadas, y lo mismo los ángulos diedros.*

En efecto, descomponiendo en tetraedros á los dos poliedros [por el segundo método (n.° 348)], y comparando luego de dos en dos los tetraedros *esteriores*, es decir, los que tienen *dos* ó *tres* caras en la superficie de los poliedros, se verá que son iguales (n.º 347) ya por tener un ángulo diedro igual [perteneciente á los dos poliedros] formado por dos caras iguales, ya por tener sus tres caras iguales [triángulos homólogos en los dos poliedros]; de donde se deduce que serán iguales respectivamente las demas partes de los susodichos tetraedros esteriores.

Comparando despues dos tetraedros *interiores* adyacentes á los precedentes, veremos que tambien son iguales, por tener un ángulo diedro igual [diferencia entre un ángulo diedro del poliedro y un ángulo diedro de los tetraedros ya reconocidos iguales], formado por dos caras respectivamente iguales [á saber: una cara igual en los dos poliedros, ó un triángulo homólogo de una de las caras, y una cara igual de los tetraedros ya reconocidos iguales]; y asi de unos en otros. — Luego finalmente los poliedros son iguales por hallarse compuestos de un mismo número de tetraedros iguales.

Escolio. Podria tambien demostrarse esta última proposicion colocando una de las caras del segundo poliedro sobre su homóloga del primero. — Entonces todas las caras adyacentes coincidirian, pues por el supuesto, son iguales entre sí, están igualmente inclinadas respecto de la cara ya comun, y se hallan dispuestas del mismo modo. Asi se continuaria de unas en otras hasta confundirlas todas.

Esta clase de demostracion origina observaciones análogas á las hechas respecto de los polígonos, sobre el número de datos necesarios para su determinacion (*véanse* los n.os 167 y *sig.*); pero no insistiremos mas en estas consideraciones, que salen de la estension de unos *Elementos* (*).

Nos reduciremos á observar que en los poliedros el número de los ángulos diedros es siempre mayor que el número de caras, mientras que en los polígonos el número de ángulos es igual al de lados. Esto depende de que á una misma cara poligonal cualquiera se unen otras varias caras poligonales de un número de lados mas ó menos considerable: y ya hemos visto (n.º 294) que á cada arista corresponde un ángulo diedro. Asi es como el tetraedro tiene *cuatro* caras y *seis* ángulos

(*) M. Cauchy ha demostrado que cuando los poliedros son *convexos*, basta para ser iguales con tener iguales las caras. [*Véase* el Journal de l'École polytechnique, 16.º cuaderno, pág. 87 y sig.]

diedros, y una pirámide cualquiera tiene $(n+1)$ caras y $2n$ ángulos diedros, siendo n el número de lados de la base, &c.

Asi, en la *fig.* 289 se cuentan 12 caras y 20 aristas ó ángulos diedros.

CAPITULO II.

DE LOS TRES CUERPOS REDONDOS. — DEL CILINDRO, DEL CONO Y DE LA ESFERA. — POLIEDROS REGULARES.

Este capítulo tendrá *cuatro* párrafos: el *primero* tratará del *cilindro* y del *cono*; el *segundo* de la *esfera* y de sus principales propiedades; el *tercero* de la teoría de los *triángulos* y *polígonos esféricos*; y el *cuarto* de los poliedros *inscriptibles* y *circunscriptibles*, y en particular de los poliedros *regulares*.

§. I. *Del cilindro y del cono.*

Del cilindro recto.

de revolucion

N.º 353. Llámase CILINDRO RECTO [que es el que principalmente se considera en la Geometría elemental] una figura
Fig. 290. engendrada por la revolucion de un rectángulo ABDC (*fig.* 290) al rededor de uno de sus lados AB, que entonces se llama *eje* del cilindro, y tambien su *altura.*

En este movimiento el lado CD, opuesto al AB, engendra una superficie que se llama *superficie cilíndrica*; y los lados AC, BC, permaneciendo perpendiculares á AB, describen círculos cuyos planos son tambien perpendiculares á AB; estos círculos se llaman *bases* del cilindro; y la recta CD toma el nombre de *lado* ó *generatriz* de la superficie cilíndrica.— *La generatriz del cilindro recto es igual á su altura*, es decir, á su *eje.*

En este movimiento, cada uno de los puntos I del lado permanece á la misma distancia del eje, y describe una circunferencia de círculo cuyo radio IO es perpendicular á este, é igual al radio AC ó BD de las bases; lo cual se espresa diciendo que:

Toda seccion dada al cilindro paralelamente á las bases es igual á cada una de estas.

Donde se ve que el cilindro puede tambien considerarse *engendrado por el movimiento de una de sus bases paralelamente á sí misma á lo largo de la generatriz*; quedando entonces la superficie cilíndrica engendrada por la circunferencia.

Teorema I. (*Fig.* 290.)

Fig. 290.

N. 354. *Todo plano*, EFGK, *tirado paralelamente al eje* AB *de un cilindro, por una cuerda* EF *de la base, corta á la superficie cilíndrica en dos generatrices* EG, FK.

En efecto, puesto que el plano es paralelo á AB y pasa por el punto E, debe contener (n.° 313, *corol.* 1.°) á la paralela á AB tirada por ese punto; luego contiene á la generatriz EG: — y como pasa por el punto F, debe por igual razon contener á la generatriz FK de este punto.

Luego (n.° 1) las generatrices EG, FK, son las intersecciones del plano con la superficie cilíndrica.

Advert. La figura EFGK resultante es un *rectángulo*.

Escolio 1.° Cuando el plano pasa por el eje mismo, la seccion CDD′C′ es evidentemente un rectángulo *doble* del rectángulo generador; y las dos generatrices correspondientes se llaman *generatrices opuestas.*

Si el plano paralelo pasa por una recta LL′ tangente á la base en el punto M, toma el nombre de *tangente* al cilindro, porque en este caso no tiene comun con la superficie cilíndrica mas que la generatriz MN tirada por el punto de contacto. Se concibe en efecto que ningun otro punto del plano, situado á uno ú otro lado de MN, podrá hallarse á la vez en la superficie cilíndrica: porque si esto sucediera, como la generatriz correspondiente á este punto deberia tambien pertenecer al plano (n.° 353), sería necesario que esta generatriz encontrara á la base en la recta LL′, lo cual es *absurdo.*

El *plano tangente* al cilindro es por consiguiente el determinado por una recta tangente á la base, y la generatriz del punto de contacto: su propiedad característica es *tocar á la superficie en toda la estension de la generatriz*; de aquí procede que

Todo plano perpendicular al eje corta á la superficie ci-

líndrico en un círculo, y al plano tangente en una recta tangente á la circunferencia de la seccion.

N.° 355. Escolio 2.° — Si se inscriben y circunscriben á la circunferencia de la base inferior varios polígonos, y por sus lados se conciben planos perpendiculares á la base, estos planos cortarán á la base superior en polígonos iguales á los de la base inferior, y determinarán con unos y otros prismas (número 338) que llamaremos *prismas inscritos ó prismas circunscritos* al cilindro.

Cuando los polígonos son regulares, los prismas lo son tambien (n.° 339).

Consideremos en particular un prisma regular circunscrito, y supongamos que el número de lados de la base se hace *infinitamente grande*; entonces, el perímetro del polígono se confundirá con la circunferencia de la base del cilindro (número 245), y por consiguiente, el cilindro podrá considerarse *como un prisma regular de infinito número de caras rectangulares, que tienen por altura comun la del cilindro, y por bases los elementos de la base de este* (n.° 245).

Fig. 291. **Teorema II.** (*Fig.* 291.)

N.° 356. *La superficie lateral de todo cilindro recto puede desarrollarse sobre un plano, y quedar representada por un rectángulo que tenga por altura la del cilindro, y por base la longitud de la circunferencia de la base de este, supuesta rectificada* (n.° 241).

Para fijar las ideas, tomemos primero el prisma exagonal regular ABCDEFA'B'C'D'E'F', circunscrito á un cilindro cuya altura es AA', y cuya base tiene el radio OI.

Supongamos que en una recta indefinida ax se han tomado las partes ab, bc,..., fa'', iguales á los lados AB, BC, CD,..., FA, del polígono, y que se han levantado las perpendiculares aa', bb', cc',..., $a''a'''$, iguales á la altura AA'. — Es evidente que el rectángulo $aa''a'''a'$ representará [en su verdadera magnitud] la superficie lateral del prisma, *desarrollada* en un solo y mismo plano.

[Para concebir de otro modo esta propiedad, basta imaginar que el rectángulo BCC'B' gira al rededor de BB' y viene á colocarse en el plano del rectángulo ABB'A', que el rectángulo CDD'C' gira á su vez en torno de CC' para colocarse en el plano de los dos primeros; y asi sucesivamente: en esto consiste propiamente lo que se llama *desarrollo* de una superficie sobre un plano.]

Ahora bien, pudiéndose repetir las mismas operaciones con los prismas regulares de 12, 24,... lados, se infiere que podrá llegarse á un rectángulo *all'a'*, que tenga por altura *aa'*=AA', y por base una línea *al* igual á la circunferencia OI rectificada; *L. C. D. D.*

Advert. Los pequeños rectángulos *agg'a'*, *gkk'g'*,... representan aqui los *elementos superficiales* de la superficie lateral del cilindro, correspondientes *á los elementos ag*, *gk*,... de la circunferencia de la base.

Del cono recto.

N.º 357. El CONO RECTO es una figura engendrada por la revolucion de un triángulo rectángulo SOA (*fig.* 292) al rededor de uno de sus catetos, SO, que toma el nombre de *eje* del cono. Fig. 292.

La superficie engendrada en este movimiento por la hipotenusa AS, se llama *superficie cónica*; y la recta SA su *generatriz*, *arista* ó *lado*. — El círculo descrito por el otro cateto AO del triángulo rectángulo es la *base* del cono; el eje SO se llama tambien su *altura*; y el punto S su *cúspide* ó *vértice*.

En este movimiento, un punto cualquiera I de la generatriz SA describe un círculo cuyo radio IO', perpendicular al eje SO, es evidentemente al radio OA de la base, como la distancia SO' es á la distancia SO.

De donde resulta que — *Toda seccion hecha en un cono paralelamente á la base* [ó perpendicularmente al eje] *es una circunferencia de círculo.*

TEOREMA III. (*Fig.* 292.) Fig. 292

N.º 358. *Todo plano que pasa por el vértice de un cono recto y por una cuerda* EE' *de su base, corta á la superficie cónica en dos generatrices* SE, SE', *iguales á* SA.

En efecto, puesto que el plano dicho pasa por los tres puntos S, E, E', debe contener á las generatrices SE, SE', correspondientes á los puntos E, E'. — Luego (n.º 1) SE, SE', son las intersecciones del plano con la superficie cónica.

Cuando el plano pasa por el eje SO, es decir, por el vértice S y por un diámetro de la base, la seccion resultante es un triángulo ASA′ *doble* del triángulo OSA; y las dos generatrices correspondientes SA, SA′, se llaman *generatrices ó lados opuestos.*

N.° 359. Escolio 1.° — Se dice que un plano es *tangente* á un cono cuando pasa por una arista SM y por la tangente LL′ á la base, tirada por el punto M. — En efecto, en este caso ningun otro punto tomado en el plano puede pertenecer á la superficie cónica; porque si alguno hubiera, juntándole con el vértice S, tendriamos otra generatriz que, situada en el plano SLL′, encontraria á la base en un punto de la recta LL′, lo cual es *absurdo*, porque LL′ es tangente á la base por el supuesto.

El plano tangente al cono, como el plano tangente al cilindro (n.° 354, *escol.* 1.°), *toca á la superficie cónica en toda la estension de la generatriz*; y de aqui resulta que

Todo plano perpendicular al eje corta á la superficie cónica en una circunferencia de círculo (n.° 357), *y al plano tangente en una tangente á la misma circunferencia.*

N.° 360. Escolio 2.° — Inscribiendo y circunscribiendo polígonos á la circunferencia de la base, y haciendo pasar sucesivamente planos por los lados de los polígonos y por el vértice del cono, se forman pirámides inscritas y circunscritas á la superficie cónica.

Cuando los polígonos son *regulares*, lo son tambien las pirámides.

En las pirámides regulares circunscritas, la recta llamada *apotema* (n.° 343) es constantemente igual á la generatriz del cono.

En fin, puede decirse, como se dijo respecto del cilindro, que

El cono es una pirámide regular de infinito número de caras triangulares, que tienen por altura comun la generatriz del cono, y por bases los elementos de la circunferencia de la base del cono.

Fig. 293 y 293*.

Teorema IV. (*Fig.* 293 y 293*.)

N.° 361. *La superficie lateral del cono recto siempre se puede desarrollar en un plano, y quedar representada por un sector circular* (n.° 251) *que tenga por radio la genera-*

triz, y por base un arco de círculo igual en longitud á la circunferencia de la base.

Consideremos primero la pirámide exagonal regular circunscrita al cono cuya base tiene por radio OI (*fig.* 293), Fig. 293.
siendo la generatriz SI apotema á la vez de la pirámide; y procuremos desarrollar sus caras laterales en un mismo plano. — Para esto basta concebir que la cara SBC gira al rededor de SB como charnela, hasta venir á colocarse en el plano de la cara SBA; despues se hace girar la cara SCD al rededor de SC hasta que su plano se confunda con el de las dos primeras, y asi sucesivamente, resultando al fin desarrollada la pirámide.

Este desarrollo, representado por *seis* triángulos isósceles *sab*, *sbc*,..., *sfa'* (*fig.* 293*), adyacentes unos á otros en un Fig. 293*.
mismo plano, determina un sector poligonal *sabcdefa'* (n.º 253), que tiene por base una línea quebrada regular *abcdefa'*, tal que la suma de los ángulos en el centro *s* es menor que cuatro rectos (n.º 337), é igual en longitud al perímetro de la base de la pirámide, siendo apotema de este sector la generatriz SI del cono á que está circunscrita la pirámide.

Pudiéndose aplicar estas construcciones á cualquier clase de pirámides circunscritas, son aplicables á la superficie cónica que les sirve de límites; siendo entonces evidente que el desarrollo quedará representado por un sector circular cuya base será un arco igual en longitud á la suma de los elementos de la circunferencia de la base del cono, y su radio igual á la generatriz SA del mismo; *L. C. D. D.*

Escolio. Las superficies cónicas y cilíndricas no son sino casos particulares de una clase general de superficies que se llaman *superficies desarrollables*, y de que trataremos en el segundo *Apéndice*, donde tambien volveremos á hablar de las superficies cónicas y cilíndricas consideradas bajo un punto de vista mas general.

§. II. *De la esfera y de sus principales propiedades.*

N.º 362. Esfera es la figura descrita por la revolucion de un semicírculo al rededor de su diámetro (*fig.* 294); — la Fig. 294.
superficie engendrada por la semicircunferencia se llama superficie esférica.

En este movimiento, cada punto de la semicircunferencia describe otra circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje de revolucion AB, y cuyo centro P está situado en el eje, siendo MP su radio.

En este mismo movimiento, todos los puntos de la semicircunferencia generatriz, AMB, quedan á igual distancia siempre del punto O, que es su centro, de donde resulta otra definicion de la esfera y de su superficie:

La esfera es una figura terminada por una superficie cuyos puntos estan todos equidistantes de uno que se llama *centro.* — Toda recta tirada desde el centro á la superficie se llama *radio*; toda recta que pasando por el centro termina con ambos estremos en la superficie, se llama *diámetro.* (*Véase* en el n.° 13 la definicion del círculo.)

De esta segunda definicion se deduce evidentemente

1.° Que — *Dos esferas del mismo radio son iguales;*

2.° Que — *Todo plano* ARBS *que pasa por el centro de la esfera, determina un círculo cuyo radio es el mismo que el de la superficie;*—y ademas, *divide la figura en dos partes iguales que se llaman hemisferios.*

Fig. 295.

TEOREMA I. (*Fig.* 295.)

N.° 363. *Toda seccion de la esfera por un plano* MNPQR *es un círculo cuyo centro es el pie* I *de la perpendicular bajada al plano desde el centro* O *de la esfera.*

En efecto, juntando el punto I con varios puntos M, N, P,..., del contorno de la seccion, y luego estos mismos puntos con el centro de la esfera, resultará que siendo iguales todas las oblicuas OM, ON, OP,..., como radios de la esfera, sus pies M, N, P,..., deberán estar (n.° 303) equidistantes del punto I, pie de la perpendicular, que viene á ser por consiguiente centro de una circunferencia que pasa por todos aquellos puntos.

COROLARIO. *La superficie esférica es una superficie convexa*; porque siendo su interseccion con un plano una circunferencia, y no pudiendo esta línea ser encontrada por una recta mas que en dos puntos, tampoco la susodicha superficie podrá ser cortada mas que en dos puntos por una recta: lo cual constituye el principal carácter de las superficies convexas (número 294).

ESCOLIO 1.° Cuando el plano secante pasa por el centro de la esfera, toma la seccion el nombre de *círculo máximo.*

En una esfera misma, todos los círculos máximos son *iguales*, — segun hemos sentado en el número precedente; porque todos tienen por radio el de la esfera.

Todo otro plano secante determina un *círculo* que toma el nombre de *menor* ó *mínimo*. impropiatt.

Designando por R el radio OM de una esfera (*fig.* 295), Fig. 295.
por r el radio OI de una seccion cualquiera, y por d la distancia del punto O al plano de la seccion, resulta

$$R^2 = r^2 + d^2 \text{ (n.}^\circ \text{ 204); de donde } r = \sqrt{R^2 - d^2};$$

lo cual prueba que el radio r de un círculo menor *disminuye* á medida que *aumenta* la distancia de su plano al centro de la esfera; y *vice-versa*.

Escolio 2.° Se llaman *polos* de un círculo los puntos L, L′, en que la perpendicular, tirada á su plano desde el centro de la esfera, encuentra á la superficie esférica; la recta LL′ se llama *eje* del círculo.

Los puntos L, L′, y la recta LL′, son á la vez polos y eje de todos los círculos paralelos al MNPQR, y en particular del círculo máximo ACBD.

Asi pues, — *El eje de un círculo máximo de la esfera es el diámetro tirado perpendicularmente á su plano*: — los estremos del eje son los *polos*.

Teorema II. (*Fig.* 296.) Fig. 296.

N.° 364. *Todos los planos que pasan por el eje* AB *de un círculo menor, determinan círculos máximos* BPAR, BADD′,..., *perpendiculares al círculo menor dado y á sus paralelos*.

En efecto, acabamos de ver que AB es perpendicular al plano PQRS; luego tambien lo serán todos planos que pasen por esa recta (n.° 309).

Estos planos se llaman *meridianos* del círculo menor, y de todos sus paralelos (n.° 319), y en particular del círculo máximo CDC′D′, que es uno de ellos.

Escolio 1.° *Todos los arcos de meridiano* BP, BQ, BR,..., *comprendidos entre un círculo menor y uno de sus polos, son iguales*: — porque tirando las cuerdas BP, BQ, BR,..., resultan necesariamente iguales (n.° 303).

Cada uno de los arcos de meridiano BPC, BQD, BRC′,..., correspondientes á un círculo máximo CDC′D′, es un *cua-*

drante, porque los ángulos BOC, BOD, BOC′,..., *son rectos*.

ESCOLIO 2.° Un círculo máximo CDC′D′, no puede tener mas que *un solo* meridiano que pase por un punto dado en la superficie de la esfera, bien se halle como C en el mismo círculo, bien como Q se halle fuera de él [con tal que sea distinto del polo]; porque un punto y el eje AB determinan un plano (n.° 291).

Algunas veces el *arco* QD, cuyo plano es perpendicular al de la circunferencia CDC′D′, se suele llamar *perpendicular* á esta.

ESCOLIO 3.° Resulta en fin de lo que acabamos de decir, que para *obtener* en la superficie de una esfera el *polo* de un círculo máximo CDC′D′, basta concebir en dos de sus puntos C, D, dos arcos de círculo máximo que le sean perpendiculares, prolongándolos hasta que se encuentren en A y en B; ó bien levantando un solo arco CPB perpendicular á CD, é igual á un *cuadrante*.

Recíprocamente, para obtener un círculo máximo, cuyo polo se da, basta describir sobre la superficie esférica con una abertura de compás (*) igual á la *cuerda* de un *cuadrante*, una circunferencia que será la del círculo pedido.

Fig. 296.

TEOREMA III. (*Fig.* 296.)

N.° 365. *Todo plano* MN *tirado perpendicularmente á un radio de la esfera por su estremo* A, *es tangente á la esfera*: — lo cual quiere decir que no tiene con ella mas que un punto comun.

Porque cualquiera otra recta OI, tirada desde el centro de la esfera á un punto I del plano MN, es oblicua á este; luego es mas larga que OA (n.° 303), y por consiguiente su estremo I está fuera de la esfera.

RECÍPROCAMENTE: — *Un plano tangente á la esfera*, es decir, que solo tiene con ella un punto comun, *es perpendicular al radio en el punto de contacto*: — porque el radio es la distancia mas corta del centro al plano.

COROLARIO. *Todo plano tirado por el punto de contacto*

(*) Hay instrumentos llamados *compases esféricos*, por cuyo medio se pueden describir circunferencias en una superficie esférica, como se describen en un plano por medio del compás ordinario.

A *corta á la esfera en un círculo menor ó máximo, y al plano tangente en una recta tangente á la circunferencia de la seccion:* — porque si esta recta tuviera algun punto interior al círculo, el plano tangente tendria tambien un punto interior á la esfera, lo cual es *absurdo*.

N.° 366. Escolio.—Sean dos círculos máximos ACBC′, ADBD′, tirados por el diámetro AB; y AE, AF, las dos tangentes que resultan de la interseccion de los planos de los círculos con el plano tangente. — El ángulo EAF formado por dos rectas perpendiculares á AB, tiradas respectivamente en los dos planos, mide (n.° 308) el ángulo diedro CBAD.

Este mismo ángulo diedro tiene por medida el ángulo en el centro COD, formado por dos rectas OC, OD, perpendiculares á AB, ó paralelas á las tangentes AE, AF, ó bien tambien (n.° 119), el arco CD comprendido entre los lados de este ángulo.

Advert. Se llama huso esférico la *porcion de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias de círculo máximo*; y casco esférico, el *espacio encerrado entre el huso y los dos semicírculos*, que no es mas que una parte del ángulo diedro correspondiente al huso.

De las esferas secantes y tangentes.

N.° 367. *Proposicion preliminar.*— De ser la superficie esférica una superficie *reentrante y cerrada*, resulta necesariamente que si dos superficies esféricas estan colocadas de tal modo que la segunda tiene, respecto de la primera, *uno* ó *muchos puntos interiores*, y á la vez *uno* ó *muchos puntos esteriores* á ella, deben entrambas *cortarse.*

Se llama *línea de los centros* la recta indefinida que junta los centros de las esferas: en su direccion se mide la *distancia de los centros.*

Teorema IV. (*Fig.* 297.) Fig. 297.

N.° 368. *Cuando dos superficies esféricas se cortan, la línea de interseccion es una circunferencia de círculo cuyo plano es perpendicular á la línea de los centros, y cuyo centro está situado en esta misma línea.*

Sean, en efecto, O, O′, los centros de dos esferas, M un punto comun á sus superficies, MP la perpendicular bajada desde el punto M á la línea de los centros. Tírese un plano por los tres puntos O, O′, M; el cual determinará (n.º 363, *escol.* 1.º) en las dos esferas, dos círculos máximos cuyas circunferencias pasarán á la vez por el punto M. Suponiendo ahora que los dos semicírculos AMB, A′MB′, hagan una revolucion entera al rededor del eje comun AB′, es claro que en este movimiento la perpendicular MP describirá un círculo comun á las dos esferas que á la vez resultan engendradas (n.º 362).—Luego estas se cortan en un círculo cuyo centro está en el eje, y cuyo radio es la perpendicular bajada á este desde el punto M.

Escolio. Cualquiera que sea la posicion relativa de las esferas en el espacio, como todo plano tirado por la línea de los centros determina dos circunferencias cuyos centros y radios son los de las esferas dadas, resulta que las condiciones de *contacto* y de *interseccion* son *idénticas* á las de dos circunferencias. Asi pues, para enumerarlas y demostrarlas, basta referirse al §. IV *del cap.* 2.º *libro* 1.º

Nos limitaremos á enunciar la condicion relativa al *contacto.*

Cuando dos esferas se tocan, la distancia de los centros es igual á la suma ó á la diferencia de los radios;—Y tienen, en el punto de contacto, *un plano tangente comun.*

§. III. *De los triángulos y polígonos esféricos.*

Fig. 298. N.º 369. *Introduccion.*—Sea O (*fig.* 298) el centro de una esfera. Considerémosle como vértice de un ángulo poliedro convexo que satisfaga á la condicion puesta en el número 329, de estar todas sus caras situadas á un mismo lado respecto de un plano tirado por el punto O.—Esto supuesto, los planos de estas caras encuentran á la superficie esférica en circunferencias de círculos máximos, que, cortándose de dos en dos, determinan un polígono ABCDE que llamaremos *polígono esférico.*

Sus vértices A, B, C, D, E, en virtud de lo que se acaba de decir, deben hallarse todos situados en un mismo hemisferio determinado por el plano MNP arriba dicho, que suele ser ordinariamente el mismo de la figura.

Los arcos de círculos máximos AB, BC, CD,..., que, por sus mútuas intersecciones, determinan el polígono, se llaman sus *lados*; y sus *ángulos* son los A, B, C,..., que son en valor los mismos ángulos diedros formados por los planos de los círculos; porque estos ángulos diedros tienen necesariamente la misma medida (n.° 366) que los ángulos rectilíneos formados por las tangentes á los arcos AB y AE, BC y BA,..., en los puntos A, B,..., ó bien tambien los ángulos que forman el centro de la esfera las rectas tiradas respectivamente en los planos de los círculos, *perpendicularmente* á las aristas de los ángulos diedros.

En el caso particular de un triángulo esférico ABC (*fig.* 299), el plano de la figura se puede determinar de otro modo: Fig. 299.

Concibamos primero el plano que pasa por los tres vértices A, B, C: — este plano corta (n.° 368) á la superficie de la esfera en una circunferencia que es forzosamente de círculo menor, porque de lo contrario el plano contendria al centro de la esfera, y hallándose los tres puntos A, B, C, en una misma circunferencia de círculo máximo, no podrian formar triángulo.

Ahora, si tiramos por el centro O un plano MNP paralelo al de los tres puntos A, B, C, es claro que estos deberán quedar situados en un mismo hemisferio de los dos que determina aquel plano; — y este es el que podemos tomar por plano de la figura. — Asi, siempre en adelante supondremos que lá superficie de un triángulo esférico está totalmente comprendida en un mismo hemisferio.

De los triángulos esféricos en particular.

N.° 370. Solo se consideran ordinariamente, en la *Geometría elemental*, los triángulos formados por arcos de círculo máximo: — ademas, debiéndose hallar situado todo el triángulo en un mismo hemisferio segun se probó en el número precedente, resulta que — *Cada lado es menor que una semicircunferencia.*

Debe tambien advertirse, que si se prolongan en todos sentidos las caras del ángulo triedro en el centro, correspondiente al triángulo esférico dado ABC, los planos de esas caras determinan en la superficie de la esfera otros *siete* triángulos cuyos elementos tienen con los del triángulo dado las mismas relaciones de posicion y de magnitud que los elementos de los *ocho* ángulos triedros á que dan lugar tres planos que se cortan en un mismo punto (n.° 293); y cada uno de los lados de todos esos triángulos esféricos es tambien menor que la semicircunferencia.

N.º 371. La analogía que existe entre un ángulo triedro en el centro de una esfera y el triángulo esférico que le sirve de base, hace presentir que las propiedades de este han de ser consecuencias necesarias de las propiedades de aquel.

Asi, por ejemplo, casi inmediatamente se ocurren las proposiciones siguientes:

Fig. 299. 1.º *En todo triángulo esférico* ABC (*fig.* 299), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos*:

Porque, en el ángulo triedro OABC, tenemos

$$AOB < AOC + BOC \text{ (n.º 331)};$$

y como los arcos AB, AC, BC, estando descritos con el mismo radio, pueden servir de medida á sus ángulos respectivos, resulta

$$AB < AC + BC.$$

Por consiguiente, *un lado cualquiera de un polígono es-*
Fig. 298. *férico* ABCDE (*fig.* 298) es menor que la suma de todos los demas.

2.º *La suma de los tres lados de un triángulo esférico es menor que una circunferencia entera*, porque en el ángulo triedro correspondiente, la suma de las tres caras es menor que *cuatro* rectos (n.º 332).

3.º Un triángulo esférico puede ser *unirectángulo* [ó simplemente *rectángulo*], *birectángulo* y *trirectángulo*; porque un ángulo triedro puede tener (n.º 332, *escol.* 1.º) *uno*, ó *dos*, ó *tres* ángulos *diedros rectos*.

4.º *En todo triángulo esférico isósceles, á los lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Fig. 299. Porque si tenemos $AB = AC$ (*fig.* 299), por ejemplo, el ángulo AOB es igual al AOC; y siendo *isoedro* el ángulo triedro OABC, resulta que los ángulos diedros en OC, OB, son iguales (número 334, *advert.*); luego el ángulo C es igual al ángulo B.

Y asi de las demas propiedades análogas á las de los números 333 y siguientes.

En una palabra, en el desarrollo de las demas propiedades de los triángulos esféricos, nos bastará casi siempre recordar propiedades análogas de los ángulos triedros, pudiendo sin embargo dar demostraciones directas, siempre que este procedimiento nos parezca mas sencillo. — Asi lo hacemos respecto de la siguiente proposicion que corresponde á la propiedad del ángulo triedro suplementario.

Del triángulo polar.

N.° 372. Dado un triángulo esférico ABC (*fig.* 301), supondremos que el punto C′ es polo del arco AB (n.° 363, *escol.* 2.°), que se halla situado al mismo lado que el vértice C respecto del plano AOB, y que B′, A′, son los polos análogos de los arcos AC, BC: hagamos pasar arcos de círculo máximo por los tres puntos A′, B′, C′, y obtendremos otro triángulo esférico A′B′C′, cuyos tres lados B′C′, A′C′, A′B′, tienen recíprocamente por polos los tres vértices A, B, C, del primer triángulo. Fig. 301.

En efecto, siendo C′ uno de los polos del arco AB, el arco de círculo máximo que pasa por los puntos C′ y A, es igual á un *cuadrante* (n.° 364); igualmente, siendo B′ uno de los polos del arco AC, el arco de círculo máximo que pasa por los puntos B′ y A es igual á un cuadrante; asi pues, siendo cuadrantes AC′ y AB′, resulta (n.° 361) que el punto A es el polo del arco ó del lado B′C′.

El mismo raciocinio hariamos sobre los puntos B, C, respecto de los lados correspondientes A′C′, A′B′.

En razon de esta propiedad, los dos triángulos se llaman *triángulos polares uno de otro*, ó simplemente *triángulos polares*. — Esto supuesto:

TEOREMA I. (*Fig.* 301.) Fig. 301.

N.° 373. *Todo ángulo de un triángulo esférico tiene por medida el suplemento del lado opuesto del triángulo polar;* é igualmente, — *Cada lado del primer triángulo es el suplemento del ángulo que se le opone en el segundo.*

Para demostrar la primera parte de esta proposicion, prolonguénse los lados CA, CB, del triángulo ABC hasta su encuentro en D, E, con el lado A′B′ que en el triángulo polar A′B′C′ se opone al ángulo C. — Como el punto C es el polo del lado A′B′ (n.° 372), resulta que los arcos CD, CE, son cuadrantes (n.° 364); asi pues, el arco DE es la medida del ángulo C (n.° 363, *escol.* 2.°). Pero siendo los puntos A′ y B′

polos respectivos de los lados BC y AC, los arcos A'E, B'D son cuadrantes, y dan

$$A'E + B'D, = A'D + DE + DB' = A'B' + DE = 2 \textit{ cuadrantes};$$

$A'B' = \pi - DE = \pi - C$

luego A'B' es suplemento de DE ó del ángulo C.

Del mismo modo se demostraria que A'C', B'C', son los suplementos respectivos de los ángulos B y A.

La segunda parte resulta necesariamente de ser *mutuamente polares* los dos triángulos. Ademas se podria demostrar directamente que el ángulo C' tiene por medida el suplemento del lado AB, prolongando este arco hasta encontrar en G, K con los lados C'A', C'B'.

Advert. En virtud de esta propiedad del triángulo A'B'C' respecto del ABC, se da á este el nombre de *triángulo suplementario* del primero.

Escolio 1.° Es importante fijar la atencion en el modo de determinar segun el enunciado los puntos C', B', A'; porque si se consideraran los otros polos [A'', B'', C''] de los lados AB, AC, BC, combinándolos de tres en tres con C', B', A', podrian formarse otros triángulos esféricos que no gozarian la propiedad demostrada.

Añadiremos que esta propiedad se habria podido deducir de la propiedad del ángulo triedro suplementario establecida en el número 330; pero la demostracion que acabamos de dar nos parece mas sencilla.

Escolio 2.° Designemos por A, B, C, y A', B', C', los ángulos de dos triángulos polares recíprocos ABC y A'B'C'; y por a, b, c, y a', b', c', los lados respectivamente opuestos.— En virtud del teorema precedente, tenemos las relaciones

$$A + a' = 2 \textit{ rectos}, \quad B + b' = 2 \textit{ rectos}, \quad C + c' = 2 \textit{ rectos},$$

de donde $\quad A + B + C + a' + b' + c' = 6 \textit{ rectos}.$

Ahora bien, mientras el triángulo esférico ABC existe, existe tambien el triángulo A'B'C'; y da

1.° $\quad a' + b' + c' < 4 \textit{ rectos}$ (n.° 371, 2.°);

de donde $\quad A + B + C > 2 \textit{ rectos};$

2.º $$a' + b' + c' > 0;$$

de donde $$A + B + C < 6 \text{ rectos.}$$

Asi pues, —*En todo triángulo esférico, la suma de los tres ángulos es mayor que 2* RECTOS *y menor que* 6.

Esta suma puede aproximarse cuanto se quiera á cada límite; de modo que los tres ángulos pueden ser *agudos*, *rectos* ú *obtusos* á la vez, segun ya dijimos en el número 371.

En el triángulo *birectángulo*, dos de los lados son *cuadrantes*; y en el *trirectángulo*, lo son los tres lados.—Todo esto está perfectamente conforme con lo dicho en el número 332, *escol.* 1.º

TEOREMA II.

N.º 374. En una misma esfera ó en esferas iguales [es decir de radio igual], — *Dos triángulos esféricos son iguales*, — 1.º — *cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales y semejantemente dispuestos*, ó bien, *un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales y semejantemente dispuestos*; — 2.º — *cuando tienen los tres lados respectivamente iguales*, ó bien, *los tres ángulos respectivamente iguales y semejantemente dispuestos*; — 3.º — *cuando tienen dos lados iguales y el ángulo opuesto á uno de ellos*, ó bien, *dos ángulos iguales y el lado opuesto á uno de ellos* [pero este último caso está sujeto á muchas restricciones]. Fig. 302

Este enunciado presenta, segun aparece, *seis* casos diferentes unidos de dos en dos por la propiedad del triángulo esférico suplementario.

Para demostrarlos basta hacer coincidir los ángulos triedros formados en los centros O, O′, correspondientes á los triángulos esféricos, los cuales coincidirán por consiguiente.

Advert. Se llaman *tetraedros esféricos* los dos espacios OABC, O′A′B′C′, determinados por las caras de los ángulos triedros y por los triángulos esféricos ABC, A′B′C′; es evidente que cuando los triángulos coinciden, coinciden tambien los tetraedros.

ESCOLIO. Cuando dos triángulos esféricos tienen sus elementos [lados y ángulos] respectivamente iguales, pero no dispuestos de la misma manera, se dice que los triángulos son *si-*

métricos, porque entonces en efecto corresponden á ángulos triedros simétricos. (*Véase* el número 334.)

Pero en el caso particular de ser isósceles los triángulos esféricos, es decir, cuando se supone AB = AC, A'B' = A'C', la igualdad de los dos triángulos se verifica al mismo tiempo que su simetría; porque entonces siendo isoedros los ángulos triedros correspondientes, resulta que estos son iguales y superponibles (número 334, *advert.*)

Esto nos conduce á una proposicion importante.

Fig. 303. **Teorema III.** (*Fig.* 303.)

N.° 375. ***Dos triángulos esféricos simétricos son equivalentes*** [en superficie].

Consideremos los triángulos ABC, A'B'C', en los cuales se suponen los lados AB y A'B', AC y A'C', BC y B'C', iguales respectivamente, como tambien los ángulos opuestos, pero colocados simétricamente.

Sea P el polo del círculo mínimo que pasa por los tres puntos A, B, C, situado respecto del centro de la esfera al mismo lado que dicho círculo mínimo: juntemos el punto P con los puntos A, B, C, por medio de arcos de círculos máximos, PA, PB, PC (n.° 364, *escol.* 1.°): trácese despues en la superficie del triángulo A'B'C', un arco de círculo máximo A'P', que forme con A'B' un ángulo P'A'B' igual al ángulo PAB, y tómese A'P' = AP. Júntese finalmente el punto P' con los puntos C' B', por medio de los arcos C'P', B'P'.

Esto supuesto, los dos triángulos ABP, A'B'P', tienen un ángulo igual, PAB = P'A'B', formado por lados iguales, AB = A'B', AP = A'P'; y ademas son isósceles, puesto que AP = PB, A'P' = P'B' (n.° 364); luego son iguales y superponibles (*escol. precedente*).

Del mismo modo los triángulos APC, A'P'C', son iguales y superponibles; porque, de ser iguales respectivamente los ángulos BAC y B'A'C', PAB y P'A'B', resulta

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{PAC} = \textit{ángulo}\ \mathrm{P'A'C'};$$

ademas, estos triángulos son isósceles, porque

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PC},\quad \mathrm{P'A'} = \mathrm{P'C'}.$$

Lo mismo diriamos respecto de los triángulos PCB, P'C'B'.

Los dos triángulos ABC, A′B′C′, estan por consiguiente compuestos de partes PAB y P′A′B′, PAC y P′A′C′, PBC y P′B′C′, respectivamente superponibles, y por lo tanto iguales en superficie; luego tambien deben ser iguales las superficies de los triángulos totales.

Advert. El punto P′, determinado por la construccion precedente, es el polo del círculo mínimo que pasa por los tres puntos A′, B′, C′, como lo es el punto P respecto del círculo mínimo que pasa por los tres puntos A, B, C.

Corolario. Del teorema anterior se deduce que los tetraedros esféricos OABC, O′A′B′C′, son *equivalentes*, pues estan compuestos de partes iguales y superponibles respectivamente (n.° 375), como correspondientes á triángulos esféricos iguales y superponibles.

Por consiguiente, los ángulos triedros, correspondientes á los tetraedros esféricos, son tambien equivalentes, porque cada uno puede descomponerse en *tres* ángulos *triedros isoedros* que podrian hacerse coincidir respectivamente con los del otro (n.° 364, *escol.* 1.°).

Terminaremos este párrafo con algunas propiedades de la esfera, entre las cuales la primera podrá parecer tal vez una *paradoja*, y es sin embargo consecuencia rigorosa de la proposicion establecida en el número 262, respecto de los arcos de círculo descritos con radios diferentes sobre una cuerda comun.

Teorema IV. (*Fig.* 304.) Fig. 304.

N.° 376. *El arco* [rectificado] *de círculo máximo* AMB, *que pasa por dos puntos cualesquiera* A, B, *de una superficie esférica, es menor que todo arco de círculo mínimo terminado en los mismos puntos* A, B.

En efecto, sean O el centro de la esfera, R su radio, que es el del círculo máximo, r el radio de un círculo mínimo cualquiera de los que pueden imaginarse trazados por los puntos A, B, y d finalmente la distancia del centro O al plano de este círculo mínimo.—La relacion $r=\sqrt{R^2-d^2}$, obtenida en el número 363, nos prueba que todos los círculos que pasan por los puntos A, B, y estan situados sobre la superficie esférica, tienen un radio menor que el de la esfera; luego (n.° 262) el arco AMB es menor que todo arco de círculo terminado en los mismos puntos A, B.

Advert. Debe entenderse que aqui solo se trata de la parte menor de las dos en que queda dividida la circunferencia por la cuerda AB.

ESCOLIO. Se pueden colocar para la demostracion los diferentes arcos de círculo, en un mismo plano, como estan en la figura 168 (n.° 262), haciendo girar el plano de cada uno al rededor de AB como charnela, hasta rebatirle en el plano del círculo máximo OAB.

El arco de círculo máximo será el arco AMB que tiene su centro en O; el arco de círculo mínimo cuyo plano es perpendicular al plano OAB, aparecerá rebatido formando la semicircunferencia ANB, que tendrá su centro en *o*, punto medio de AB; y todo otro arco de círculo mínimo se hallará en un plano intermedio á los dos precedentes, tendrá un radio *o'*A menor que OA, pero mayor que *o*A; se verá por consiguiente rebatido formando un arco ARB, intermedio; y dará, como en el número 262,

$$AMB < ARB < ANB.$$

Fig. 304.*

TEOREMA V. (*Fig.* 304*.)

N.° 377. ***El camino mas corto para ir de un punto á otro en la superficie de una esfera es el menor de los dos arcos de círculo máximo que pasan por dichos puntos.***

En efecto, observemos que, por su naturaleza, la esfera es una figura *perfectamente redonda*, en el sentido de que toda seccion que se le dé en cualquier direccion, es una circunferencia de círculo.

Esto supuesto, sea ACDEB una línea trazada arbitrariamente sobre su superficie, y diversa del arco AMB; siempre podrá considerarse ó como un arco de círculo mínimo, ó como un conjunto de arcos de círculos máximos AC, CD, DE, EB, situados en planos distintos, ó bien finalmente, como un conjunto de arcos de círculos mínimos sumamente pequeños.

En el primer caso, está ya demostrada la proposicion por lo dicho anteriormente.

En el segundo, como los arcos AC, CD,..., forman con el arco AMB un polígono esférico, el arco AMB es menor que AC + CD + ... (n.° 371), ó menor que ACDEB.

En el tercer caso, cada uno de los arcos de círculo mínimo AC, CD,..., es mayor que el arco de círculo máximo que tiene las mismas estremidades A y C, C y D,...; luego, *à fortiori*,

$$AMB < ACDEB; \qquad \textit{L. C. D. D.}$$

Advert. Esta demostracion nos parece mucho mas directa y sobre todo mas conforme con la naturaleza de la esfera, que las otras demostraciones consignadas en varios tratados.

§. IV. *De los poliedros inscriptibles y circunscriptibles, y en particular de los poliedros regulares.*

Teorema I. (*Fig.* 305.)

Fig. 305.

N.° 378. *Todo tetraedro* DABC *es inscriptible á una esfera*; ó en otras palabras,—*Por cuatro puntos no situados en un plano puede pasar siempre una superficie esférica.*

Sean I, I′, los centros de los círculos circunscritos á dos de las caras ABC, ACD, por ejemplo; tirando los ejes IL, I′L′, de esos círculos (n.° 303, *escol.* 1.°), — digo — 1.° — que dichos ejes se encuentran en un mismo punto O; — 2.° — que el punto O es el centro de una esfera cuya superficie contiene los cuatro puntos A, B, C, D.

1.° Siendo AC una cuerda comun á los dos círculos circunscritos, resulta que las perpendiculares que se le tiren en su punto medio K, en los planos respectivos ABC, ADC, pasan por los puntos I, I′ (n.° 41); — ademas, el plano tirado por las dos perpendiculares KI, KI′, es perpendicular á la misma cuerda AC (n.° 312), y por consiguiente á los dos planos ABC, ADC; luego contiene á los ejes IL, I′L′ (n.° 311); y como las rectas KI, KI′, se cortan, deben tambien cortarse los ejes, IL, I′L′ (n.° 50). — Sea pues el punto O su punto de interseccion.

2.° *Tírense* las rectas OA, OB, OC, OD. Se vió en el número 303 que IL es el lugar de todos los puntos situados á igual distancia de A, B, C; luego

$$OA = OB = OC.$$

Por una razon análoga, se tiene

$$OA = OC = OD.$$

Luego la superficie de la esfera que tenga por radio OA, pasa necesariamente por los otros puntos B, C, D; *L. C. D. D.*

ESCOLIO 1.° Como en virtud de los raciocinios precedentes, el centro de toda esfera que pasa por los cuatro puntos A, B, C, D, debe hallarse á la vez en IL, y en I'L', cuyas rectas se cortan en un punto *único*, resulta que solo puede haber *una* esfera que satisfaga á la condicion enunciada.—Podemos pues sentar las dos proposiciones siguientes:

1.° *Si, por los centros de los círculos circunscritos á las cuatro caras de un tetraedro, se levantan perpendiculares á sus planos, las cuatro perpendiculares concurren en el mismo punto.*

2.° *Si, por los puntos medios de las seis aristas de un tetraedro, se tiran planos que sean perpendiculares á las aristas y por consiguiente á las caras, los seis planos concurrirán en un mismo punto.*

Este punto *único* en uno y en otro caso es el mismo centro de la esfera circunscrita al tetraedro.

ESCOLIO 2.° El teorema principal puede enunciarse como problema del modo siguiente:

Hacer pasar una esfera por cuatro puntos dados.

Pero entonces se deben examinar varias hipótesis:

1.° Si los cuatro puntos dados no estan en un mismo plano, en cuyo caso pueden considerarse como vértices de un tetraedro, y el problema es siempre posible con *solo una* solucion.

2.° Si los cuatro puntos estan en un mismo plano y pertenecen á una misma circunferencia de círculo, todos los puntos del eje de esta circunferencia (n.° 303, *escol.* 1.°) son los centros de otras tantas esferas que pasan por los cuatro puntos; y en este caso el problema es susceptible de una *infinidad* de soluciones.

3.° Si los cuatro puntos estan en un mismo plano, pero no en una misma circunferencia de círculo [hipótesis que, como caso particular, comprende el de hallarse tres de ellos en línea recta], es *imposible* el problema.—Y en efecto, en esta hipótesis los ejes de los círculos tirados por los *cuatro* puntos, combinados de *tres* en *tres*, son *paralelos*; y su punto de interseccion, que es el centro de la esfera, se encuentra en el *infinito*.

Podria sin embargo decirse que en este caso el radio de la esfera es *infinito*, ó que su centro está en el *infinito*; y entonces su superficie sería el plano de los cuatro puntos dados.

4.° Finalmente, si los cuatro puntos estan situados en línea recta, resultarian por soluciones superficies planas en número infinito, &c. por que todos los planos que pasan por dicha recta se pudieran considerar como soluciones.

TEOREMA II. (*Fig.* 306.)

Fig. 306.

N.° 379. *Todo tetraedro* DABC *es circunscriptible á una esfera*, — ó bien, — *siempre puede obtenerse una esfera tangente á las cuatro caras de un tetraedro.*

Consideremos los tres planos bisectores de los ángulos diedros de la base ABC; y observemos que forman un nuevo tetraedro OABC, cuyo vértice O puede tomarse por centro de una esfera tangente á las cuatro caras del primero.

En efecto, bájense desde el punto O las perpendiculares OI, OK, OG, OL, á las cuatro caras ABC, ABD, ADC, DBC. Hemos visto que el plano bisector OAB es el lugar de todos los puntos equidistantes de las caras ABC, ABD; luego OI = OK. Del mismo modo, siendo OBC el lugar de todos los puntos equidistantes de las caras ABC, BCD, tendremos OI = OL, y por consiguiente OI = OK = OL.

Del mismo modo se demostraria que OI = OG, y por lo tanto que OI = OK = OL = OG.

Luego la esfera que tenga su centro en O, y por radio OI, pasará necesariamente por los cuatro punto I, K, G, L, y será ademas tangente á las cuatro caras (n.° 365).

ESCOLIO 1.° Como cada uno de los ángulos diedros de la base no tiene mas que un plano bisector, y como los tres planos bisectores no pueden reunirse mas que en solo un punto, resulta que á un tetraedro dado no se le puede *inscribir* mas que una esfera.

Tambien se infiere esta nueva proposicion:

Los seis planos bisectores de los ángulos diedros de un tetraedro concurren en un mismo punto, que es el centro de la esfera inscrita.

ESCOLIO 2.° Procediendo como con el triángulo (n.° 173), podrian obtenerse otras *cuatro* esferas [que se llamarian *ex-inscritas*], prolongando cada una de las caras de un mismo ángulo triedro por el lado contrario á la cara que le estuviera opuesta, y tirando despues los planos bisectores suplementarios.

De los poliedros regulares.

N.° 380. Se llama *poliedro regular* todo *poliedro cuyas caras son polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos diedros son iguales*; de donde se sigue que todos los ángulos poliedros han de ser iguales y regulares, y ademas, que todo poliedro regular ha de ser necesariamente *convexo*.

[Bien se ve que esta definicion no comprende á los prismas y pirámides regulares, tales cuales se definieron en los números 339 y 343; pues allí la regularidad era relativa á una especie y no á todo el género.]

Teorema III.

N.° 381. *No puede haber mas que cinco clases de poliedros regulares.*

En efecto, sabemos ya que se necesitan al menos tres caras para formar un ángulo poliedro, y ademas sabemos que la suma de todas las caras de cualquiera de ellos debe valer *menos de cuatro rectos* (n.° 337.); basta, pues, para probar el teorema, ir recorriendo los ángulos de los polígonos regulares cuyas reuniones de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5,..., dan una suma menor que *cuatro rectos.*

1.° El ángulo del triángulo equilátero es igual á $\frac{2}{3}$ de 1 *recto*; luego pueden reunirse *tres*, *cuatro* ó *cinco* ángulos de triángulo equilátero para formar un ángulo poliedro, pero ya no se pueden reunir mas, porque $\frac{2}{3}\times 6$ daria $\frac{12}{3}$ ó 4 *rectos.*

2.° El ángulo del cuadrado vale 1 recto, por consiguiente solo pueden reunirse *tres* á lo mas, porque cuatro darian una suma igual á cuatro rectos.

3.° El ángulo del pentágono regular vale $\frac{6}{5}$; luego tampoco pueden reunirse mas de *tres*, que darán $\frac{6}{5}\times 3 = 3\,\frac{3}{5}$.

Como el ángulo del exágono regular vale $\frac{8}{6}$ ó $\frac{4}{3}$, y $\frac{4}{3}\times 3$ da 4 *rectos*, resulta que no se puede formar ángulo poliedro con ángulos de exágono regular, y *à fortiori* con ninguna otra clase de polígonos regulares de mayor número de lados.

Asi pues, los únicos poliedros regulares posibles son aquellos que tienen cada ángulo sólido formado por *tres*, *cuatro* ó *cinco* ángulos de triángulo equilátero, ó por *tres* ángulos de cuadrado, ó en fin, por *tres* ángulos de pentágono regular: luego no hay mas que *cinco* poliedros regulares;

L. C. D. D.

Escolio. Falta probar que siempre puede formarse cada uno de estos poliedros regulares; pero esto lo haremos mas adelante. Los poliedros obtenidos son el *tetraedro regular* [de *cuatro* caras], el *exaedro regular* ó *cubo* (n.º 340) [de *seis* caras], el *octaedro regular* [de *ocho* caras], el *dodecaedro regular* [de *doce* caras], y el *icosaedro regular* [de *veinte* caras].

Haremos conocer desde ahora el modo de construir el *tetraedro* y el *exaedro*, sobre una recta dada como lado.

Sean primero ABC (*fig.* 307) el triángulo equilátero cons- Fig. 307.
truido sobre una recta dada como lado (n.º 157), y O el centro del círculo inscrito ó circunscrito al mismo triángulo. Levántese por este punto una perpendicular al plano ABC; señálese en esta perpendicular un punto S tal, que dé la distancia SA igual á la distandia AB, y tírense las rectas SA, SB, SC; con lo cual se tendrá el tetraedro pedido.

Porque, las rectas SA, SB, SC, son iguales (n.º 303); y como por construccion SA = AB, las cuatro caras SAB, SAC, SBC, ABC, son iguales; y lo mismo lo serán los ángulos diedros. Luego la figura es un poliedro *regular*.

Sea, en segundo lugar, MNPQ un *cuadrado*. Por los cuatro vértices M, N, P, Q, levántense rectas perpendiculares al plano de la figura, é iguales á MN; tírense las rectas M′N′, N′P′, P′Q′, Q′M′; y la figura asi obtenida es evidentemente un *cubo* ó *exaedro regular*.

Teorema IV. (*Fig.* 308.) Fig. 308.

N.º 382. *Todo poliedro regular es á la vez inscriptible y circunscriptible á una esfera*; — lo cual significa que siempre es posible — 1.º — *hacer pasar la superficie de una esfera por todos los vértices de un poliedro regular*; — 2.º — *construir una esfera tangente á todas sus caras.*

Sean en efecto ABCD..., ABC′D′..., dos caras contíguas cualesquiera, é I, I′, sus dos centros. Se puede probar, como en el n.º 378, que los ejes IL, I′L′, de los círculos circunscritos á los dos polígonos regulares, se cortan en un punto O; y que si se junta este punto con los vértices A, B, C, D,..., C′ D′,..., se tendrá, á causa de ser OI = OI′ [segun puede probarse facilmente por medio de los triángulos rectángulos OIK, OI′K], una serie de oblicuas iguales OA, OB, OC, OD,..., OC′, OD′,...

Combinando ahora una cara de estas, la ABCD..., por ejemplo, con otra que le sea contigua, se probará del mismo modo que el eje de este nuevo polígono encuentra á IL en el mismo punto O, y por consiguiente, que todas las oblicuas que juntan el punto O con los vértices de la tercer cara son iguales á las oblicuas precedentes; y asi sucesivamente.

De aqui resulta que el punto O puede considerarse como vértice comun de una serie de *pirámides regulares* (n.° 343) iguales, que tienen por bases las varias caras del poliedro, y por ejes las rectas que juntan al centro O con los centros de las bases.

Luego—1.°—La esfera que tiene por *centro* el punto O, y por *radio* OA, pasará por todos los vértices del poliedro; —2.°—La esfera que tiene por *centro* el mismo punto O, y por *radio* OI, será tangente á todas las caras del poliedro en los puntos I, I′, I″,...; *L. C. D. D.*

CAPITULO III.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO. — PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

Introduccion.

N.° 383. En el tercer capítulo de cada uno de los dos libros primeros, hemos espuesto los medios de resolver gráficamente problemas relativos á figuras planas.—Siendo el objeto que nos proponemos en este resolver problemas sobre los puntos, líneas, superficies y cuerpos, naturalmente se preguntará cómo conseguiremos su solucion valiéndonos de construcciones ejecutadas en *un solo plano.* Diremos pues ante todo que para esto sirve una ciencia cuya invencion se debe en gran parte al ilustre MONGE, uno de los fundadores de la Escuela Politécnica: al menos él es quien reuniendo sus elementos, ha contribuido mas á constituirla en cuerpo de doctrina.

Asi, antes de pasar á la resolucion de nuevos problemas, debemos sentar los principios fundamentales de la *Geometría descriptiva*, ramo de las Matemáticas, cuyo principal objeto es representar y fijar, por medio de construcciones ejecutadas sobre *una hoja de papel*, la posicion absoluta ó relativa de uno ó mas objetos, cuyas diversas partes se hallan por lo comun en diferentes planos.

N.° 384. *Definiciones.* — Consideremos dos planos perpendiculares entre sí, uno MN (*fig.* 309), que llamaremos **PLANO HORIZONTAL** [y es la *hoja de papel* en que se trazan las construcciones], otro NP, llamado **PLANO VERTICAL**. — Se cortan estos planos en una recta LL′, que suele casi siempre designarse con el nombre de **LÍNEA DE TIERRA**. Fig. 309.

Esto supuesto, si recordamos que (n.° 326) *la proyeccion de un punto sobre un plano* es el pie de la perpendicular bajada al plano desde dicho punto, y que *la proyeccion de una recta sobre un plano* es la recta que junta los pies de las perpendiculares bajadas al plano desde varios puntos de la recta dada, diremos,

1.° Que la proyeccion *horizontal* de un punto A del espacio, es la proyeccion *a* de dicho punto sobre el plano horizontal, y que su proyeccion *vertical* es la proyeccion *a′* del mismo punto sobre el plano vertical;

2.° Que las proyecciones *horizontal* y *vertical* de una recta AB, son las proyecciones *ab*, *a′b′*, de dicha recta en el plano horizontal y en el vertical.

Los dos planos MN, NP, llevan de mancomun el nombre de **PLANOS DE PROYECCION**.

Los planos AB*ba*, AB*a′b′*, que deben imaginarse pasados por la recta AB, perpendicularmente á los planos MN, NP, para obtener las dos proyecciones de dicha recta, tanto en el plano horizontal como en el vertical, se llaman **PLANOS PROYECTANTES**.

Se llaman **TRAZAS** de un plano cualquiera, sus intersecciones CD, C′D, con los planos de proyeccion; CD es *la traza horizontal*, y C′D *la traza vertical*: — ambas trazas se cortan necesariamente *en un mismo punto* de la línea de tierra LL′, y determinan la posicion del plano.

Si el plano considerado es perpendicular á uno de los de proyeccion, por ejemplo al vertical, su *traza horizontal* EG es perpendicular á la línea de tierra (n.° 312), porque es la interseccion de dos planos perpendiculares al plano horizontal. Igualmente, es *perpendicular* á la línea de tierra la *traza vertical* de un plano perpendicular al plano horizontal.

N.° 385. Para completar estas nociones preliminares, debemos hacer una observacion importante, á saber: — Como

todas las operaciones gráficas se ejecutan realmente, bien en una hoja de papel *horizontal*, bien en una pizarra *vertical*, á cada instante nos vemos obligados á suponer que uno de los
Fig. 309. planos de proyeccion, por ejemplo el NP (*fig.* 309), gira al rededor de la línea de tierra para *rebatirse* sobre el otro plano. Sucede entonces [y esta es una circunstancia que debe tenerse muy presente] que despues del *rebatimiento*, como los planos de proyeccion se estienden indefinidamente en todos sentidos, la parte *inferior*, NP′, del plano vertical (*) viene á confundirse con la parte *delantera*, MN, del plano horizontal; y á la vez, la parte *superior*, NP, del plano vertical, cae y se confunde con la *posterior*, QN′, del horizontal, es decir, con la parte de este plano oculta detras del vertical.

Sentadas estas nociones, dividiremos el capítulo en *tres* párrafos. — El *primero* tendrá per objeto lo que se ha llamado *método de las proyecciones*, con sus aplicaciones á diferentes problemas sobre el punto, la recta y el plano; el *segundo*, el *método de rebatimiento* y sus principales aplicaciones; en fin, el *tercero* contendrá varias cuestiones sobre la esfera, que se enlazan mas ó menos directamente, ya con el método de las proyecciones, ya con el de rebatimiento.

§. I. *Método de las proyecciones.*

Principios fundamentales.

Fig. 310.

PRIMER PRINCIPIO. (*Fig.* 310.)

N.° 386. *Las proyecciones horizontal y vertical*, o, o′, *de un punto* O *del espacio*, *deben hallarse*, despues del rebatimiento del plano vertical de proyeccion, por ejemplo, *en una misma recta perpendicular á la línea de tierra.*

En efecto, por las perpendiculares Oo, Oo′, bajadas desde el punto O á los planos de proyeccion, hagamos pasar un plano; el cual, siendo á la vez perpendicular al plano horizontal y al vertical (n.° 309), lo es tambien á su interseccion LL′ (n.° 312), y por consiguiente, corta á los planos de proyeccion en las rectas *ok*, *o′k*, que pasan por el mismo punto

(*) Se supone ordinariamente que el movimiento se hace de adelante á atrás.

k, y son á un tiempo perpendiculares á LL′. Ahora bien, durante el movimiento que hace el plano vertical para caer sobre el horizontal, la recta $o'k$ no deja de ser perpendicular á LL′; luego, despues del rebatimiento, el punto o' debe colocarse en o'' en la prolongacion de la recta ok; asi pues, los puntos o, o'', que representan entonces las proyecciones del punto O, estan situados en una misma recta oo'' perpendicular á la línea de tierra.

Advert. Siendo un rectángulo la figura Ooko', tenemos

$$\mathrm{O}o = o'k = o''k, \quad \text{y} \quad \mathrm{O}o' = ok,$$

lo cual prueba que la distancia del punto O del espacio al plano horizontal, puede representarse lo mismo por Oo que por $o'k$ ó por $o''k$; y su distancia al plano vertical se puede representar por Oo' ó por ok.

ESCOLIO 1.° RECÍPROCAMENTE, *cuando* despues del rebatimiento del plano vertical, *se dan dos puntos*, o, o″, *en una misma recta perpendicular á la línea de tierra, pueden dichos puntos considerarse como proyecciones de un mismo punto del espacio, cuya posicion fijan generalmente.*

Porque supongamos que tornan los planos de proyeccion á su posicion verdadera [de cortarse en aquellos rectos]: — en este movimiento, la recta ko'' no dejará de ser perpendicular á LL′, y tomará una posicion tal como ko'; entonces las rectas ko', ko, determinarán un plano perpendicular á LL′ (número 309); y si por los puntos o, o', levantamos líneas respectivamente perpendiculares á los planos de proyeccion, hallándose ambas en el plano oko' (n.° 311), se encontrarán en un punto O (n.° 50), que no podrá menos de ser el proyectado en los puntos o y o' ú o''.

Asi pues, las dos proyecciones de un punto determinan ó fijan su posicion.

Advert. Debe observarse que, con arreglo á la advertencia hecha en el n.° 385, los puntos o, o'', considerados como proyecciones de un mismo punto O del espacio, representan igualmente las proyecciones de otro punto O′ que estuviera situado *detras* del plano vertical y *debajo* del horizontal.

ESCOLIO 2.° Cuando un punto r está situado en el plano horizontal, él mismo se sirve de proyeccion *horizontal*; y su proyeccion *vertical* debe ser el pie r' de la perpendicular bajada á la línea de tierra desde el punto *r* (n.º 311). — Igualmente, la proyeccion *vertical* de un punto *s'* situado en el plano vertical, es el mismo punto *s'*; y su proyeccion *horizontal* es el punto *s*, pie de la perpendicular bajada desde *s'* á la línea de tierra.

Fig. 309 y 311. **SEGUNDO PRINCIPIO.** (*Fig.* 309 y 311.)

N.º 387. *Dadas las proyecciones horizontal y vertical de una recta en el espacio, queda la recta,* generalmente hablando, *completamente determinada de posicion.*

Pueden aqui presentarse muchos casos:

PRIMER CASO. Supondremos primero que ninguna de las proyecciones es perpendicular ni paralela á la línea de tierra.
Fig. 309. Sean pues *ab*, *a'b'* (*fig.* 309), las dos proyecciones. — Hagamos pasar por cada una un plano que sea respectivamente perpendicular al plano horizontal: — esos planos deben cortarse necesariamente, pues de lo contrario serian paralelos; y como la traza vertical del plano tirado por *ab* es perpendicular á la línea de tierra (n.º 384), deberia serlo tambien *a'b'* traza vertical del segundo plano (n.º 34, 4.º), lo cual sería contra el supuesto. Cortándose pues los planos, su interseccion habrá de ser una recta AB, á la cual sirven de proyecciones *ab*, *a'b'*; y que ademas es *única*.

SEGUNDO CASO. Supongamos ahora que una de las dos pro-
Fig. 311. yecciones dadas, la horizontal *cd* por ejemplo (*fig.* 311), sea *paralela* á la línea de tierra, siendo la proyeccion vertical una recta cualquiera *c'd'*: — en este caso, tambien se encontrarán los dos planos perpendiculares, porque el plano tirado por *c'd'* corta al plano vertical de proyeccion, y este es necesariamente paralelo al plano tirado por *cd* (n.º 324); la interseccion pues de los planos perpendiculares será la recta CD, cuyas proyecciones son *cd*, *c'd'*; — y que ademas será *paralela* al plano *vertical de proyeccion*, por hallarse situada en un plano paralelo á este último.

Del mismo modo se demostraría que una recta *e'f'* paralela á la línea de tierra, y otra recta cualquiera *ef*, son las proyecciones *vertical* y *horizontal* de una recta EF *paralela al plano horizontal*.

TERCER CASO. Puédese tambien suponer que las dos rectas dadas, *gk*, *g'k'*, son á la vez *paralelas á la línea de tier-*

ra. — En este caso, es facil conocer que los dos planos perpendiculares se encontrarán, siendo su interseccion una recta GK que deberá ser paralela á la línea de tierra LL'.

Cuarto caso. En fin, puede suponerse que una de las proyecciones, por ejemplo la *horizontal*, sea una recta *rs* perpendicular á la línea de tierra; entonces, la proyeccion *vertical* *r's'* debe ser tambien perpendicular á LL', y estar situada en la prolongacion de *rs*. — Porque el plano tirado por *rs* perpendicular al plano horizontal, siendo á la vez perpendicular al vertical (n.° 311), sirve al mismo tiempo de plano *proyectante* de la recta del espacio sobre los dos planos de proyeccion.

En este caso, la recta del espacio tendrá una posicion completamente *indeterminada* en el susodicho plano. — Podrá ser, por ejemplo, *perpendicular* al plano vertical, y entonces sus proyecciones serian *rs* y un punto de *r's'* [prolongacion de *rs*]; ó *vice-versa*.

Se ve pues que, fuera de este caso, queda completamente determinada una recta por medio de sus dos proyecciones.

Escolio. Toda recta EF (*fig.* 311), paralela al plano horizontal, se llama *línea horizontal*; — pero no es igualmente seguro decir que es *vertical* toda línea paralela al plano vertical, porque, segun el tercer caso de los anteriores, puede muy bien una recta ser paralela á ambos planos. Fig. 311.

Llámase pues *vertical* toda línea perpendicular al plano horizontal.

Todo plano tirado por una *vertical* se llama *plano vertical* por ser perpendicular al horizontal de proyeccion; y todo plano *paralelo al plano horizontal* de proyeccion, recibe como este el nombre de *plano horizontal*.

Tercer principio.

N.° 388. *Las proyecciones horizontales y verticales de dos rectas paralelas en el espacio son respectivamente paralelas.*

Porque si, desde un punto cualquiera de cada recta, se baja una perpendicular al plano horizontal, los planos verticales (n.° 386, *escol.*), tirados respectivamente por las dos rectas y por las dos perpendiculares, serán paralelos (n.° 322); y por lo tanto sus intersecciones con el plano horizontal, que no son otra cosa que las proyecciones horizontales de las dos rectas, serán paralelas entre sí (n.° 318).

Igual raciocinio hariamos respecto de las proyecciones verticales.

Escolio. Por las mismas razones, *las trazas horizontales y verticales de dos planos paralelos son respectivamente paralelas* (n.° 318).

Fig. 312. **Cuarto y último principio.** (*Fig.* 312.)

N.° 389. *Cuando una recta* AB *y un plano* RS *son perpendiculares entre sí, las proyecciones de la recta son respectivamente perpendiculares á las trazas del plano.*

Concibamos, por ejemplo, el plano *proyectante* de la recta AB sobre el plano horizontal MN; y sea *ab* su traza horizontal, que es á la vez la proyeccion horizontal de la recta. Sea ademas RT la traza horizontal del plano RS.

Esto supuesto, el plano *proyectante* AB*ba* es á la vez perpendicular al plano horizontal y al plano dado RS, puesto que pasa por una recta AB perpendicular á este (n.° 309); luego es perpendicular á su comun interseccion RT: recíprocamente, RT es perpendicular al plano proyectante, y por consiguiente lo es tambien á la recta *kab* que pasa por su pie *k* en este plano; luego *ab* es perpendicular á RT.

Del mismo modo se demostraria que la proyeccion vertical de la recta es perpendicular á la proyeccion vertical del plano.

Escolio. No es verdadero decir que si dos rectas son perpendiculares en el espacio, serán perpendiculares entre sí sus proyecciones en el plano horizontal ó en el vertical.

En general, segun la inclinacion del plano de las dos rectas perpendiculares entre sí, respecto del plano horizontal, el ángulo formado por sus proyecciones horizontales puede pasar por todas las magnitudes desde *cero* hasta *dos rectos.*

Llámase *proyeccion horizontal* de un ángulo del espacio, al ángulo formado por las proyecciones de sus lados en el plano horizontal, y *proyeccion vertical* de un ángulo, el ángulo formado por las proyecciones de sus lados en el plano vertical.

Pasemos ahora á los diversos problemas de Geometría descriptiva que reciben el nombre de PRELIMINARES.

Observacion importante.—Hasta aqui nos hemos valido de figuras en *relieve* para esplicar las definiciones y los principios fundamentales.—Pero en adelante nos reduciremos á trazar *la línea de tierra* para representar los dos planos de proyeccion, á los cuales en cierto modo distingue y separa. No se debe pues olvidar un instante lo dicho en el n.° 385, á saber: que la parte de la figura situada debajo de la línea de tierra, representa á la vez la parte *delantera* del plano horizontal y la inferior del vertical, mientras la otra parte de la figura representa á un tiempo mismo la parte *posterior* del plano horizontal y la *superior* del vertical.

Añadiremos que, para abreviar el discurso, representaremos casi siempre por [ab, $a'b'$] una recta del espacio, cuya proyeccion sean ab, $a'b'$; y entonces dicha recta estará designada en sí misma por AB.—Igualmente [a, a'], [b, b'],..., representarán á los puntos A, B,... del espacio.

Problema I. (*Fig.* 313.) Fig. 313.

N.° 390. ***Dadas las proyecciones de dos puntos, construir la distancia que media entre ellos.***

Sean LL′ la línea de tierra, [a, a'], [b, b'] los dos puntos dados A, B.—Observemos de antemano que las perpendiculares bajadas desde esos puntos al plano horizontal, cayendo en a, b, forman con AB, ab, un trapecio vertical ABab.—Ahora bien, si imaginamos que el plano de este trapecio gira al rededor de su traza horizontal ab, hasta rebatirse sobre el plano horizontal, las susodichas perpendiculares vendrán á caer en $a\mathrm{A} = ka'$, $b\mathrm{B} = gb'$ (n.° 386, *advert.*), conservando su perpendicularidad á ab: juntando pues los puntos A y B tendremos la recta AB, que será la distancia pedida.

Escolio. Si en el trapecio rebatido ABba, tiramos por el punto A, que es el mas cercano á la recta ab, una paralela AB″ á esta recta, formaremos un triángulo rectángulo AB″B, en el cual tendremos AB″ $= ab$, y BB″ igual á la diferencia de las distancias de los puntos A, B, al plano horizontal, cuyas distancias estan representadas en la figura por las línea $a'k$, $b'g$,

De aqui resulta otro medio de construir el problema propuesto:

1.° *Tírese* por el punto a' la recta $a'f$ paralela á la línea de tierra LL′;

2.° Partiendo desde el punto f, *colóquese* en la recta fa' prolongada, una distancia fa'' igual á ba;

3.° *Tírese* la $b'a''$.

Y se tendrá en ella la distancia pedida; porque, en virtud de la construccion, son iguales los triángulos $b'a''f$, y BAB''.

Advert. Esta construccion es mas facil que la primera, porque dándosenos por el enunciado las perpendiculares ka', gb', basta tirar por el punto a' una paralela á LL', mientras que en la primera construccion hay que tirar dos perpendiculares aA, bB.

Fig. 314. **Problema II.** (*Fig.* 314.)

N.° 391. ***Determinar las trazas horizontal y vertical de una recta*** [ab, a'b'], es decir, ***los puntos en que la recta*** **AB** ***atraviesa ó encuentra á cada uno de los planos de proyeccion.***

Analísis. El punto en que la recta atraviesa el plano horizontal se sirve á sí propio de proyeccion *horizontal* (n.° 386, *escol.* 2.°); y su proyeccion *vertical* está á la vez sobre la proyeccion vertical de la recta, y sobre la perpendicular bajada desde dicho punto á línea de de tierra LL'.

Igualmente, la traza vertical de la recta se sirve á sí propia de proyeccion *vertical*, y tiene por proyeccion *horizontal* el punto de encuentro de la proyeccion horizontal de la recta con la perpendicular bajada desde la traza á la línea de tierra.— Haremos pues la construccion siguiente:

Síntesis. 1.° — *Prolónguese* la recta $a'b'$ hasta encontrar en r' con LL', y *levántese* en el punto r' una perpendicular á LL', la cual encontrará á ab en un punto r, que será la traza horizontal de la recta AB.

2.° — *Prolónguese* la ab hasta encontrar en s con LL', y *levántese* en el punto s una perpendicular á LL': el punto s' en que esta perpendicular encuentra á $a'b'$, es la traza vertical de AB.

Advert. Si la recta AB tuviera la posicion indicada por

Fig. 315. [ab, $a'b'$] (*fig.* 315), la construccion sería lo mismo; pero entonces el punto r estaria situado *detras* del plano vertical, y el punto s' encima del plano horizontal (*véase* la *advert.* al número 385).

Escolio. Puede haber necesidad de conocer el *ángulo* que forma la recta AB en el plano horizontal, es decir, con su proyeccion horizontal ab (n.° 326). — Para esto basta observar que en el espacio, la recta que junta los puntos r, s', es decir, la recta AB, forma con rs y la perpendicular ss' un triángulo rectángulo rss'. Si pues hacemos girar este triángulo al rededor de *rs* para rebatirle sobre el plano horizontal, la recta *ss'* vendrá á tomar una posicion perpendicular á *rs*, tal como *ss''* [$=$ *ss'*]; y juntando los puntos *r*, *s''*, tendremos el ángulo *srs''* que será el ángulo pedido.

Esta construccion conviene á entrambas figuras 314 y 315.

Lo mismo se obtendria el ángulo que la recta AB formada con el plano vertical.

PROBLEMA III.

N.º 392. *Tirar por un punto dado* [c, c'] *una recta paralela á otra dada* [ab, a'b'].

Basta (n.º 388, *tercer principio*) tirar por las proyecciones del punto dado *c*, *c'*, rectas respectivamente paralelas á las *ab*, *a'b'*; y asi se obtienen las proyecciones de la recta pedida.

Advert. No ofreciendo dificultad ninguna la construccion de este dibujo, la proponemos como ejercicio, lo mismo que la del problema siguiente.

PROBLEMA IV.

N.º 393. *Construir las trazas de un plano que pase por tres puntos dados* [a, a'], [b, b'], [c, c'].

Debiendo estar situados en el plano buscado los puntos A, B, C, sucederá lo mismo con las rectas AB, AC, BC, que juntan dichos puntos de dos en dos: determinando pues (n.º 391) las trazas horizontales y verticales de estas rectas, se tendrán puntos pertenecientes á las trazas horizontal y vertical pedidas, y que ya entonces podrán construirse facilmente, pues bastará juntar de dos en dos estos últimos puntos.

Advert. Esta construccion puede comprobarse de varios modos, en particular observando que

Las dos trazas del plano deben encontrarse en un mismo punto de la línea de tierra.

ESCOLIO. De un modo análogo se resolverán las tres cuestiones siguientes:

Hallar las trazas de un plano que pase por un punto [c, c'] *y por una recta* [ab, a'b'], *ó por dos rectas que se cortan* [ab, a'b'], [ac, a'c'], ó en fin, *por dos rectas paralelas* [ab, a'b'], [cd, c'd'].

En estos dos últimos casos, las trazas de la recta pertenecen evidentemente á las trazas del plano buscado.

Fig. 316.

PROBLEMA V. (*Fig.* 316.)

N.° 394. *Por un punto dado* [a, a′], *tirar un plano paralelo á otro plano dado* NMN′.

Hemos visto ya (n.° 388, *escol.*) que las trazas de los dos planos deben ser respectivamente paralelas: basta pues obtener un solo punto de cada una de las trazas del plano buscado.

Para esto, si concebimos por el punto dado una línea paralela á la traza horizontal del plano pedido, que supondremos hallado, deberá estar por completo situada en este plano (número 313, *corol* 1.°); pero como entonces será paralela tambien á la traza MN (n.° 34, 3.°), cuyas proyecciones horizontal y vertical son la misma MN, y la línea de tierra LL′, resulta que tirando por los puntos *a* y *a′*, las rectas *ab*, *a′b′*, respectivamente paralelas á MN y á LL′, tendremos las proyecciones de la paralela susodicha, que es en el espacio una recta *horizontal* (n.° 388, *escol.*). Determinando ahora (n.° 391) la traza vertical *b′* de la recta [*ab*, *a′b′*], y tirando por el punto *b′* una línea *b′*P paralela á MN′, tendremos la traza vertical del plano buscado.

Igualmente, si por el punto [*a*, *a′*], tiramos una paralela á la traza vertical del plano buscado, tendrá por proyecciones la recta *a′c′* paralela á N′M y la recta *ac* paralela á LL′. Buscando en seguida el punto *c* en que la recta [*ac*, *a′c′*] encuentra al plano horizontal, y tirando por el punto hallado una recta CP paralela á MN, tendremos la traza herizontal del plano pedido.

Advert. Si está hecha con exactitud la construccion, deben las rectas *b′*P y *c*P, ó Q′P y QP, cortarse en un mismo punto P de la línea de tierra.

Fig. 317.

PROBLEMA VI. (*Fig.* 317.)

N.° 395. *Dados los dos planos* NMN′, QPQ′, *construir las proyecciones de su comun interseccion.*

Puesto que MN, PQ, son respectivamente las trazas horizontales de los planos dados, el punto *a* en que aquellas se cortan, es necesariamente un punto de la interseccion de estos; y el punto cabalmente en que su línea de interseccion atraviesa el plano horizontal. Bajando pues una perpendicular *aa′* á la línea de tierra desde dicho punto, tendremos en a' su proyeccion vertical.

Igualmente, siendo el punto b', en que se cortan las trazas verticales de los planos, la traza vertical de su interseccion. Si bajamos la perpendicular $b'b$ á la línea de tierra desde el punto b', tendremos en b la proyeccion horizontal de este.

Luego las rectas de union, ab, $a'b'$, son las proyecciones *horizontal* y *vertical* de comun interseccion de los dos planos.

N.° 396. Escolio.—Esta construccion supone que se conocen de posicion en la figura los puntos a, b'. Pero sucede á veces que las trazas de los planos no puedan encontrarse sino á larguísima distancia, como lo indica la *fig.* 318. Fig. 318.

En este caso hay que valerse de distinto método.

Tómese en la línea de tierra LL′ un punto p, mucho mas cercano á M que el punto P, y tírense las rectas pq, pq', respectivamente paralelas á PQ, PQ′; cuyas paralelas serán las trazas de un nuevo plano paralelo á QPQ′; y la interseccion del nuevo plano con el plano NMN′ debe ser paralela á la interseccion buscada (n.° 318).

Esto supuesto, podemos como en el número precedente determinar las proyecciones ab, $a'b'$, de la interseccion de los planos NMN′, qpq', á las cuales deben ser paralelas las proyecciones buscadas (n.° 388), por cuya razon bastará obtener un punto de cada una de estas últimas.

Al efecto, supongamos por un instante que A, B′, sean los puntos de concurso de las trazas MN y PQ, MN′ y PQ′, que B, A′, sean dos puntos de las proyecciones buscadas, que se encuentran situados en la misma línea de tierra; y tiremos las rectas AB, A′B′.—Las dos parejas de triángulos semejantes, AMP y aMp, AMB y aMb, dan las dos proporciones

$$AM : aM :: MP : Mp,$$
$$AM : aM :: MB : Mb;$$

de donde, á causa de la razon comun

$$Mp : MP :: Mb : MB.$$

Conociéndose aqui los tres términos primeros, es muy facil determinar la posicion del punto B (n.° 207); y tirando por el punto B una paralela á ba, tendremos la proyeccion horizontal de la comun interseccion.

Igualmente, construyendo el cuarto término de la proporcion

$$Mp : MP :: Ma' : MA',$$

y tirando por el punto A′ una paralela á $a'b'$, tendremos la proyeccion vertical.

Advert. Podriamos dar aqui un medio directo, fundado solo en los principios de la Geometría descriptiva, para obtener un punto particular de la interseccion; pero su esposicion exigiria demasiados pormenores: baste decir que se logra imaginando planos paralelos al horizontal ó al vertical de proyeccion.

Fig. 319. **Problema VII.** (*Fig.* 319.)

N.° 397. *Desde un punto* [a, a′] *dado fuera de un plano* NMN′, *tirar á este una perpendicular, y construir la longitud de esta*, es decir, *la distancia que hay desde el punto dado al punto en que encuentra la perpendicular al plano.*

En virtud del cuarto principio (n.° 389), las proyecciones de la recta buscada deben ser respectivamente perpendiculares á las trazas del plano dado; debiendo ademas pasar, una por el punto a y otra por el punto a'; luego las rectas ab, $a'b'$, tiradas perpendicularmente á MN, MN′, desde dichos puntos, son las proyecciones pedidas.

La segunda parte de la cuestion quedará reducida al problema del número 390, si pudieramos determinar las proyecciones del punto en que la perpendicular encuentra al plano.

Para fijar la posicion de este punto, concibamos tirado por la recta el plano que ha servido para proyectarla sobre el plano horizontal: — Las trazas de este plano *proyectante* son, desde luego, la recta abs, proyeccion horizontal de la perpendicular, y la recta ss' perpendicular á la línea de tierra (n.° 391). Este mismo plano corta al plano dado NMN′ en una recta que contiene el pie de la perpendícular; por consiguiente, todo se reduce á buscar las proyecciones de la comun interseccion de los planos NMN′ y ass'. La horizontal es desde luego as, y la vertical se obtiene bajando (n.° 395) desde el punto p una perpendicular pp' á la línea de tierra, y juntando el punto p' con el punto s'.

Respecto de la proyeccion vertical del punto buscado, como debe á la vez estar en $a'b'$ y en $p's'$, se encuentra en la interseccion k' de las dos rectas. Esto supuesto, bajemos desde el punto k' una perpendicular á la línea de tierra, y prolonguémosla hasta cortar en k á la recta ab, que representa á un tiempo la proyeccion horizontal de la perpendicular, y la proyeccion horizontal de la interseccion de los planos NMN', ass', con lo cual tendremos la proyeccion horizontal del pie de la perpendicular.

Conociendo las proyecciones [a, a'], [k, k'], de los puntos, se obtendrá su distancia por el segundo medio de construccion indicado en el número 395; lo que dará finalmente $a'k''$ por longitud de la perpendicular.

Advert. Como medio de comprobacion puede imaginarse tirado el plano que ha servido para proyectar la perpendicular sobre el plano vertical.

—Las trazas de este plano son $a'b'r'$ y $r'r$ [perpendicular á LL'].

—Las proyecciones de la interseccion del nuevo plano proyectante con el plano dado NMN' son $a'r'$ y rq'; el punto de encuentro de rq' con ab debe ser precisamente el punto k ya determinado, si la construccion se ha hecho exactamente.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 320.) Fig. 320.

N.° 398. Recíprocamente: — *Por un punto dado* [a, a'], *tirar un plano perpendicular á una recta dada* [bc, $b'c'$].

Puesto que las trazas del plano buscado deben ser respectivamente perpendiculares á las rectas dadas bc, $b'c'$, basta conocer un punto de cada traza; y para lograrlo podemos emplear una construccion análoga á la del número 394. — Por el punto dado [a, a'] y en el plano pedido que supondremos determinado, imaginemos una *horizontal*, es decir, una paralela á la traza horizontal del plano: — las proyecciones de esta paralela serán una recta $a'd'$ paralela á LL', y otra ad paralela á la traza horizontal del plano buscado, y por consiguiente perpendicular á la proyeccion horizontal bc de la recta dada.

Determinando en seguida (n.° 391) el punto d' en que esta recta atraviesa el plano vertical, y tirando por d' una perpendicular Q'd'P á la recta $b'c'$, tendremos la traza vertical del plano pedido.

Tiremos del mismo modo por el punto [a, a'] una paralela [af, $a'f'$] á la traza vertical del plano, y determinemos el punto f en que esta paralela encuentra al plano horizontal:

entonces, bajando desde el punto f una recta QfP perpendicular á ab, tendremos la traza horizontal del plano pedido. — Si la construccion está bien hecha, deben coincidir en un punto P de la línea de tierra las dos trazas $Q'd'$, Qf.

Advert. Conocidas asi las trazas del plano y las proyecciones de la recta, puede determinarse, como en el problema anterior, el punto de encuentro de esta en aquel.

Escolio 1.° A la cuestion que acabamos de resolver, se enlaza inmediatamente esta otra: — *Tirar desde un punto dado* [a, a'] *fuera de una recta* [bc, b'c'] *una perpendicular á esta recta.*

Empiécese por *construir las trazas* de un plano que pase por el punto [a, a'], y sea perpendicular á la recta [bc, $b'c'$]. — *Determínese* luego el punto de encuentro del plano y la recta, y *júntense* las proyecciones de este punto con las proyecciones del punto dado: — las líneas resultantes serán las proyecciones de la perpendicular pedida.

Escolio 2.° Mientras que el punto [a, a'] está situado fuera de la recta [ab, $a'b'$], el último problema es susceptible de solo *una solucion.* — Pero si el punto se halla colocado en la recta misma, el problema es *indeterminado*, porque en efecto el plano construido es (n.° 299) el lugar geométrico de todas las perpendiculares tiradas á la recta por el punto dado. — Tambien sería indeterminado en el caso general, si no dijera *esplícitamente* el enunciado del problema que deben encontrarse las dos rectas.

Fig. 321.

Problema IX. (*Fig.* 321).

N.° 399. *Construir el ángulo de dos rectas dadas por sus proyecciones.*

Supondremos aqui que las dos rectas se cortan, pues si se cruzaran en el espacio sin encontrarse, sería necesario (número 325, *escol.* 1.°), para obtener el ángulo que formaran, *tirar* por un punto de una de ellas una paralela á la otra, y *determinar* el ángulo que forma la paralela con la primera.

Ademas, las proyecciones del punto comun deben estar situadas en una misma perpendicular á la línea de tierra.

Sean pues [ab, $a'b'$], [ac, $a'c'$], las proyecciones de las dos rectas dadas. — Determinemos ante todo (n.° 391) sus trazas horizontales b, c, y tiremos la recta bc. — Observaremos ahora que el punto A y los puntos b, c, forman en el espacio un triángulo cuyo ángulo del vértice A es el ángulo pedido; y que conoceremos este ángulo, si, haciendo girar el plano del triángulo A*bc* al rededor de su traza horizontal *bc* hasta rebatirle sobre el plano horizontal, podemos acertar la posicion del punto A en el plano rebatido.

Para esto, bájese desde el punto *a*, proyeccion horizontal del vértice A, una recta *ak* perpendicular á *bc*, y concibamos unido el punto *k* con el vértice A del espacio: la línea de union A*k* debe ser (n.° 300) perpendicular á *bc*, y es por consiguiente la altura del triángulo A*bc*; altura que puede construirse facilmente, porque es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos á *ak* y á A*a*=*a'h* (n.° 388, *advert.*). Luego si trasladamos á *ak* sobre *h*L desde *h* hasta *g*, y tiramos la recta *a'g*, será esta la altura A*k*.

Prolonguemos ahora indefinidamente la recta *ak*, y tomemos la *a'g* desde *k* hácia A; y este último punto representará el vértice del triángulo en el plano rebatido.

Tirando en fin las A*b*, A*c*, tendremos en *b*A*c* el ángulo que buscábamos.

Advert. Tendriamos tambien el triángulo A*bc*, en el plano rebatido, construyendo (n.° 390) las longitudes de las rectas A*b*, A*c*, cuyas proyecciones son *ab*, *a'b'*, y *ac*, *a'c'*, porque entonces conoceriamos los tres lados del triángulo.

Pero esta construccion es algo mas complicada que la anterior.

COROLARIO. Para — *Construir el ángulo de una recta con un plano* [que no es mas (n.° 326) que el ángulo formado por la recta con su proyeccion en el plano];

Bájese desde un punto cualquiera de la recta (n.° 397) una perpendicular al plano; *determínese* el ángulo que forma esta perpendicular con la recta dada; — y se tendrá el *complemento* del ángulo buscado, y por consiguiente este ángulo mismo.

ESCOLIO. Las proyecciones de la *bisectriz* del ángulo de las dos rectas pueden obtenerse facilmente, supuesta la construccion del teorema principal.

Determínese primero la bisectriz A*m* del ángulo *b*A*c* rebatido, y prolónguese hasta su encuentro en *m* con *bc*, traza horizontal del plano que contiene al ángulo. — *Júntese* despues el punto *m* con el punto A; — y se tendrá la proyeccion horizontal *am* de la bisectriz.

Proyéctese *m* en *m'* sobre la línea de tierra, *y tírese* la *a'm'*; — con esto solo se tendrá la proyeccion vertical.

Fig. 322. PROBLEMA X. (*Fig.* 322.)

N.º 400. *Construir el ángulo de dos planos* NMN′, QPQ′.

1.ª SOLUCION. Desde un punto cualquiera del espacion *bájense* rectas perpendiculares á los dos planos (n.º 397): — *determínese* el ángulo de las dos perpendiculares y se tendrá el ángulo pedido ó su suplemento (n.º 325, *escol* 1.º).

Pero puede emplearse una construccion mas sencilla.

2.ª SOLUCION. Determínese de antemano (n.º 395) la proyeccion horizontal *ab* de su interseccion, que no es mas que la recta de union del punto *a* con el punto *b*′ [suponiendo en su posicion verdadera á los planos de proyeccion]. Concíbase despues en un punto cualquiera O de la interseccion un plano que le sea perpendicular. — La traza horizontal de este plano será una recta *cd* perpendicular á la proyeccion *ab* (n.º 389); y la susodicha *cd* podrá ser considerada como base de un triángulo O*cd*, cuyo ángulo en el vértice O será el ángulo pedido. Tratemos pues de obtener este triángulo en su plano rebatido sobre el plano horizontal.

Para esto observemos que el plano cuya traza es *cd*, y el plano tirado verticalmente en la direccion *ab*, se cortan, en el espacio, segun una recta O*i* que es á la vez perpendicular á la interseccion de los dos planos dados [por hallarse en el plano O*cd* perpendicular á dicha interseccion], y á la recta *cd*, porque *cd* es perpendicular al plano proyectante. La recta O*i* es por lo tanto la altura del triángulo O*cd*. Para obtener su longitud, imagínese que el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es *ab*′, y cuyos catetos son *ab*, *bb*′, gira al rededor de *bb*′ para tomar posicion rebatiéndose sobre el plano horizontal. En este movimiento, los puntos *a*, *i*, describirán en torno al punto *b* arcos de círculos, y vendrán á situarse en *a*′, *i*′; la recta *b*′*a* estará entonces representada por *b*′*a*′, y la altura buscada por una perpendicular *i*′*o*′ bajada sobre *b*′*a*′. — Construida esta perpendicular no habrá mas que transportarla sobre *ia* de *i* á O; y tirando las *c*O, *d*O, el ángulo *c*O*d* será el ángulo pedido.

ESCOLIO 1.º Si las trazas de los dos planos dados tuvieran
Fig. 318. las direcciones indicadas por la *figura* 318, se recurriria al plano ausiliar *qpq*′; y tendriamos reducida la construccion á la del caso precedente.

ESCOLIO 2.° Dividiendo en dos partes iguales el ángulo *cOd*, y juntando el punto *a* con el punto *q* en que la bisectriz encuentra á la traza horizontal del triángulo *Ocd*, se obtiene la traza horizontal del *plano bisector* del ángulo de los dos planos. — Para obtener la traza vertical, basta juntar el punto *b'* con el punto *k* en que la traza *ag* encuentra á LL'.

Asi, *ak* y *b'k* son las trazas del susodicho plano bisector.

PROBLEMA XI. (*Fig.* 323.) Fig. 323.

N.° 401. *Construir los ángulos que forma un plano* NMN' *con el plano horizontal y con el vertical.*

Este problema, que en rigor es solo un caso del precedente, merece particular atencion por sus numerosas aplicaciones.

Por un punto cualquiera A de MN, tiremos un plano perpendicular á esta recta: — este plano corta al horizontal y al dado en dos rectas perpendiculares á MN (n.° 299), que forman entre sí el primero de los ángulos pedidos. Ahora bien, la traza horizontal de este plano es AB perpendicular á MN; su traza vertical es BC perpendicular á LL', y su interseccion con el plano dado es una recta que atraviesa á los dos planos de proyeccion, al uno en el punto A, y al otro en el punto C, encuentro de las trazas MN', BC.

Hagamos ahora girar el triángulo ABC, rectángulo en B, al rededor de BC como charnela, hasta rebatirle sobre el plano vertical de proyeccion: — en este movimiento, BA viene á caer sobre LL', y toma la posicion BA'. Juntando entonces el punto C con el punto A', obtenemos el ángulo CA'B, que es el que forma el plano dado con el horizontal.

El otro ángulo se obtiene tirando por un punto cualquiera D de MN', la recta DE perpendicular á MN', despues la EF perpendicular á LL', rebatiendo en seguida la ED sobre LL' desde E hasta D', y tirando finalmente la FD': — el ángulo FD'E es el que forma el plano dado con el plano vertical.

Advert. Tambien se habria podido rebatir el primer ángulo al rededor de AB sobre el plano horizontal, y el segundo al rededor de DE sobre el plano vertical.

ESCOLIO. Si se tira la bisectriz A'G del ángulo CA'B, y se junta el punto M con el punto G, es facil reconocer que MG y MN son las trazas del *plano bisector* del ángulo formado por el plano dado con el plano horizontal.

Fig. 324 y 325.

PROBLEMA XII. (*Fig.* 324 y 325.)

N.° 402. ***Construir las proyecciones y la longitud de la distancia mas corta entre dos rectas.***

Espusimos en el número 324 dos modos de fijar la posicion de la perpendicular comun á dos rectas, llamada tambien su distancia mas corta: aqui no deberemos tratar sino de aplicar á ambos los principios de la *Geometría descriptiva*; pero nos reduciremos á desenvolver el segundo medio como mas sencillo.

Volvamos por el pronto á la figura en relieve ó perspectiva (*fig.* 266), suprimiendo las construcciones que sirvieron para la demostracion.

Fig. 266.

Fig. 324. Sean AB, CD (*fig.* 324), las dos rectas dadas:

1.° Por un punto cualquiera E tomado en la CD, *tiremos* la EF paralela á AB;

2.° *Hagamos pasar* un plano MN por las dos rectas CD, EF; este plano resulta paralelo á la recta AB;

3.° Desde un punto cualquiera G de AB, *bajemos* la GK perpendicular al plano paralelo, y *determinemos* en este el pie K de ella;

4.° *Tiremos* por el punto K una recta KI paralela á EF ó á AB; esta recta irá á encontrarse con CD en un punto I;

5.° Desde el punto I *tiremos* la IH paralela á GH ó perpendicular al plano paralelo MN.

La recta IH es la distancia mas corta.

Apliquemos ahora los principios del método de las proyecciones. — Hé aqui los pormenores de la construccion:

Fig. 325. Sean LL′ (*fig.* 325) la línea de tierra, y [*ab*, *a′b′*], [*cd*, *c′d′*], las proyecciones de las dos rectas dadas AB, CD.

1.° — *ef*, *e′f′*, respectivamente paralelas á *ab*, *a′b′*, y tiradas por las proyecciones *e*, *e′*, de un mismo punto de la recta [*cd*, *c′d′*], son las proyecciones de la recta EF paralela á AB;

2.° — NMN′ es el plano paralelo á AB, tirado por las rectas [*cd*, *c′d′*], [*ef*, *e′f′*] (*véase* el escolio del número 393);

3.°—*gkl*, *g′k′l′*, tiradas perpendicularmente á las trazas MN, MN′, del plano paralelo, son las proyecciones de GK [los puntos *k*, *k′*, proyecciones del pie de esta perpendicular, deben determinarse por el problema del número 397];

4.° — ki, $k'i'$, son las proyecciones de la recta KI tirada por el punto k paralelamente á AB;

5.° — ih, $i'h'$, tiradas por los puntos i, i', paralelamente á gk, $g'k'$, ó perpendicularmente á las trazas MN, MN′, y prolongadas hasta su encuentro con ab, $a'b'$, son las proyecciones de la distancia menor pedida.

6.°—En fin, conociendo los estremos [i, i'], [h, h'] de esta distancia, puede construirse su longitud $i'h''$ por medio del problema del número 390.

Advert. Esta construccion, que en rigor no tiene ninguna dificultad, exige mucho cuidado, á causa del gran número de líneas que hay que trazar. Puede sin embargo comprobarse de varios modos que se deducen del *primer principio* (n.° 386).

Se ve en fin que este problema no es mas que la aplicacion de algunos de los anteriores.

Propondremos ademas de él como ejercicios los siguientes:

1.° *Determinar la interseccion comun de tres planos cuyas trazas se dan*;

2.° *Dados un punto y dos rectas por sus proyecciones, tirar por el punto otra recta que encuentre á las dos primeras.*

Estos dos problemas son aplicaciones del número 395, y son susceptibles de discusion.

§. II. *Método de rebatimiento.—Problemas sobre los ángulos triedros.*

N.° 403. *Introduccion.*—Sucede muchas veces que para resolver un problema de *Geometría del espacio*, hay que ejecutar ciertas construcciones en un plano dado por sus trazas; y para esto es necesario, —1.°—*rebatir* el plano susodicho sobre uno de los planos de proyeccion, por ejemplo el horizontal [asi se ha hecho en los problemas de los números 399 y 400]; — 2.° — *fijar* en el plano rebatido *la posicion* de ciertos puntos ó ciertas líneas que deben hallarse situadas en él con arreglo al enunciado, y cuyas proyecciones se suponen conocidas; — 3.° — *ejecutar* en el mismo plano [confundido interinamente con el plano horizontal] *las construcciones* prescritas por el enunciado; — 4.° — en fin, *determinar* las proyecciones de los nuevos puntos y líneas hallados de esa manera. — Tal es el objeto del método conocido con el nombre de

Método de rebatimiento, cuyos principios fundamentales se reducen á las tres cuestiones siguientes.

Fig. 326.

Problema I. (*Fig.* 326.)

N.° 404. *Dado por sus trazas un plano* NMN′, *rebatirle sobre uno de los planos de proyeccion*, por ejemplo, *sobre el horizontal.*

Consideremos en la traza vertical MN′ un punto cualquiera *a′* cuya proyeccion horizontal es *a*; y por este punto concibamos un plano perpendicular á la traza horizontal MN: — la traza vertical del nuevo plano es una recta *a′a* perpendicular á la línea de tierra (n.° 384), y su traza horizontal otra recta *ap* perpendicular á MN. — Su interseccion con el plano NMN′ será una recta *pa′* [en el espacio] perpendicular tambien á MN.

Esto supuesto, hagamos girar al plano dado al rededor de su traza horizontal MN: — en este movimiento, el punto *a′* no saldrá del plano *a′pa*, y rebatirá en la prolongacion *p*A de *pa*, en un punto A cuya distancia al punto fijo M estará representada en magnitud por M*a′*. — Por consiguiente, si desde el punto M como centro, con el radio M*a′*, describimos un arco de círculo que vaya á cortar á la recta *a*A en el punto A, y juntamos este punto con el punto M, la recta MAN″ representará el *rebatimiento* de la traza vertical MN′ sobre el plano horizontal. — Luego NMN″ es el plano dado, despues rebatido sobre el plano horizontal.

Advert. Describiendo desde el punto *a* como centro, con *ap* por radio, un arco de círculo que corte á LL′ en un punto *p′*, y tirando la recta *a′p′*, el ángulo *a′p′a* será el ángulo que forma el plano dado con el plano horizontal (n.° 401). — Muchas veces se necesita de él en las aplicaciones del método que esponemos.

Fig. 326.

Problema II. (*Fig.* 326.)

N.° 405. *Representando un punto* o *la proyeccion horizontal de un punto* O *situado en un plano* NMN′, — 1.° — *Hallar su proyeccion vertical* o′; — 2.° — *fijar la posicion del punto* O *en el plano* NMN′ *supuesto rebatido sobre el plano horizontal*; — y recíprocamente, *dado de posicion un punto* O *en un plano rebatido, hallar sus proyecciones.*

Observemos primero que debiendo el punto O estar situado en el plano dado, su proyeccion horizontal *o* fija completamente su posicion en el espacio; pues si por el punto *o* se levanta una vertical (n.° 387, *escol.*), irá esta recta á atravesar el plano dado precisamente en un punto que no puede ser otro que el punto O.

Ahora, para resolver la parte primera de la cuestion, bajemos desde el punto *o* una perpendicular indefinida *oro′* sobre la línea de tierra LL′: la proyeccion vertical *o′* del punto O debe estar colocada en esta perpendicular (n.° 386), y solo falta para conocerle determinar la distancia *ro′* desde la línea de tierra al punto *o′*.

Dos medios tenemos para conseguirlo.

Primer medio.—Bajemos la *oq* perpendicular á MN, y juntemos el punto *q* con el punto O del espacio: asi formamos un triángulo rectángulo O*qo*, cuyo cateto *qo* conocemos, y tambien el ángulo agudo O*qo*, porque siendo *q*O perpendicular á MN (n.° 401), este ángulo mide el ángulo del plano dado con el plano horizontal, ángulo ya construido en el problema precedente, é igual á *a′p′a*.

Rebatiendo este triángulo al rededor de *oq* como charnela, tirando por el punto *o* una perpendicular *o*O′ á *oq*, y formando despues en el punto *q* el ángulo *oq*O′ igual al ángulo *a′p′a*, tendremos en *o*O′*q* el triángulo rebatido; y *o*O′ representa entonces la distancia del punto O al plano horizontal. Luego si colocamos la *o*O′ desde *r* hasta *o′*, el punto *o′* será la proyeccion vertical pedida.

Segundo medio. — Concibamos por el punto O del espacio una horizontal en el plano dado: — la proyeccion horizontal de esta recta es una línea *ob* paralela á la traza MN (n.° 294), y como la traza vertical de la misma debe hallarse en la traza MN′, y en la perpendicular á LL′ tirada por el punto *b*, resulta que dicha traza vertical se hallará en *b′*; luego la proyeccion vertical de la recta horizontal es una paralela *b′o′* á LL′ tirada por el punto *b′*; y por consiguiente el punto *o′*, en que esta paralela encuentra á la perpendicular indefinida *oro′*, es la proyeccion vertical buscada.

Advert. Este segundo medio suele ser generalmente mas sencillo.

Pasemos á la segunda parte de la cuestion.

Volvamos al triángulo O′*qo* á su posicion vertical O*qo*, y observemos que, en el movimiento del plano dado al rededor de MN para rebatirse sobre el plano horizontal, la recta qO, perpendicular á MN, debe rebatirse en la prolongacion de oq en un punto O cuya distancia al punto q es igual á la recta qO' ya construida. Luego si trazamos desde el punto q como centro, con un radio igual á qO', un arco de círculo que venga á cortar á oq prolongada en un punto O, este punto será el rebatimiento de aquel, cuyas proyecciones son o y o'.

De otro modo: — Si de el punto M como centro, con un radio igual á Mb', trazamos un arco que corte á MN'' (*problema precedente*) en un punto B, y por este punto tiramos una paralela á MN, esta paralela representará la horizontal que antes tirábamos por el punto O. Luego el encuentro de ella con oq dará tambien la posicion del punto cuyas proyecciones son o, o'.

Recíprocamente: — Dado de posicion el punto O en el plano rebatido, NMN'', para obtener sus proyecciones cuando el plano vuelva á su posicion primitiva NMN', basta, — 1.° — *bajar* la Oq perpendicular á MN, prolongándola indefinidamente; — 2.° — *hacer* en el punto q un ángulo oqO' igual al ángulo dado $a'p'a$; — 3.° — *tomar* $qO' = qO$, y *bajar* la $O'o$ perpendicular á qo, lo cual determina la proyeccion horizontal o; — 4.° — en fin, *bajar* la oro' perpendicular á LL', y *tomar* $ro' = oO'$, con lo cual el punto o' es la proyeccion vertical.

O bien de otro modo: — 1.° — *Tírese* la Oq perpendicular á MN, y la OB paralela á la misma traza MN; — 2.° — *tómese* la distancia MB desde M hasta b' en la traza MN', y *tírese* la recta indefinida $b'o'$ paralela á LL'; — 3.° — *bájese* la $b'b$ perpendicular á LL', y por el punto b *tírese* la bo paralela á MN.

El punto o, en que la bo encuentra á la Oq prolongada, es la proyeccion horizontal del punto O; y el punto o', en que la perpendicular oo' encuentra á $b'o'$, es su proyeccion vertical.

Las construcciones que acabamos de esponer para la recíproca de esta cuestion, son consecuencias de la marcha seguida en la proposicion directa.

Fig. 327.

Problema III. (*Fig.* 327.)

N.° 406. *Dada la proyeccion horizontal* ab *de una recta situada en un plano* NMN', — 1.° — *Construir su proyeccion vertical*; — 2.° — *determinar su posicion en el plano* *rebatido*; — y recíprocamente, — *Dada una recta en el plano rebatido, hallar sus proyecciones cuando vuelva el plano á su posicion verdadera.*

Aplicando á dos cualesquiera puntos de la recta la construccion del problema precedente, se obtendria una solucion de la cuestion propuesta; pero puede conseguirse de un modo mas sencillo.

Por la proyeccion *ab*, concibamos un plano vertical: — la traza horizontal de este plano es *ab*, y la traza vertical *bb'* perpendicular á LL'. Luego, determinando, como en el número 395, la proyeccion vertical de la interseccion de los dos planos NMN', *abb'*, se tendrá la proyeccion vertical de la recta.

Respecto de la segunda parte de la cuestion, obsérvese que el punto *a* en que la recta atraviesa el plano horizontal, no cambia de posicion en el movimiento del plano al rededor de MN. Ademas, el punto *b'* en que atraviesa al plano vertical, viene á tomar la posicion B, punto que se obtiene colocando la distancia M*b'* desde M hasta B sobre MN'', ó prolongando la perpendicular bajada desde el punto *b* sobre MN, hasta encontrar á MN''. — Luego *a*B representa á la recta dada rebatida en el plano horizontal.

Recíprocamente: — Hallándose situada de cualquier modo una recta CD en el plano rebatido, para obtener sus proyecciones cuando el plano vuelve á su posicion primitiva, observaremos que el punto D en que la recta CD encuentra á MN', no cambia de posicion: por consiguiente, es un punto de la proyeccion horizontal de la recta, y el pie *d'* de la perpendicular bajada sobre MN desde el punto D, será la proyeccion vertical de este punto. — Tomando despues en MN' una distancia M*c'* igual á MC, bajando la *c'c* perpendicular á LL' y tirando las rectas *c*D, *c'd'*, se obtienen las proyecciones horizontal y vertical de la recta.

Apliquemos estos principios á nuevos problemas.

Problema IV.

N.° 407. *Dados por sus proyecciones un punto y una recta, tirar por el punto otra recta que encuentre á la primera y forme con ella un ángulo dado.*

Empiécese por hacer pasar un plano por el punto y por la recta dados (n.° 393, *escol.*), despues *se rebate* ese plano al rededor de su traza horizontal (n.° 404), y con él el punto y la recta (números 405, 406). — *Ejecútese* despues en el plano rebatido la construccion indicada por el enunciado, y se *obtendrán dos* rectas por repuesta de la cuestion (n.º 155).— Finalmente, *determínense* las proyecciones de estas rectas.

Advert. Se puede, como caso particular, — *Hallar* por ese medio *las proyecciones y la longitud de la perpendicular bajada desde un punto dado á una recta tambien dada,* — problema que ya hemos resuelto de otro modo en el número 398, *escol.* 1.º

Problema V.

N.º 408. *Dados tres puntos por sus proyecciones, hallar el centro y el radio de un círculo que pase por ellos.*

1.º — *Hágase pasar* un plano por los tres puntos dados (n.º 398), y *rebátase* este plano al rededor de su traza horizontal (n.º 404); — 2.º — *determínese* en el plano rebatido la posicion de los tres puntos dados (n.º 405); — 3.º — *constrúyase* (n.º 151, 2.º) *el centro* del círculo que pase por los tres puntos asi rebatidos; — 4.º — *determínense* las proyecciones del centro (n.º 405, *recíp.*), y *júntense* sus proyecciones con las respectivas proyecciones de uno de los puntos dados.

De este modo quedan determinados de posicion y magnitud el centro y el radio del círculo pedido; — por consiguiente queda resuelto el problema.

Advert. El radio estaba ya determinado por la construccion hecha en el plano rebatido.

Escolio. Este problema y el anterior son escelentes ejercicios del método de rebatimiento. — Aconsejamos ademas á los estudiosos que *determinen* (n.º 405) las proyecciones de una serie de puntos de la circunferencia, suponiéndola trazada en el plano rebatido. — Uniendo despues unas á otras las diversas proyecciones horizontales, y lo mismo respectivamente las verticales de los diferentes puntos, por medio de líneas *contínuas*, se obtienen dos curvas *cerradas* y *reentrantes* que son las proyecciones horizontal y vertical del círculo situado en el espacio.

Se demuestra en *Geometría analítica* que esas curvas son elipses (n.º 49, *Apénd.*).

Aplicacion del método de rebatimiento á la construccion de ángulos triedros.

Proposicion preliminar.

N.º 409. Ya hemos visto que, en todo ángulo triedro, cualquiera de las tres caras es menor que la suma de las otras dos (n.º 331), y que su suma vale menos de 4 *rectos* (n.º 332).

Ahora digo que, recíprocamente, — *con tres ángulos rectilíneos, el mayor de los cuales valga menos que la suma de los otros dos, y juntos valgan menos de 4 rectos, siempre es posible formar un ángulo triedro.*

Sean tres ángulos consecutivos CSA, ASB, BSC′ (*fig.* 328), situados en un mismo plano horizontal, y tales que tengamos Fig. 328.

$$\text{ASB} > \text{ASC}, \quad \text{ASB} > \text{BSC}',$$

pero

$$\text{ASB} > \text{ASC} + \text{BSC}',$$

y

$$\text{CSA} + \text{ASB} + \text{BSC}' < 4 \textit{ rectos}$$

[suponemos aqui que el ángulo mayor está en medio de los otros dos].

Esto supuesto, tomemos en SC y SC′ dos distancias iguales SD = SD′, y desde los puntos D, D′, bajemos las rectas DE, D′E′, respectivamente perpendiculares á SA, SB; despues imaginemos que los triángulos rectángulos SDE, SD′E′, giran al rededor de SA, SB, y dan solo media vuelta, de modo que el lado SD tome la posicion S*d* en el plano del ángulo ASB, y el lado SD′ la posicion S*d*′. — Es claro que, en este movimiento, los triángulos rectángulos engendrarán dos conos (n.º 357), y los lados SD, SD′, ó mas bien, SC, SC′, engendrarán dos superficies cónicas. Ahora bien, los planos verticales engendrados por DE, D′E′, se cortarán necesariamente, y ademas deberán cortarse *interiormente* respecto de los dos conos; porque de ser ASB < ASC + BSC′, resulta ASC < AS*d* + BS*d*′; por consiguiente, las rectas DE*d*, D′E′*d*′, se cruzarán en un punto K *interior* al ángulo *d*S*d*′. Tendrán pues los planos verticales por interseccion comun una recta KI que atravesará simultáneamente á las dos superficies cónicas en un mismo punto I; y juntando el punto S con el punto I, tendremos una arista SIL comun á las dos superficies. — Entonces las rectas SA, SB, SL, formarán un ángulo triedro cuyas caras serán

$$\text{ASB}, \ \text{ASL} = \text{ASC}, \ \text{BSL} = \text{BSC}'; \qquad L.\,C.\,D.\,D.$$

Advert. Los tres ángulos ASB, CSA, C′SB, pueden considerarse como *desarrollo* del ángulo triedro SALB en un plano horizontal SAB (*véase* el número 361); — la arista SL en cierto modo se reparte en *dos*, que toman las posiciones SC, SC′.

Ademas, si se imagina que los dos triángulos rectángulos SDE, SD′E′, concluyan del todo su revolucion, tendrán las dos superficies cónicas, *por debajo* del plano ASB, otra arista comun que determinará un ángulo triedro *simétrico* al primero (n.° 334).

Fig. 328. Escolio. Hemos supuesto en la *figura* 328, que siendo agudo ú obtuso el ángulo mayor ASB, son agudos los otros dos ángulos CSA, C′SB.

Pero puede tambien suponerse que dos de los ángulos
Fig. 329. ASB, ASC (*fig.* 329), son obtusos, y el tercero, BSC′, agudo;
Fig. 330. ó bien que los tres ángulos sean obtusos (*fig.* 330); — la proposicion en todos los casos es verdadera.

Fig. 329. En el caso de la *figura* 329, la perpendicular DE caeria en la prolongacion de AS, y la perpendicular D′E′ en el mismo lado SB; pero los dos planos verticales engendrados por DE, D′E′, se cortarán sin embargo *interiormente* respecto de los dos conos; y tambien las superficies cónicas tendrian comun una arista SL que formaria con SA, SB un ángulo triedro.

Fig. 330. En el caso de la *figura* 330, las perpendiculares DE, D′E′, caerian en las prolongaciones respectivas de SA, SB; y los dos planos verticales se cortarian en una vertical IK, cuyo pie K sería interior al ángulo DSD′; y por consiguiente tambien tendrian las dos superficies cónicas una arista comun SL.

Pasemos á la construccion de los ángulos triedros por medio de ciertos datos.

Fig. 331 y 332.

Problema VI. (*Fig.* 331 y 332.)

N.° 410. *Dadas las tres caras de un ángulo triedro, construir los ángulos diedros.*

Para hacer entender mejor la construccion que vamos á emplear, y que tiene la ventaja de aplicarse á todos los casos, consideraremos primero una figura en relieve.

Fig. 331. Sea pues *sabc* (*fig.* 331) el ángulo tiedro cuyos ángulos

diedros se trata de obtener *gráficamente*: empecemos por el formado en la arista *sa*.

Tomemos en las aristas tres partes iguales, $sa = sb = sc$, y juntemos los puntos *a*, *b*, *c*, de dos en dos: asi formamos un tetraedro cuyas caras laterales son isósceles; de donde resulta que los ángulos de las bases son todos *agudos* (n.° 56).— Esto supuesto,

Por un punto cualquiera *m* de la arista *sa*, tiremos las rectas *mn*, *mp*, perpendiculares á *sa*; las cuales encontrarán necesariamente á los lados *ab*, *ac*, del triángulo *abc* (n.° 34), en dos puntos *n*, *p*. Tirando la *np*, tendremos un triángulo *mnp* que, construido en su magnitud verdadera, nos dará á conocer el ángulo *m*, que es la medida del ángulo diedro formado en *sa* (n.° 308).—Esta construccion se consigue *desarrollando* sobre un plano al tetraedro *sabc*.

Al efecto, *tracemos* en un mismo plano horizontal tres ángulos consecutivos ASC′, ASB, BSC″ (*fig.* 332), respectiva- Fig. 332.
mente iguales á los tres ángulos dados *asc*, *asb*, *bsc* (*fig.* 331) Fig. 331
[aqui se toma el ángulo ASB por base de la construccion]; y despues de haber tomado las cuatro distancias iguales

$$SC' = SA = SB = SC'',$$

tiremos las rectas C′A, AB, BC″; despues, desde los puntos A y B como centros, con los radios AC′, BC″, *tracemos* dos arcos de círculo que deben cortarse en un punto C situado respecto de AB al lado opuesto del punto S; y *juntemos* AC y BC: asi obtenémos el tetraedro *sabc* desarrollado sobre el plano horizontal. [La base *abc* del tetraedro se ha movido al rededor de *ab* ó AB]. Ya no nos falta mas que determinar en este desarrollo lo largo de los lados del triángulo *mnp*.

Para esto, desde luego es evidente que los lados *mn*, *mp*, estan representados por los pedazos MN, NR, de una misma perpendicular á SA, tirada por un punto cualquiera M tomado desde A en SA. Ademas, en el desarrollo del tetraedro el punto *p* ha debido tomar posicion en AC′ y en AC, que representa á *ac*: luego tomando AQ = AR, y juntando el punto Q con el N, tendremos NQ = *np*. Luego los tres lados del triángulo *mnp* son respectivamente iguales á MN, MR y NQ.— Luego, si sobre MN como base construimos el triángulo MNP (n.° 157), tal que tenga MP = MR, NP = NQ, el ángulo en M será el ángulo diedro pedido, rebatido sobre el plano horizontal.

La construccion sería idéntica respecto del ángulo diedro formado en la arista *sb*; pero la del ángulo diedro formado en el arista *sc* exige una ligera modificacion, porque el arista *sc* está representada en el desarrollo por SC′, SC″, y porque el punto ha tomado las tres posiciones C, C′, C″.

Despues de haber tomado en SC′, SC″, dos partes C′T′, C″T″, arbitrarias, pero iguales, *levantemos* las T′V′, T″V″, respectivamente perpendiculares á SC′, SC″; despues tomemos en CA, CB,

$$CP'' = C'V', \quad CN'' = C''V'',$$

y tiremos la N″P″; las tres rectas N″P″, T′V′, T″V″, representan los lados $n''p''$, $m''n''$, $m''p''$, del triángulo que se ha de construir; y, ejecutada la construccion sobre la base N″P″, el ángulo opuesto M″ será el ángulo pedido.

Podria evitarse esta última construccion tomando á su vez á ASC por base del desarrollo.

Escolio 1.° El caso en que se dan los *tres ángulos* del ángulo triedro se comprende en el problema precedente, en virtud de la propiedad del ángulo triedro suplementario (número 330):

Tómense los suplementos de los tres ángulos dados, y se tendrán las tres caras del nuevo ángulo triedro; *constrúyanse* los ángulos diedros de este, y *tómense* sus suplementos; y se obtendrán las tres caras buscadas.

Escolio 2.° ***La reduccion de un ángulo al horizonte*** es tambien un caso particular del problema antecedente.

En efecto, ***reducir un ángulo al horizonte*** es ***hallar la proyeccion horizontal de un ángulo formado por dos rayos visuales*** [cuyo vértice es el ojo], ***conociendo dicho ángulo y los que forman los rayos visuales con la vertical.***

Fig. 333. Sean pues SA, SB (*fig.* 333) dos rayos visuales, y SC la vertical bajada desde el punto S.—Por el supuesto conocemos el ángulo ASB, y los ángulos ASC, BSC, y se trata de determinar el ángulo MPN formado por las proyecciones de SA, SB, sobre un plano horizontal tirado por un punto cualquiera de la vertical. Todo pues se reduce claramente á construir el ángulo diedro que se forma en el arista SC del ángulo triedro SABC, cuyas caras ASB, ASC, BSC, conocemos.

Fig. 334. **Problema VII.** (*Fig.* 334.)

N.° 411. *Dadas dos caras de un ángulo triedro y el án-*

gulo comprendido, construir la tercer cara, y por consiguiente, *los tres ángulos diedros.*

Este problema es siempre posible, cualesquiera que sean las caras dadas y el ángulo que comprenden.

En efecto, supongamos que las dos caras dadas ASB, ASC, estan situadas en un mismo plano, por ejemplo en el de la cara ASB, y hagamos despues girar la cara ASC al rededor de SA como charnela. Asi que el ángulo diedro comprendido por las caras sea igual al ángulo dado, quedará la tercer cara CSB completamente determinada en el espacio.

No se trata pues sino de fijar su magnitud en el desarrollo del ángulo triedro sobre el plano de la cara ASB.

Para esto, desde un punto cualquiera D del arista SC rebatida, bajemos sobre SA una perpendicular indefinida DEF, y supongamos que la cara CSA vuelve á la posicion que debia tener para formar con ASB el ángulo dado; las dos rectas ED, EF, se hallarán entonces en un plano vertical, y formarán entre sí un ángulo, medida del ángulo diedro. Imaginemos ahora que este plano vertical, girando al rededor de EF, se rebata sobre el plano de ASB; despues de este movimiento, la recta ED tomará una posicion EI tal, que FEI será igual al ángulo dado; y si tomamos la EI igual á ED, y tiramos la EI perpendicular á EF, el punto F será el pie de una vertical bajada desde el punto D de la arista SC en el espacio sobre el plano horizontal.

Imaginemos finalmente que la tercera cara C′SB gira al rededor de SB para rebatirse sobre el plano horizontal; el punto D, cuya proyeccion horizontal está en F, se hallará por este rebatimiento en la perpendicular indefinida FE′D′, quedándose á una distancia del punto S igual á SD. Luego si, haciendo centro en S con el radio SD, describimos una circunferencia de círculo, irá esta á cortar á la recta FE′D′ en un punto D′, que unido al punto S, determinará la tercer cara pedida BSC′.

Conocidas asi las tres caras, pueden construirse por el problema anterior los ángulos diedros desconocidos.

Advert. Esta construccion exige algunas modificaciones segun los casos que se presentan; pero siempre se apoya en el mismo principio.

Escolio. La propiedad del ángulo suplementario reduce al caso que acabamos de esplicar, el caso de darse *una cara y los dos ángulos adyacentes.*

Fig. 335.

Problema VIII. (*Fig.* 335.)

N.° 412. *Dadas dos caras y el ángulo opuesto á una de ellas, construir la tercer cara y los otros dos ángulos diedros.*

Desde luego es facil conocer que este problema puede tener, segun los casos, *dos* soluciones, ó solo *una*, ó no tener *ninguna*. En efecto, siendo ASB una de las caras dadas, imaginemos que un ángulo igual á la otra cara dada, formado sobre el lado SB del otro, gire al rededor de esta línea, y tome en el espacio todas las posiciones posibles; y que ademas un tercer plano tirado por el arista SA, forme con ASB un ángulo diedro igual al ángulo dado. — Esto supuesto, en el movimiento del segundo plano en torno de SB, el lado movible engendra evidentemente una superficie cónica, que tiene en S su vértice. Ahora bien, aqui pueden ocurrir tres casos:

Ó el tercer plano cuya posicion está determinada y es fija, *encuentra* á la superficie cónica en dos de sus generatrices, que entonces deben cada una de por sí ser consideradas como la tercer arista de un ángulo triedro cuyas otras dos aristas son SB, SA; y los ángulos triedros asi formados satisfacen las condiciones del enunciado;

Ó el plano susodicho es *tangente* á superficie cónica en una de sus aristas (n.° 359), en cuyo caso resulta un solo ángulo triedro que satisface al enunciado;

Ó finalmente, el plano es completamente *esterior* á la superficie cónica; en cuyo caso no puede existir ángulo alguno triedro.

Veamos pues ahora, cuando el ángulo es posible, cómo se determina la tercer cara.

Sean ASB, BSC, las dos caras dadas, de las cuales la primera nos servirá de plano de construccion, suponiendo ademas rebatida en ese plano á la segunda.

Por un punto cualquiera E de SB, tiremos un plano perpendicular á esta recta; el cual será por lo tanto vertical y cortará á las caras ASB, BSC, en dos rectas EF, ED, perpendiculares á SA, y á la tercera cara desconocida, en una recta, cuya posicion vamos á fijar en este plano vertical, suponiéndole por un momento rebatido al rededor de su traza EF, sobre el plano horizontal.

Para esto, imaginemos por el mismo punto E otro plano vertical y perpendicular á la arista SA: este nuevo plano, que contiene á la vertical levantada en E, corta á la cara ASB en una recta EK perpendicular á SA, y á la cara desconocida en una recta perpendicular tambien á SA, y que forma por consiguiente con EK un ángulo igual al ángulo diedro dado. — Si ahora rebatimos este segundo plano al rededor de su traza, EK, la perpendicular á SA, situada en la cara desconocida, tomará despues del rebatimiento una posicion KI tal, que IKE sea igual al ángulo diedro dado; y la vertical que sale del punto E, como debe ser perpendicular á EF, estará representada en magnitud por EI. — Ademas, dicha vertical se halla tambien en el primer plano vertical que hemos imaginado; y en el rebatimiento de esta, deberá aquella haber tomado la direccion EB. — Luego si tomamos en la EB, la distancia EG igual á EI, y juntamos el punto G con el punto F, traza horizontal de la recta de interseccion del primer plano vertical tirado con la cara desconocida, tendremos la direccion de dicha recta en el susodicho plano vertical rebatido.

Para terminar la solucion del problema, nos falta todavía — 1.° — determinar la posicion del punto D en ese plano rebatido; — 2.° — determinar la posicion del mismo punto cuando la tercer cara gira al rededor de SA para rebatirse sobre el plano horizontal.

Pues bien, — 1.° — en el movimiento que hace el plano GEF para rebatirse sobre el plano horizontal, la distancia del punto D al punto E no debe cambiar; luego si haciendo centro en E, con ED por radio, trazamos una circunferencia de círculo, deberá esta cortar á la recta FG, generalmente, en dos puntos d', d'', que representarán dos posiciones diferentes del punto D en el plano vertical GEF rebatido.

2.° — Volvamos á este plano su posicion vertical, y hagamos despues girar á d'SA ó á d''SA al rededor de SA. En este movimiento las distancias de los puntos d', d'', al punto F no mudarán; por consiguiente deben dichos puntos hallarse en las circunferencias trazadas desde F como centro, con los radios Fd', Fd''. — Por otro lado, los mismos puntos deben hallarse en la circunferencia descrita con el radio SD. — Buscando pues los puntos D′, D″ en que esta circunferencia encuentra á aquellas dos, y juntando esos puntos con el punto S, resultará ASD′, ASD″, ó mejor, ASC′, ASC″, que será la tercer cara pedida.

Advert. Si la circunferencia ED resultara tangente de la recta FG, no habria mas que una solucion; y si no la encontrara, no habria ninguna.

Conocida la tercer cara, se determinarán los ángulos diedros desconocidos por el problema del número 410.

No insistiremos mas en este último problema, cuya completa discusion nos llevaria muy lejos, alejándonos demasiado de nuestro intento.

Escolio. El caso de darse *dos ángulos diedros y la cara opuesta á uno de ellos*, se deduce del que acabamos de esplicar, en virtud de la propiedad del ángulo suplementario.

Tenemos pues medios para determinar *gráficamente* tres de los seis elementos que constituyen un ángulo triedro, cuando conocemos los otros tres. Por consiguiente, las cuestiones relativas á los *triángulos esféricos* son tambien susceptibles de soluciones puramente gráficas.

§. III. *Problemas sobre la esfera.*

Problema I.

N.° 413. *Circunscribir una esfera á un tetraedro dado*; ó en otros términos, *hacer pasar una esfera por cuatro puntos dados.*

Suponiendo conocidas las proyecciones de los cuatro puntos, *determínense* (n.° 393) las trazas de un plano que pase por tres de ellos; despues *búsquense* (n.° 408) las proyecciones del centro de un círculo que pase por los tres puntos elegidos, y *levántese* en el centro hallado una perpendicular al plano de los tres puntos.

Repítanse las mismas construcciones respecto del *cuarto* punto combinado con *dos* de los primeros.

El punto en que se corten las dos perpendiculares (número 378) será el centro de la esfera pedida.

De otro modo: — Por los puntos medios de las tres aristas de un mismo ángulo triedro del tetraedro dado, *tírense* planos que les sean perpendiculares (n.° 398), y *determínese* el punto de interseccion de los tres planos.

Ese punto será el centro de la esfera pedida (n.° 378).

Advert. Conocidas las proyecciones del centro y las de uno de los puntos, puede construirse el radio facilísimamente.

Escolio. Cuando se pueden elegir á arbitrio los planos de proyeccion, puede simplificarse mucho la construccion precedente; — por ejemplo, si tomamos por *plano horizontal* el plano de tres de los cuatro puntos dados, y por plano *vertical* el plano vertical que pasa por el arista que junta al cuarto punto con cualquiera de los otros tres.

Encargamos á los principiantes que ejecuten el dibujo de este problema, — 1.° — suponiendo á los puntos dados dispuestos de cualquier modo respecto de los planos de proyeccion; — 2.° — dando al plano horizontal y al vertical la posicion especial que hemos indicado antes.

PROBLEMA II.

N.° 414. *Inscribir una esfera á un tetraedro dado.*

Sabemos ya (n.° 379) que el centro de la esfera pedida se encuentra en la interseccion de los *tres planos bisectores* de los ángulos diedros de la base del tetraedro dado.

Suponiendo que se nos dan por sus proyecciones los cuatro vértices del tetraedro, podemos primero *determinar* las trazas de los planos que pasan por dichos vértices tomados de *tres en tres* (n.° 393).—Despues se buscan (n.° 400, *escol.* 2.°) las trazas de los planos bisectores de los ángulos que forma la cara tomada por base con las otras tres; y por último se determina (número 402, *advert.* 1.ª) el punto de interseccion de los tres planos.

Pero esta solucion general se simplifica muchísimo cuando se supone colocada la base del tetraedro en el plano horizontal.

Otros problemas sobre la esfera.

N.° 415. OBSERVACION PRELIMINAR. — Los problemas siguientes no tienen con la *Geometría descriptiva* mas analogía que la de resolverse, á lo menos algunos, por medio de construcciones ejecutadas sobre un plano; á pesar de que solo estan fundadas en los principios de la Geometría ordinaria.

Supondremos sin embargo que se posee un instrumento llamado *compas esférico* (n.° 364, *nota*), por cuyo medio, colocando una de sus puntas en un punto de la superficie esférica, se puede con la otra trazar un círculo en la misma superficie, cuyo polo es entonces el punto que ha servido de centro (n.° 363, *escol.* 2.°); — la distancia rectilínea de las dos puntas es, en este caso, la cuerda del arco de círculo máximo comprendido entre el polo y un punto cualquiera del círculo descrito:—cuando este es un círculo máximo, la abertura del compas es el lado del cuadrado inscrito, ó *la cuerda del cuadrante.*

Fig. 336.

PROBLEMA III. (*Fig.* 336.)

N.° 416. *Dada una esfera, construir su radio.*

Desde un punto cualquiera P tomado por polo, y con una abertura arbitraria, *tracemos* una circunferencia de círculo sobre la superficie de la esfera (n.° 415), y señalemos en dicha circunferencia tres puntos A, B, C. *Tómemos* luego tres aberturas de compas iguales respectivamente á las cuerdas AB, AC, BC, y en un plano dado *construyamos* con ellas como lados un triángulo A'B'C'; — el círculo circunscrito á este triángulo es el círculo menor ABC; luego llamando D al centro de este círculo menor, y D' al centro del círculo circunscrito, resulta DA = D'A'.

Ahora bien, *tomemos* EF = A'D', *levántemos* en el punto F la recta indefinida GFG' perpendicular á EF, y *señalemos* en la perpendicular un punto G tal, que EG sea igual á AP [lo cual es posible pues AP > AD > EF]. — *Construyamos* en fin el ángulo GEO' igual al ángulo EGC' [para lo cual basta levantar en el punto I medio de GE, una perpendicular á esta recta].

Asi formamos un triángulo isósceles O'EG igual al triángulo isósceles OAP; luego O'E = OA es el radio pedido.

ESCOLIO. Para construir en una esfera dada la *cuerda del cuadrante*, debe determinarse el radio de la esfera por medio del problema precedente; y la cuerda buscada es la *diagonal* del cuadrado construido con el radio hallado.

Hemos visto en otro lugar (n.° 364, *escol.* 3.°) que las circunferencias de círculo máximo deben trazarse con una abertura igual á la cuerda del cuadrante.

Fig. 337.

PROBLEMA IV. (*Fig.* 337.)

N.° 417. *Por dos puntos dados,* A, B, *en la superficie de una esfera, trazar una circunferencia de círculo máximo.*

Tómese (n.° 416, *escol.*) una distancia igual á la cuerda del cuadrante; despues, haciendo respectivamente centro en A y en B, y con un radio igual á la distancia susodicha, *trácense* á un mismo lado, respecto del plano ABO [siendo O el centro de la esfera] dos arcos que se cortarán en un punto P;—

este punto será el polo de la circunferencia buscada (n.° 364, *escol.* 3.°), que podrá entonces describirse facilmente, porque la distancia del polo hallado á cada uno de los puntos A, B, es conocida é igual á la cuerda del cuadrante.

PROBLEMA V.

N.° 418. *Dados una circunferencia de círculo máximo* [ó menor] y *un punto* en la superficie de la esfera, *hacer pasar por este punto una circunferencia de círculo perpendicular á la primera.*

Los medios de construccion son idénticos á los de los problemas (números 148, 149, *figuras* 89, 90): basta suponer que la línea dada es una parte de la circunferencia en vez de ser una recta. Fig. 89 y 90.

PRIMER CASO. El punto dado se supone situado *en* la misma circunferencia dada. — (*Fig.* 89). — *Tómense* en la circunferencia dada á uno y otro lado del punto dado A, dos distancias iguales AB, AC; despues, desde los puntos B, C, como polos, y con una misma abertura [que debe ser mayor que BA ó que CA], *trácense* dos arcos de círculo que se corten en un punto D, y *hágase* luego *pasar* una circunferencia de círculo máximo por los dos puntos A, D, (n.° 417). Fig. 89.

Asi se obtiene la circunferencia pedida.

SEGUNDO CASO. El punto dado se supone situado *fuera* de la circunferencia dada. — (*Fig.* 90). — Desde el punto A como polo, *trácese* un arco de círculo que corte á la circunferencia dada en dos puntos C, D; despues, desde estos puntos como polos respectivos, y con una abertura de compas suficiente, *trácense* dos arcos que se corten en un punto D′ situado al lado opuesto del punto A respecto del arco CD; y *hágase* finalmente *pasar* una circunferencia de círculo máximo por los puntos A, D′. Fig. 90.

ESCOLIO. Por medio de un procedimiento análogo al del número 150, se puede dividir un arco de círculo máximo, ó de círculo menor, de una longitud determinada en 2, 4, 8,..., partes iguales, por circunferencias de círculo máximo.

COROLARIO. Para *hacer pasar por tres puntos* dados en la superficie de una esfera, *una circunferencia de círculo*, es necesario trazar por medio del problema anterior dos circunferencias de círculos máximos, cada una de las cuales tenga todos sus puntos equidistantes de los puntos dados, tomados de dos en dos. — Estas circunferencias se cortarán en dos puntos, que serán los polos del círculo pedido, el cual por consiguiente podrá ya construirse sin dificultad (n.° 364, *escol.* 3.°).

Fig. 33[illegible]

Problema VI. (*Fig.* 33[illegible])

N.° 419. *Dados en la superficie de una esfera una circunferencia de círculo menor y un punto, tirar por este una circunferencia de círculo máximo tangente á la circunferencia dada.*

Ante todo, adviértase que dos círculos de la misma esfera se llaman tangentes en un punto, cuando tienen en dicho punto una tangente comun; — y como el meridiano de todo círculo (n.° 364) que corresponde al punto de contacto es perpendicular á la tangente, resulta que los dos círculos tangentes tienen un meridiano *comun* en el punto de contacto.

Advertiremos ademas que, por un mismo punto de un círculo menor, pueden pasar infinitos círculos que le sean tangentes; porque basta para ello hacer pasar por la tangente un plano cualquiera.

Pero no hay mas que *un solo círculo máximo* tangente en el mismo punto; que es el que determinan el centro de la esfera y la tangente.

Esto supuesto, resolvamos separadamente cada uno de estos dos casos.

Primer caso. Sean AMB el círculo menor dado, y M el punto de *contacto* de la circunferencia pedida.

Determínese lo primero (n.° 418, *corol.*) el polo P del círculo dado; despues *hágase pasar* un círculo máximo PMP′ por los puntos P y M (n.° 417): con esto se tendrá el meridiano correspondiente al punto de contacto. Pero el círculo buscado debe pasar por el punto M y ser perpendicular al plano del círculo máximo PMP′: basta pues ahora *tirar* por el punto M una circunferencia de círculo máximo CMD perpendicular á PMP′ (n.° 418); y se obtendrá la circunferencia pedida.

Segundo caso. Sea I el punto dado *fuera* del círculo menor AMB. — Supongamos resuelto el problema, y sean CIMD el círculo pedido, PMP′ el meridiano comun.

Tomemos en PMP′, MH = MP = PA, y observemos que, siendo CIM perpendicular al medio de PH, el punto I está equidistante de P y de H; por consiguiente tenemos PI = IH.

Se ve pues que el punto H es la interseccion de dos circunferencias de círculo, una descrita con la distancia PH=2PA, y otra descrita desde el punto I con la distancia IP.

De aqui resulta la construccion siguiente:

1.° — *Determínese* el polo P como en el caso primero ; — 2.° — *tómese* una abertura de compas igual á la cuerda IP; — 3.° — con ese radio, y haciendo centro en I, *descríbase* una circunferencia de círculo menor; — 4.° — haciendo centro en P, y con un radio igual á la cuerda PA′ = 2PA, *trácese* otra circunferencia que cortará á la primera en un punto H ; — 5.° — *hágase pasar* por los puntos P, H, una circunferencia de círculo máximo que encuentre al círculo menor AMB en un punto M; — 6.° — finalmente, — por los puntos I, M, *tírese* una circunferencia de círculo máximo (n.° 417); y esa será la pedida.

LIBRO CUARTO.

DE LA ESTENSION CONSIDERADA EN EL ESPACIO.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA SEMEJANZA DE LOS POLIEDROS. — DETERMINACION DE SUS AREAS Y SUS VOLÚMENES.

§. I. *De la semejanza de los poliedros.*

N.° 420. Introduccion. Habiendo fijado en el *libro segundo* (n.^{os} 186 y siguientes) los caractéres generales de la semejanza, solo tenemos que aplicar aqui á las figuras consideradas en el espacio los principios alli establecidos. — Dependiendo pues las propiedades de todas estas figuras de las del tetraedro, como las de las figuras planas dependen de las del triángulo, debe servir de base á la teoría de las figuras semejantes la definicion de los tetraedros semejantes.

Quedando pues determinado un tetraedro por sus *seis* aristas (n.° 347, *corol.*), como lo queda un triángulo por sus tres lados, diremos que — *Dos tetraedros son semejantes cuando tienen sus aristas proporcionales y dispuestas en el mismo orden* [significando aqui esta última espresion lo mismo que respecto de los tetraedros iguales (n.° 347)].

De esto se infiere inmediatamente, que,

1.° *Dos tetraedros semejantes tienen sus caras respectivamente semejantes* (n.° 187), *y respectivamente iguales los ángulos diedros y los ángulos triedros* (n.° 336);

2.° *Dos tetraedros semejantes á un tercero son semejantes entre sí.*

N.° 421. Como un poliedro cualquiera está determinado por un conjunto de tetraedros que le componen, resulta que

Dos poliedros son semejantes cuando pueden descomponerse en un mismo número de tetraedros semejantes respectivamente y colocados de la misma manera.

De donde se deduce esta nueva consecuencia:

Dos poliedros semejantes á un tercero son semejantes entre sí.

Se llaman *puntos homólogos* en dos figuras semejantes,— 1.° — los puntos homólogos de sus caras (n.° 188); —2.°— los puntos que se enlazan con caras homólogas por medio de tetraedros semejantes (n.° 420), y dispuestos de la misma manera.

Se llaman *líneas homólogas* las rectas determinadas por dos pares de puntos homólogos.

Se llaman *secciones homólogas* los polígonos resultantes de la interseccion de dos poliedros semejantes con dos planos determinados por *tres* pares de puntos respectivamente homólogos.

En fin, dos poliedros semejantes se convierten en iguales cuando tienen *igual* una arista, ó mejor, una *línea homóloga cualquiera.*

N.° 422. *Dos tetraedros*, y en general, *dos poliedros* se llaman *inversamente semejantes* cuando uno de ellos es *semejante al simétrico* del otro (n.° 334).—Pero aqui por el pronto solo trataremos de las propiedades de los poliedros *directamente semejantes*, reservando para el segundo *Apéndice* el esplicar los otros.—Por esta razon, y para abreviar los enunciados de los teoremas, omitiremos algunas veces la restriccion *dispuestos del mismo modo*, debiendo siempre sobreentenderse en el sentido que lo hemos atribuido.

Teorema I. (*Fig.* 339.) Fig. 339.

N.° 423. *Todo plano paralelo á una de las caras*, ABC, *de un tetraedro* SABC, *determina con las otras tres caras un segundo tetraedro* SA″B″C″, *semejante al primero* [hallándose los dos planos paralelos *á un mismo lado* respecto del vértice S].

En efecto, siendo las rectas A″B″, B″C″, C″A″, respectivamente paralelas á las AB, BC, CA (n.° 318), resulta

$$SA : SA'' :: SB : SB'' :: SC : SC''$$
$$:: AB : A''B'' :: AC : A''C'' :: BC : B''C'';$$

luego los tetraedros SABC, SA″B″C″, son semejantes (n.° 420).

COROLARIO 1.° Todo plano paralelo á la base de una pirá-
Fig. 286. mide cualquiera SABCDE (*fig.* 286) [y situado al mismo lado que la base respecto del vértice] determina otra pirámide *sabcde* semejante á la primera. En efecto, hemos visto (número 344) que las aristas y los lados de las bases ABCDE, *abcde*, son proporcionales; luego los tetraedros resultantes de tirar planos por la cúspide S y por las diagonales de las bases serán semejantes (n.° 420); luego tambien lo son las pirámides (número 421).

COROLARIO 2.° *En dos tetraedros semejantes* SABC,
Fig. 339. S′A′B′C′ (*fig.* 339), *las alturas* SH, S′H′, *son proporcionales á las aristas.*

En efecto, en SA tomemos SA″ = S′A′, y por el punto A″ tiremos un plano paralelo á la base ABC: — el tetraedro SA″B″C″ es semejante al SABC, por el teorema principal, y por consiguiente tambien lo es al S′A′B′C′ (n.° 420, 2.°); pero por construccion tenemos SA″ = S′A′; luego los tetraedros SA″B″C″ y S′A′B′C′ son iguales (n.° 421); de donde SH″ = S′H′. Ahora bien, SH : SH″ :: SA : SA″ (n.° 344); luego tambien SH : S′H′ :: SA : S′A′.

La misma consideracion se aplica á dos cualesquiera pirámides semejantes.

Fig. 339.

TEOREMA II. (*Fig.* 339.)

N.° 424. *Dos tetraedros* SABC, S′A′B′C′, *son semejantes* en dos casos principales:

1.° *Cuando tienen dos caras respectivamente semejantes* [SAB y S′A′B′, SAC y S′A′C′], *igualmente inclinadas y dispuestas del mismo modo*;

2.° *Cuando tienen un ángulo triedro* [en S y S′ por ejemplo], *formado por tres caras respectivamente semejantes* y *dispuestas de la misma manera.*

Este segundo caso es una consecuencia casi inmediata de la definicion (n.° 420); porque de la semejanza de las tres caras se deduce la proporcionalidad de todas las aristas.

Respecto del primero, tomemos, para demostrarle, en SA una parte SA″ = S′A′, y tiremos por el punto A″ un plano paralelo á la base ABC: el triángulo SA″B″, semejante al SAB, lo es tambien al S′A′B′, y ademas le es igual, por tener SA″ = S′A′. Del mismo modo y por la misma razon SA″C″ es igual á S′A′C′.

Ahora bien, por hipótesis, son iguales los ángulos diedros en SA″ y S′A′: luego los tetraedros SA″B″C″, S′A′B′C′, son iguales (n.° 347). Pero SA″B″C″ es semejante á SABC; luego, &c.

Escolio. *Dos tetraedros son* tambien *semejantes cuando tienen una cara semejante* [SAB, S′A′B′], *y los ángulos diedros á ella adyacentes iguales é igualmente dispuestos.*

En efecto, tomemos, como antes, SA″ = S′A′, y tiremos por el punto A″ un plano paralelo á ABC: — el tetraedro SA″B″C″ es semejante á SABC (n.° 423); luego los ángulos diedros en SA″, SB″, A″B″, son respectivamente iguales á los ángulos diedros en SA, SB, AB, y por consiguiente tambien lo son, en virtud de la hipótesis, á los en S′A′, S′B′, A′B′.— Ademas, SA″B″, semejante á SAB, es semejante á S′A′B′, ó mas bien igual, por tener SA″ = S′A′; luego los dos tetraedros SA″B″C″, S′A′B′C′, son iguales (n.° 347); pero el primero es semejante á SABC; luego, &c.

En fin, puede decirse que — *Son semejantes dos tetraedros cuando tienen iguales todos sus ángulos diedros*; porque, en virtud de la propiedad de los ángulos triedros suplementarios (n.° 330), la igualdad de los ángulos diedros envuelve la igualdad de los ángulos formados por las aristas, y por consiguiente la semejanza de las caras correspondientes.

Pero este nuevo caso contiene una condicion de mas, porque reunidas tres caras, bastan dos ángulos diedros para determinar la direccion de la cuarta.

Teorema III.

N.° 425. *Dos poliedros semejantes tienen las caras homólogas semejantes, los ángulos diedros y los ángulos poliedros homólogos iguales respectivamente.*

1.° Las caras homólogas son semejantes, porque son caras de tetraedros semejantes, ó son reuniones de caras homólogas de los mismos.

2.° Los ángulos diedros homólogos son iguales, ó porque pertenecen á tetraedros semejantes, ó porque son conjunto de varios ángulos diedros de ellos.

3.° Los ángulos poliedros son iguales por hallarse compuestos de ángulos diedros iguales.

Escolio. *Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes son proporcionales*, por pertenecer á tetraedros semejantes y adyacentes unos á otros.

TEOREMA IV.

N.° 426. RECÍPROCAMENTE: — *Dos poliedros son semejantes cuando tienen todas sus caras respectivamente semejantes, é igualmente inclinadas unas respecto de otras.*

Siguiendo uno de los métodos indicados en el número 347, y raciocinando como respecto de los poliedros iguales (n.° 352), puede probarse que los poliedros estan compuestos de tetraedros respectivamente semejantes; luego ellos lo son tambien (n.° 421).

Advert. A esta recíproca le sobran condiciones en el caso de ser convexos los poliedros.

COROLARIO. Las aristas, las diagonales, y, en general, todas las rectas homólogas de dos poliedros semejantes, son proporcionales.

Porque pueden considerarse como aristas de tetraedros semejantes y adyacentes unos á otros, lo cual enlaza las porporciones que se pueden formar con las diversas líneas.

Como ejercicios sobre los poliedros semejantes, propondremos los teoremas siguientes:

TEOREMA V.

Dos poliedros son semejantes cuando tienen una cara semejante, y todos los vértices [que no pertenecen á esta cara] *determinados por un mismo número de tetraedros semejantes* [y dispuestos de la misma manera], *construidos sobre cada uno de los triángulos que componen la cara semejante.*

Advert. Este teorema sirve de *definicion* de los poliedros semejantes en la *Geometría* de LEGENDRE.

TEOREMA VI.

En dos prismas semejantes, las secciones perpendiculares á las aristas laterales son polígonos semejantes.

TEOREMA VII.

Dos pirámides son semejantes cuando tienen las aristas respectivamente paralelas.

TEOREMA VIII.

Dos poliedros regulares de la misma especie [ó del mismo nombre] *son semejantes y pueden descomponerse en un mismo número de pirámides regulares semejantes.*

§. II. *De las areas y de los volúmenes de los poliedros.*

Determinacion de las areas.

N.° 427. PROPOSICION PRELIMINAR. — *El area de un poliedro cualquiera es igual á la suma de las areas de todas las caras que le terminan.*

El area de una superficie es, en general, el número abstracto de unidades superficiales contenidas en ella (n.° 3), y por lo tanto, para obtener la de un poliedro irregular es necesario *medir* cada uno de los polígonos que forman su superficie y sumar despues todos los resultados.

Cuando se trata de un prisma cualquiera, ó de una pirámide regular, la espresion del area de su superficie lateral es susceptible de un enunciado bastante sencillo que da lugar á los siguientes teoremas.

TEOREMA I. (*Fig.* 340). Fig. 340.

N.° 428. *El area de la superficie lateral de un prisma cualquiera es igual al producto de uno de sus lados por el perímetro de una seccion que le sea perpendicular.*

Córtese el prisma por un plano MNPQR perpendicular á las aristas laterales, lo cual dará las rectas MN, NP, PQ,..., perpendiculares á dichas aristas (n.° 299): podemos tomar los lados AA′, BB′, CC′,..., por bases de los paralelógramos ABB′A′, BCC′B′, CDD′C′,...; y entonces MN, NP, PQ,..., serán las respectivas alturas. — Tendremos pues

$$\begin{aligned} ABB'A' &= AA' \times MN, \\ BCC'B' &= BB' \times NP, \\ CDD'C' &= CC' \times PQ, \ldots; \end{aligned}$$

de donde, por ser $AA' = BB' = CC' = \ldots$, resulta

$$\begin{aligned} \textit{sup. lat.} &= AA'(MN + NP + PQ + \ldots) \\ &= AA' \times \textit{perím.}\ MNPQR: \quad \textit{L. C. D. D.} \end{aligned}$$

Corolario. El area lateral de todo prisma *recto* ó *regular* (n.° 339) tiene por medida *el producto del perímetro de su base por su altura ó por una de sus aristas.*

Porque en este caso, la seccion perpendicular á las aristas es la base misma del prisma.

Cuando el *prisma* es *regular*, su area total, comprendida la de las dos bases, es igual al *producto del perímetro de la base por la suma del altura y el apotema de la base.*

Fig. 341. **Teorema II.** (*Fig.* 341.)

N.° 429. *El area de la superficie lateral de una pirámide regular* SABCDE, *es igual al producto del perímetro de la base por la mitad del apotema* SK.

Todos los triángulos SAB, SBC, SCD,..., son iguales é isósceles (n.° 343); y dan

$$\begin{aligned} SAB &= AB \times \tfrac{1}{2}SK, \\ SBC &= BC \times \tfrac{1}{2}SI, \\ SCD &= CD \times \tfrac{1}{2}SL, \ldots; \end{aligned}$$

de donde, á causa de ser $SK = SI = SL = \ldots$,

$$\begin{aligned} \textit{sup. lat.} &= (AB + BC + CD + \ldots) \times \tfrac{1}{2}SK \\ &= \textit{perím.}\ ABCDE \times \tfrac{1}{2}SK. \end{aligned}$$

Escolio. El area total tiene por espresion

$$\textit{perím.}\ ABCDE \times \tfrac{1}{2}(SK + OK),$$

siendo SK y OK las apotemas de la pirámide y de la base.

Determinacion de los volúmenes.

Comenzaremos, como para la valuacion de las superficies, estableciendo algunas proposiciones que tienen por objeto *transformar* unos poliedros en otros.

Dos *poliedros* se llaman *equivalentes* entre sí *cuando tienen un mismo volúmen*, aunque sean de muy diferente forma; y *transformar un poliedro*, es reemplazarle por otro cuyo volúmen sea igual al primero. [Aqui se suponen las figuras perfectamente *penetrables*].

Teorema III. (*Fig.* 342, 343.) Fig. 342, 343.

N.º 430. *Dos paralelepípedos cualesquiera de la misma base y de la misma altura, son equivalentes* (véase el número 210).

Puesto que son iguales las bases de los dos paralelepípedos, puede transportarse el segundo sobre el primero, de modo que coincidan las bases inferiores; en cuyo caso, como tienen la misma altura, las bases superiores quedarán situadas en un mismo plano paralelo al de la base inferior. Pero entonces podrá ocurrir, ó bien que las bases esten comprendidas entre las mismas paralelas LL′, MM′, como en la *figura* 342, ó bien que Fig. 342.
tengan una posicion relativa cualquiera, como en la *fig.* 343.— Fig. 343.
Examinemos estos dos casos separamente.

Primer caso. Sean los dos paralelepípedos ABCDEFGH, ABCDE′F′G′H′ (*fig.* 342).—Tenemos evidentemente dos pris- Fig. 342.
mas triangulares AEE′DHH′, BFF′CGG′, iguales entre sí (número 346) por tener un ángulo triedro igual, uno en A, y el otro en B, formado por tres caras respectivamente iguales, á saber:

$$AEE' = BFF', \quad ADHE = BCGF, \quad ADH'E' = BCG'F'.$$

Ahora bien, si de la figura total ABCDG′HEF′, quitamos alternativamente cada uno de los prismas iguales, queda una vez el paralelepípepo ABCDE′F′G′H′, y otra vez el paralelepípedo ABCDEFGH. Luego estos dos paralelepípedos son iguales en volúmen.

Segundo caso. Sean ahora los dos paralelepípedos ABCDEFGH, ABCDE′F′G′H′ (*fig.* 343) [se ha omitido la Fig. 343.
construccion del segundo para no complicar la figura].

Como los lados E′F′, H′G′, del segundo paralelepípedo, son respectivamente iguales y paralelos á EF, HG, y por consiguiente á AB, DC, y á la vez E′H′, F′G′, son iguales y paralelos á AD, BC, resulta que si se prolongan los lados E′H′, F′G′, hasta encontrar respectivamente en E″, H″, F″, G″, con los lados EF, HG, tambien prolongados, se formará un paralelógramo E″F″G″H″ igual á ABCD, é igual tambien á las bases superiores EFGH, E′F′G′H′.— Luego, tirando planos por AB y E″F″, por DC y H″G″, por AD y E″H″, y por BC y F″G″, se obtendrá un nuevo paralelepípedo ABCDE″F″G″H″, equivalente, en virtud del primer caso, á cada uno de los paralelepípedos dados. — Luego estos son tambien equivalentes entre sí. *L. C. D. D.*

Fig. 344. **Teorema IV.** (*Fig.* 344.)

N.° 431. *Dado un paralelepípedo oblicuo* ABCDEFGH
Fig. 334. (*fig.* 334), *siempre es posible transformarle en otro rectángulo de la misma altura que él, y de base equivalente.*

Por los puntos A, B, C, D, de la base ABCD, levantemos rectas perpendiculares al plano de la base, las cuales irán á encontrar á la base superior en cuatro puntos E′, F′, G′, H′; juntando estos puntos de dos en dos, formaremos, un paralelógramo E′F′G′H′, igual á ABCD, y por consiguiente, un paralelepípedo *recto* ABCDE′F′G′H′ equivalente al paralelepípedo dado, en virtud del teorema precedente.

A fin de no complicar la figura, concibamos que este nuevo paralelepípedo se desliza en el plano de su base inferior y viene á colocarse en A′B′C′D′E′F′G′H′.

Esto supuesto, desde los vértices A′, B′, de la base A′B′C′D′, tiremos las rectas A′I′, B′K′, perpendiculares á A′B′, lo cual determina un rectángulo A′B′K′I′ equivalente al paralelógramo A′B′C′D′ (n.° 210); despues, por los puntos I′, K′, tiremos las rectas I′I″, K′K″, parelelas á A′E′, B′F′, y juntemos los puntos E′, F′, con los puntos I″, K″, en que estas paralelas encuentran á G′H′. — Asi obtenemos un nuevo paralelepípedo A′K″, que es rectángulo, porque todas sus caras son evidentemente rectángulos, y que es equivalente al paralelepípedo recto (n.° 430); porque ambos pueden considerarse como formados sobre la base comun A′E′F′B′, con A′I′ por altura. Ahora bien, por construccion, el paralelepípedo recto es equivalente al paralelepípedo dado ABCDEFGH; luego este es tambien equivalente al A′K″.

Luego el paralelepípedo oblicuo se encuentra transformado en un paralelepípedo rectángulo de base A′B′K′I′ equivalente á ABCD, y de la misma altura I′I″ = AE′; *L. C. D. D.*

Fig. 345. **Teorema V.** (*Fig.* 345.)

N.° 432. *Todo prisma triangular ~~oblicuo~~* ABDEFH, *es la mitad de un paralelepípedo de doble base y de la misma altura* (*véase* el n.° 211).

Por los puntos B, D, tiremos las rectas BC DC, respectivamente paralelas á AD, AB, lo cual determina un paralelógramo ABCD doble de la base ABC; despues, por el punto C, tírese la CG paralela á AE, hasta encontrar en G con la base superior EFH del prisma, y tírense tambien las FG, HG; asi se formará un paralelepípedo ABCDEFGH cuya base ABCD es doble de la del prisma, y que tiene la misma altura que él. Mas adelante demostraremos (2.° *Apéndice*) que siendo simétricos los dos prismas triangulares ABCEFH, BCDFGH, no pueden superponerse, pero podemos desde ahora demostrar que son *equivalentes*; lo cual basta á nuestro objeto actual.

Para ello, cortemos la figura total por un plano MNPQ perpendicular á las aristas AE, BF,... [y tal que los cuatro puntos E, F, G, H, esten situados á un mismo lado repecto de él]; despues tómese en la arista AE prolongada una parte AM′ igual á ME [lo cual da MM′ = AE], tírese por el punto M′ un plano M′N′P′Q′ paralelo á MNPQ; y se tendrá un paralelepípedo *recto* M′N′P′Q′MNPQ, que se halla dividido por el plano diagonal HFBD prolongado, en dos prismas triangulares iguales y superponibles (n.° 346, *escol.* 2.°) Digo pues, que estos dos prismas triangulares rectos M′N′Q′MNQ y N′P′Q′NPQ, son respectivamente equivalentes á los dos prismas triangulares oblicuos ABDEFH, BCDFGH.

Porque si se concibe que el sólido M′N′Q′ABD se deslice á lo largo del arista M′E, de modo que el triángulo M′N′Q′ venga á colocarse sobre su igual MNQ, como las rectas M′A, N′B, Q′D, son perpendiculares al plano M′N′Q′, y como las rectas ME, NF, QH, lo son tambien al plano MNQ, resulta que las primeras tomarán las direcciones de las segundas (número 301); como ademas tenemos, por construccion, M′A = ME, N′B = NF, Q′D = QH, resulta tambien que los vértices A, B, D, coincidirán con los vértices E, F, H; luego los sólidos M′N′Q′ABD, MNQEFH, son iguales. — Por consiguiente, el prisma triangular *recto* M′N′Q′MNQ, es equivalente al prisma triangular *oblicuo* ABDEFH.

Se demostraria absolutamente del mismo modo que los otros dos prismas son tambien equivalentes.

Luego, finalmente, á causa de la igualdad de los dos prismas rectos, los dos prismas oblicuos son, no iguales, sino equivalentes; *L. C. D. D.*

Corolario 1.° *Los prismas triangulares determinados por los seis planos diagonales de un paralelepípido cualquiera* (n.° 341), *son todos equivalentes entre sí.*

Porque cada uno de ellos es la mitad del paralelepípedo.

Corolario 2.º *Todos los prismas triangulares que tienen una base comun, y cuyas bases superiores estan colocadas en un mismo plano paralelo al de la base inferior comun, son equivalentes*, porque todos son mitades de paralelepípedos equivalentes (n.º 430.)

Escolio. El paralelepípedo *recto* M'N'P'Q'MNPQ (*figura* 345) está compuesto de dos prismas equivalentes á los que

Fig. 345. componen el paralelepípedo *oblicuo* ABCDEFGH, y por consiguiente se puede concluir que estos *dos paralelepípedos* son *equivalentes*.

Ahora bien, siendo M'A = ME, por construccion, resulta evidentemente M'M = AE, N'N = BF, Q'Q = DH; de donde se sigue que *un paralelepípedo oblicuo cualquiera es equivalente á otro recto que tiene por altura el arista del primero y por base una seccion perpendicular á dicha arista.*

Fig. 346.

Teorema VI. (*Fig.* 346.)

N.º 433. *Dos tetraedros* SABC, S'A'B'C', *de la misma base y altura, son equivalentes.*

Para simplificar el discurso, supondremos que las dos bases ABC, A'B'C', estan colocadas en un mismo plano, en cuyo caso la altura igual de los dos tetraedros estará representada por la recta AH, comprendida entre el plano de las bases y otro plano paralelo á este, tirado por los dos vértices S, S'.

Esto supuesto, ya se demostró que las secciones GIK, G'I'K', hechas en los dos tetraedros, por un mismo plano paralelo á las bases, son iguales (n.º 344, *escol.*). Ahora bien, si se imagina que la altura AH esté dividida en un número *infinito* de partes iguales, y que por todos los puntos de division se tiran planos paralelos á las bases, los tetraedros quedarán divididos en trazos bastante *delgados*, para poderse considerar sensiblemente como prismas triangulares (*). — Pero los prismas del primero son respectivamente equivalentes á los del segundo (n.º 432, *corol.* 2.º), porque tienen bases y alturas iguales;

(*) Hablando con propiedad, esos pedazos son *troncos* de tetraedro; pero en razon á la estremada aproximacion de sus bases, pueden las aristas laterales considerarse como *paralelas*, en cuyo caso los troncos se convierten en prismas.

luego la suma de todos los prismas del primer tetraedro es igual á la suma de todos los prismas del segundo; luego, &c.

Hé aqui ademas otra demostracion rigorosa y fundada en la *reduccion á absurdo.*

Admitamos por el pronto que los dos tetraedros no son equivalentes, y que den, por ejemplo,

$$\text{(1)} \qquad SABC - S'A'B'C' = \delta.$$

Cualquiera que sea la diferencia δ, puede representarse por el volúmen de un prisma que tiene por base el triángulo ABC, y por altura una parte cualquiera AX de AH [porque vimos en el número 338, que un prisma construido sobre una base *dada* es susceptible de pasar por todos los grados de magnitud, desde cero hasta el infinito].

Esto supuesto, dividamos la altura total AH en partes iguales Aa, aa', $a'a''$,..., arbitrarias, pero menores que AX; despues, por los puntos de division a, a', a'',..., tiremos planos paralelos á las bases ABC, A'B'C':—Estos planos determinan en ambos tetraedros secciones DEF y D'E'F', GIK y G'I'K',..., iguales respectivamente (n.° 344, *escol.*)

Ahora, considerando solo el primer tetraedro, tiremos por los puntos B y C, E y F, I y K,..., rectas Be y Cf, Ei y Fk, Im y Kn,... paralelas al arista SA, hasta encontrar respectivamente con las rectas DE y DF, GI y GK, LM y LN,..., suficientemente prolongadas.—Asi formamos una serie de prismas triangulares ABCDef, DEFGik, GIKLmn,..., que llamaremos prismas *esteriores* [ó *escedentes*].

Pasando despues al tetraedro S'A'B'C', tiremos igualmente las rectas E'e' y F'f', I'i' y K'k', M'm' y N'n',..., paralelas al arista S'A', hasta sus encuentros respectivos con las rectas A'B' y A'C', D'E' y D'F', G'I' y G'K',...: asi obtenemos otros prismas A'$e'f'$D'E'F', D'$i'k'$G'I'K',..., que llamaremos prismas *interiores* [ó *deficientes*]; y aqui es importante observar que por esta última construccion tenemos *un* prisma *menos* que por la primera.

Pero si comparamos sucesivamente los prismas esteriores del primer tetraedro con los prismas interiores del segundo, veremos,—1.°—que el prisma esterno DEFGik de la segunda division es equivalente al prisma interno A'$e'f'$D'E'F' de la primera (n.° 432, *escol.* 2.°), porque tienen la misma altura y la misma base;—2.°—que el prisma esterno de la tercera division GIKLmn, es equivalente al prisma interno de la segunda, $D'i'k'E'I'K'$;... y asi sucesivamente.

De donde resulta que la diferencia entre la suma de los prismas esternos del primer tetraedro y la suma de los prismas internos del segundo, está representada por el prisma esterno ABCDef de la primera division, que tiene por altura Aa.

Luego, llamando S la primera suma, y S' la segunda, tendremos

$$S - S' = prisma\ ABCDef,$$

y por consiguiente, $S - S' < \delta$, puesto que δ es, por hipótesis, el volúmen del prisma que tiene por base ABC, y por altura $AX > Aa$.

Ahora bien, la desigualdad $S - S' < \delta$ es absurda; porque siendo la primer suma S evidentemente mayor que SABC, y la segunda S' menor que S'A'B'C', deberia resultar al contrario, por esta razon, $S - S' > \delta$.

Asi pues, es absurdo suponer el volúmen del tetraedro SABC diferente del volúmen S'A'B'C'. Luego, &c.

N.° 434. Corolario.—*Un tetraedro cualquiera* SABC
Fig. 347. (*fig.* 347) *es la tercera parte de un prisma triangular de la misma base* ABC *y de la misma altura.*

Suponiendo tiradas por el punto S, las rectas SD, SE, paralelas é iguales á BA, BC, tírense las rectas DE, AD, CE; con lo cual resulta una figura ABCSDE, que es evidentemente un prisma (n.os 322, 338).—Esto supuesto, por los tres puntos S, D, C, hagamos pasar un plano SDC que divida el prisma en tres partes SABC, SACD, SCDE, cuyos volúmenes serán iguales.—Porque desde luego, los tetraedros SACD, SCDE, son equivalentes (n.° 433) por tener bases iguales, ACD, DCE, é igual altura, puesto que tienen la misma cúspide S y las bases colocadas en un mismo plano.—Ademas, si consideramos el tetraedro SCDE como teniendo el cúspide en C, y sirviéndole de base SDE, resultará que será equivalente al SABC, por tener bases iguales, SDE, ABC, y altura igual, es decir, la perpendicular comun á los planos de las bases.—Luego los tres tetraedros son equivalentes, y por consiguiente cualquiera de ellos vale la *tercera parte* del prisma.
L. C. D. D.

Escolio. Se ve, en virtud de esto, que

Todo prisma triangular puede descomponerse en tres tetraedros de la misma base y de la misma altura que él.

Establecidas estas diversas proposiciones preliminares, podemos facilmente deducir de ellas la medida de toda clase de poliedros, procediendo como respecto de los polígonos.

LEMA. (*Fig.* 348.) Fig. 348.

N.º 435. *Dos paralelepípedos rectángulos* ABCDEFGH, ABCDIKLM, *de la misma base* ABCD, *son proporcionales á sus alturas* AE, AI; es decir, que dan

$$paralel.\ AG : paralel.\ AL :: AE : AI.$$

Sean primero las alturas conmensurables, y esten en la razon de 14 á 9 por ejemplo.

Dividamos á AE en 14 partes iguales, 9 de las cuales pertenecerán por consiguiente á AI; despues, por los puntos de division, tiremos planos paralelos á la base ABCD; claro es que el paralelepípedo AG quedará dividido en 14 paralelepípedos parciales, todos iguales entre sí, 9 de los cuales estarán contenidos en el paralelepípedo AL.

Por consiguiente los paralelepípedos dados estarán tambien en la razon de 14 á 9, que es la de las altura AE, AI.

En el caso de ser inconmensurables las alturas, se procede como hicimos respecto de los polígonos en el n.º 212, donde puede verse.

COROLARIO 1.º Recíprocamente: — *Dos paralelepípedos rectángulos de la misma altura* $AE = A'E'$ (*fig.* 349), *son proporcionales á sus bases*, ABCD, A'B'C'D'. Fig. 349.

Tomemos en el arista AB una parte AB″ igual á A′B′, y tiremos el plano B″C″G″E″ paralelo al plano de la cara ADEH: asi obtendremos un tercer paralelepípedo [ausiliar] AG″ que tiene la misma base ADHE que el paralelepípedo AG; luego, en virtud del teorema principal, tendremos la proporcion

$$(1) \qquad paral.\ AG : paral.\ AG'' :: AB : AB''.$$

Pero, como siendo $AE = A'E'$ y $AB'' = A'B'$, los rectángulos AB″E″E, A′B′F′E′, son iguales; resulta que los dos paralelepípedos AG″, AG′, tienen tambien la misma base AB″E″E, A′B′F′E′, y son entre sí como sus alturas. Luego tenemos la nueva proporcion

$$(2) \qquad paral.\ AG'' : paral.\ A'G' :: AD : A'D';$$

de donde, multiplicando las proporciones (1) y (2), y suprimiendo el factor comun *paral.* AG″, resulta

$$paral.\ AG : paral.\ A'G' :: AB \times AD : AB'' \times A'B'.$$

Ahora bien, AB×AD es la espresion numérica de la base ABCD (n.º 213); y AB″×A′D′, es la espresion numérica de la base A′B′C′D′; luego finalmente

$$paral.\ AG : paral.\ A'G' :: ABCD : A'B'C'D'; \quad L.\ C.\ D.\ D.$$

COROLARIO 2.º *Dos paralelepípedos rectángulos cuales-*
Fig. 350. *quiera* AG, A′G′ (*fig.* 350), *son proporcionales á los productos respectivos de su base por su altura*, ABCD×AE, A′B′C′D′×A′E′.

Tomemos en AE una parte AE″ = A′E′, y por el punto E″ hagamos pasar un plano E″F″G″H″ paralelo á ABCD.— Los dos paralelepípedos AG, AG″, que tienen la misma base ABCD, son proporcionales á sus alturas AE, AE″; y dan

$$(1) \qquad paral.\ AG : paral.\ AG'' :: AE : AE'' \text{ ó } AE'.$$

Los dos paralelepípedos AG″, AG′, que tienen la misma altura, AE″, A′E′, son proporcionales á sus bases ABCD, A′B′C′D′; y dan

$$(2) \qquad paral.\ AG'' : paral.\ A'G' :: ABCD : A'B'C'D';$$

de donde, multiplicando término á término las proporciones (1) y (2)

$$paral.\ AG : paral.\ A'G' :: ABCD \times AE : A'B'C'D' \times A'E'; \quad L.\ C.\ D.\ D.$$

Fig. 350. TEOREMA VII. (*Fig.* 350.)

N.º 436. *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo cualquiera* ABCDEFGH, *tiene por medida el producto de su base por su altura*; es decir, que da

$$vol.\ AG = ABCD \times AE.$$

Tomemos por *unidad el volúmen* del cubo (n.º 340) construido sobre *la unidad lineal*; y sea A′B′C′D′E′F′G′H′ el cubo escogido. En virtud del corolario precedente, tenemos

$$vol.\ AG : vol.\ A'G' :: ABCD \times AE : A'B'C'D' \times A'E',$$

ó bien, á causa de ser

$$A'E' = 1,\ A'B'C'D' = A'B' \times A'D' = 1 \times 1 = 1,$$

y por ser $$vol.\ A'G' = 1,$$

$$vol.\ AG : 1 :: ABCD \times AE : 1;$$

luego $$vol.\ AG = ABCD \times AE;$$ *L. C. D. D.*

Advert. Es necesario recordar que los factores (n.° 213, *advert.*) ABCD y AE, son números abstractos que espresan las *razones* de la base y la altura con sus unidades respectivas.

ESCOLIO. En lugar de la base ABCD, puede ponerse su valor numérico, que es AB×AD (n.° 213); y la igualdad precedente se trueca en

$$vol.\ AG = AB \times AD \times AE;$$

es decir, que *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo tiene* tambien *por medida el producto de sus tres aristas contiguas.*

Estas aristas se llaman las *tres dimensiones* del paralelepípedo. — Se llaman algunas veces su *longitud*, su *latitud*, y su *altura* ó *profundidad*. — AB es la longitud, AD la latitud, y AE la altura.

Advert. El volúmen de un cubo es por consiguiente igual á la *tercera potencia* de su lado. — De aqui viene el nombre de *cubo* para designar la tercera potencia de un número.

N.° 437. COROLARIO 1.°—*El volúmen de un paralelepípedo oblicuo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto, hemos visto (n.° 431) que este paralelepípedo puede ser reemplazado por otro paralelepípedo rectángulo de *base equivalente* y *de la misma altura.* — Pero el volúmen de este es igual al producto de su base por su altura; luego el primero tiene tambien la misma medida, ó sea, *el producto de su* propia *base por su altura*, puesto que esta base es equivalente á la del paralelepípedo rectángulo.

Advert. Las tres *dimensiones* del paralelepípedo oblicuo son, las dos del paralelógramo que le sirve de base (n.° 218), y la altura del mismo paralelepípedo, es decir (n.° 338), la perpendicular comun á las dos bases; y por consiguiente tiene su volúmen por medida, no ya el producto de sus tres aristas contiguas, como en el paralelepípedo rectángulo, sino *el producto de sus tres dimensiones*, segun acabamos de definirlas.

COROLARIO 2.° *Dos paralelepípedos cualesquiera son proporcionales* á sus medidas respectivas, y por consiguiente á los *productos de su base por su altura.*

De donde resulta — 1.° que — *Dos paralelepípedos de la misma base ó de base equivalente, y de la misma altura, son equivalentes*, proposicion que contiene como caso particular el teorema del n.° 430;

2.°—*Dos paralelepípedos de la misma base ó de base equivalente son proporcionales á sus alturas*;

3.°—Recíprocamente,—*Dos paralelepípedos de la misma altura son proporcionales á sus bases.*

TEOREMA VIII.

N.° 438. *El volúmen de un prisma triangular cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Porque este prisma es la mitad de un paralelepípedo de doble base y de la misma altura (n.° 432). Pero este tiene por medida el producto de su base por su altura (n.° 437); luego tambien el prisma tiene por medida la mitad de ese producto, es decir, el producto de su propia base [mitad de la del paralelepípedo] por su altura.

Fig. 281. COROLARIO 1.° Un prisma poligonal cualquiera (*fig.* 281) puede descomponerse en prismas triangulares de la misma altura por medio de los planos diagonales, ACC'A', ADD'A', de donde se deduce que—*El volúmen de este prisma es igual al producto de su base* [suma de las bases de los prismas triangulares] *por su altura.*

COROLARIO 2.° *Dos prismas cualesquiera de la misma base ó de base equivalente y de la misma altura son equivalentes.*

Ademas,—*Dos prismas de la misma base ó de base equivalente son proporcionales á su altura*; y recíprocamente, si son de la misma altura, *son proporcionales á sus bases.*

ESCOLIO. En el n.° 432 demostramos que el prisma trian-
Fig. 345. gular oblicuo ABDEFH (*fig.* 345) es *equivalente* al prisma recto M'N'Q'MNQ que tiene por altura el arista M'M ó AE, y por base una seccion MNP perpendicular á las aristas.—La mis-

ma construccion y los mismos raciocinios podrian aplicarse á un prisma cualquiera ABCDEA'B'C'D'E' (*fig.* 340) cortado Fig. 340.
por un plano MNPQR perpendicular á las aristas laterales.— Asi venimos á parar á esta nueva medida del prisma:

El volúmen de un prisma cualquiera ABC... D'E' *es igual al producto de una de sus aristas* AA' *por el area de una seccion* MNPQR *dada perpendicularmente á dicha arista*, espresion notable por su analogía con la del area lateral del prisma (*véase el* número 428). Ademas es muy cómoda en la práctica.

TEOREMA IX.

N.° 439. *El volúmen de un tetraedro cualquiera es igual á la tercera parte del producto de su base por su altura.*

Este teorema es una consecuencia inmediata del corolario al número 434.

COROLARIO 1.° Pudiendo toda pirámide poligonal SABCDE (*fig.* 286) descomponerse en tetraedros de la misma altura por Fig. 286.
medio de planos diagonales tirados por la cúspide S, resulta igualmente que

El volúmen de toda pirámide poligonal tiene por medida la tercera parte del producto de su base por su altura.

COROLARIO 2.° *Dos pirámides cualesquiera de la misma base ó de base equivalente y de la misma altura son equivalentes*, — proposicion que contiene como caso particular el teorema del número 433.

Ademas, — *Dos pirámides de la misma base ó de base equivalente son proporcionales á su altura*; y recíprocamente.

ESCOLIO. Sean V el volúmen de una pirámide, B su base, y H su altura. La espresion abreviada de su volúmen será

$$V=\frac{B\times H}{3} \text{ ó } B\times\frac{H}{3} \text{ ó } \frac{B}{3}\times H.$$

TEOREMA X.

N.° 440. *El volúmen de un poliedro cualquiera es igual á la suma de los volúmenes de todos los tetraedros en que puede siempre descomponerse* (n.° 348).

Esta proposicion es evidente por sí misma.

Teorema XI.

N.° 441. *Las areas de dos poliedros semejantes son porporcionales á los cuadrados de sus aristas, diagonales ó líneas homólogas cualesquiera;* y *sus volúmenes son proporcionales á los cubos de las mismas líneas.*

La primera parte de esta proposicion es facil de demostrar. — Sean M, N, P, Q,..., las caras del primer poliedro, M′, N′, P′, Q′,..., las caras homólogas del segundo; y designemos por a y a' dos líneas homólogas de los mismos, las cuales, segun sabemos, son proporcionales en dos poliedros semejantes (n.° 426, *corol.*).

Esto supuesto, como las caras M y M′, N y N′, P y P′,..., son respectivamente semejantes, tenemos la serie de razones iguales

$$M : M' :: a^2 : a'^2, \quad N : N' :: a^2 : a'^2, \quad P : P' :: a^2 : a'^2, \ldots,$$

de donde $M : M' :: N : N' :: P : P' :: \ldots :: a^2 : a'^2$;

luego, en virtud de una propiedad de las proporciones,

$$M + N + P + \ldots : M' + N' + P' + \ldots :: a^2 : a'^2,$$

ó *area total del primer poliedro* : *area total del segundo* $:: a^2 : a'^2$.

Para la segunda parte, consideremos primero dos tetrae-
Fig. 339. dros semejantes SABC, S′A′B′C′ (*fig.* 339).

Puesto que estos tetraedros son semejantes, darán la proporcion

$$ABC : A'B'C' :: AC^2 : A'C'^2 :: SH^2 : S'H'^2.$$

Multiplicando esta proporcion por esta otra,

$$\tfrac{1}{3} SH : \tfrac{1}{3} S'H' :: AC : A'C' :: SH : S'H',$$

resulta

$$ABC \times \tfrac{1}{3} SH : A'B'C' \times \tfrac{1}{3} S'H' :: AC^3 : A'C'^3 :: SH^3 : S'H'^3,$$

ó bien

vol. del primer tetraedro : *vol. del segundo* $:: SH^3 : S'H'^3 :: a^3 : a'^3$,

representando a y a' dos líneas homólogas cualesquiera.

Sean ahora V, V′, los volúmenes de dos poliedros semejantes cualesquiera, $T_1|T_2|T_3|\ldots$ y $T'_1|T'_2|T'_3|\ldots$ los volúmenes de los tetraedros semejantes en que pueden descomponerse los dos poliedros, a y a' dos líneas homólogas cualquiera. — Tendremos la serie de razones iguales

$$T_1 : T'_1 :: T_2 : T'_2 :: T_3 : T'_3 :: \ldots :: a^3 : a'^3;$$

luego

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots : T'_1 + T'_2 + T'_3 + \ldots :: a^3 : a'^3,$$

ó bien finalmente $\quad V : V' :: a^3 : a'^3;$

L. C. D. D.

Completaremos lo relativo á la medida de los poliedros con dos teoremas importantes sobre la medida de los troncos de prismas y de pirámides.

Teorema XII. (*Fig.* 351.) Fig. 351.

N.° 442. *Todo prisma triangular truncado* ABCDEF, *es equivalente á la suma de tres tetraedros que tiene por base comun una de las bases* ABC *del tronco, y por vértices los de la base opuesta.*

Para probarlo, tiremos los planos AEC, DEC; y el prisma truncado quedará descompuesto en tres tetraedros EABC, EADC, EDFC. — El primero tiene por base ABC, y por vértice el punto E; luego es uno de los tetraedros del enunciado.

El segundo, teniendo por base ADC y por vértice el punto E, puede transformarse en otro BADC que tenga la misma base ADC y por vértice el punto B (n.° 433); pero este puede considerarse como teniendo por base ABC y por vértice el punto D; luego es otro tetraedro del enunciado.

El tercero, EDFC, puede ser reemplazado por el tetraedro BDFC, que tiene la misma base DFC y por vértice el punto B; pero este es equivalente al tetraedro BAFC cuyo vértice es el mismo, y cuya base AFC es equivalente á la base DFC (n.° 211); y este último puede considerarse como que tiene por base ABC y por vértice el punto F; luego satisface tambien al enunciado. Luego, &c.

Escolio. *Un prisma triangular truncado tiene por medida el producto de una de sus bases por la tercera parte de la suma de las tres perpendiculares bajadas á ella respecti-*

vamente desde cada uno de los vértices de la base opuesta.

Si el prisma truncado es *recto*, las perpendiculares son las aristas mismas.

Fig. 352.

TEOREMA XIII. (*Fig.* 352.)

N.° 443. *Un tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides que tengan por altura comun la del tronco, y por bases respectivas, la base inferior del tronco, la base superior, y una figura media proporcional entre ambas.*

Sea, *en primer lugar*, un tronco de tetraedro ABCDEF.

Tiremos las tres diagonales EA, EC, y AF: — La figura queda con esto descompuesta en tres tetraedros EABC, EADF, EAFC. El primero, teniendo por base el triángulo ABC, y por cúspide el punto E, satisface ya al enunciado; el segundo, pudiendo considerarse como que tiene su cúspide en A, y por base el triángulo DEF, satisface tambien al enunciado, pues su altura es la perpendicular comun á las dos bases, y su base DEF es la base superior del tronco.

Nos falta ahora *transformar* el tercer tetraedro EAFC.— Para esto, tiremos desde el punto E la recta EG paralela á AD; como está tirada por un punto del plano EDAB que contiene á la recta AD, se encuentra situada en este plano y encuentra necesariamente á la recta AB en un punto G, que podemos juntar con los puntos C y F por medio de las rectas GC, GF. — Esto supuesto, los dos tetraedros GAFC, EAFC, son *equivalentes*, por tener la base comun AFC, y la misma altura, pues las cúspides G, E, estan situadas en una misma recta paralela á la base. Ahora bien, el tetraedro GAFC puede considerarse como teniendo por cúspide el punto F, y por base el triángulo AGC; luego tiene por altura la del tronco, y solo falta probar que su base AGC es *media proporcional* entre las bases ABC, DEF.

Para esto, tiremos la recta GI paralela á BC: tenemos (n.° 219, *corol.*) la proporcion

$$ABC : AGC :: AGC : AGI;$$

pero el triángulo AGI es igual al triángulo DEF, puesto que tienen un ángulo igual, el uno en A, y el otro en D (n.° 322), formados por

lados iguales $AG = DE$, $AI = DF$;

luego tambien $ABC : AGC :: AGC : DEF$.

Luego el tercer tetraedro EADC puede ser reemplazado por FAGC, que satisface al enunciado.

Consideremos en *segundo lugar* el tronco de pirámide poligonal MNPQR *mnpqr*. — Concluyamos la pirámide, y sea T su cúspide. — En el plano de la base MNPQR construyamos un triángulo ABC equivalente á ella, y tomemos encima del plano un punto cualquiera S cuya distancia al plano ABC sea igual á la distancia del punto T al mismo plano; despues tiremos las rectas SA, SB, SC. — El tetraedro SABC es equivalente á la pirámide TMNPQR, porque tienen la misma altura y bases equivalentes (n.° 439). Si ahora prolongamos el plano de la base superior *mnrpq* hasta su encuentro con el tetraedro SABC, obtendremos una seccion DEF equivalente á la seccion *mnpqr* (n.° 344, *corol.*), lo cual da entonces el tetraedro SDEF equivalente á la pirámide T*mnpqr*; de donde se sigue que el tronco de tetraedro ABCDEF es equivalente al tronco de pirámide MNPQR *mnpqr*. Pero el primero, segun acabamos de ver, equivale á la suma de tres tetraedros que tengan por altura la del tronco, y por bases la base inferior, la superior, y una media proporcional entre ambas. Luego, puesto que las bases del tronco de tetraedro son tambien equivalentes á las del tronco de pirámide, podemos decir que el tronco de pirámide tiene igualmente por espresion de su volúmen, &c.; *L. C. D. D.*

Escolio. Llamando H la altura de un tronco de pirámide de bases paralelas, B y b' sus bases, y V su volúmen, resulta (n.° 440, *escol.*) para espresion abreviada del volúmen del tronco,

$$V = \frac{H}{3}(B + b' + \sqrt{B \times b'})$$

[porque se sabe que en general $\sqrt{a \times b}$ representa una media proporcional entre las cantidades a y b].

CAPITULO II.

AREAS Y VOLÚMENES DEL CILINDRO Y DEL CONO. — AREAS Y VOLÚMENES DE LA ESFERA Y DE SUS DIVERSAS PARTES.

§. I. *Del cilindro y del cono.*

Teorema I.

N.° 444. *El area de la superficie lateral* [ó convexa] *de un cilindro recto es igual al producto de la circunferencia de su base multiplicada por su lado ó altura.*

En efecto, vimos (n.° 356) que esta superficie puede desarrollarse en un plano rectangular cuya base sea la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, y por altura su lado. Pero el rectángulo tiene por medida el producto de su base por su altura (n.° 213); luego, &c.

Escolio. Llamemos A ó H al lado ó altura del cilindro, R al radio de su base, y S á su area; tendremos

$$S = 2\pi R \times A = 2\pi R \times H = 2\pi RA = 2\pi RH.$$

Teorema II.

N.° 445. *El volúmen de un cilindro es igual al producto del area de su base por su altura.*

En efecto, el cilindro puede considerarse como un prisma regular de infinito número de caras laterales (n.° 355). Pero el prisma tiene por medida el producto de su base por su altura (n.° 438); luego tambien, &c.

Escolio. Sea V el volúmen del cilindro; tendremos

$$V = \pi R^2 \times H = \pi R^2 H,$$

[siendo πR^2 la espresion del círculo que le sirve de base (número 250)].

Teorema III.

N.° 446. *El area de la superficie lateral* [ó convexa] *de un cono recto es igual al producto de la circunferencia de su base por la mitad de su lado ó arista.*

En efecto, se demostró (n.° 361) que esta superficie, desarrollada en un plano, equivale á un sector circular que tiene por base un arco de círculo igual en longitud á la circunferencia de la base del cono, descrito con el lado de este como radio. Pero el area de este sector tiene por medida el producto del arco que le sirve de base, por la mitad del radio; luego, &c.

Escolio. Sean A el arista ó lado del cono, R el radio de su base, y S su superficie; tendremos para fórmula de su area

$$S = \pi R \times A = \pi RA.$$

Teorema IV. (*Fig.* 353.)

Fig. 353.

N.° 447. *La superficie lateral* [ó convexa] *de un tronco de cono recto*, ABA'B', *de bases paralelas, tiene por medida el producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de las bases*, ó bien, *por la circunferencia* IK *de la seccion dada á igual distancia de las dos bases.*

Sea S el vértice del cono entero, y concibamos que su superficie se haya desarrollado en un plano (n.° 361). — El desarrollo de la superficie lateral del tronco de cono resultará en forma de un trapecio circular BDB'D' (n.° 252, *escol.* 1.°) que tiene por lado el lado BB' del tronco, y por bases, arcos de círculos iguales en longitud á las circunferencias de las dos bases del tronco. Pero este trapecio tiene por medida (*véase el mismo número*) el producto de su lado por la semisuma de sus bases, ó bien, por el arco de círculo I'K' trazado á igual distancia de ambas, el cual representa la circunferencia desarrollada de la seccion dada á igual distancia de las dos bases en el tronco de cono; luego, &c.

Escolio. Un cono entero puede considerarse como un tronco de cono cuya base superior es nula; y los resultados obtenidos para este se verifican tambien en este caso particular. — Luego, en virtud de lo que acabamos de demostrar, — *El area de la superficie lateral de un cono tiene por espresion el producto de su lado por la circunferencia de la* *seccion dada á igual distancia del vértice y de la base*; — lo cual está conforme con la medida establecida en el número 446, porque esta circunferencia es la mitad de la circunferencia de la base.

Teorema V.

N.° 448. *El volúmen de un cono recto es igual á la tercera parte del producto de su base por su altura.*

Porque el cono puede considerarse como una pirámide regular de infinito número de caras (n.° 360); pero el volúmen de una pirámide vale la tercera parte del producto de su base por su altura; luego, &c.

Advert. Designando por H la altura, y por R el radio de la base, lo cual da πR^2 para su area, tendremos

$$\textit{vol. del cono} = \pi R^2 \times \frac{H}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Teorema VI.

N.° 449. *El volúmen de un tronco de cono de bases paralelas es igual á la suma de los volúmenes de tres conos que tienen por altura comun la del tronco, y por bases uno la base inferior, otro la base superior, y el tercero una media proporcional entre ambas.*

La misma demostracion que para el tronco de pirámide (*véase el* número 443).

Escolio. Sean R, R′, los radios de las bases, H la altura del tronco, y V su volúmen; tendremos

$$V = \frac{H}{3}(\pi R^2 + \pi R'^2 + \pi RR') = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R'^2 + RR'):$$

porque la media proporcional está representada por

$$\sqrt{\pi R^2 \times \pi R'^2} \text{ ó } \pi RR'.$$

N.° 450. Dos cilindros ó dos conos son semejantes cuando estan engendrados por rectángulos ó triángulos rectángulos semejantes. — Esto supuesto,

TEOREMA VII.

Las areas de dos cilindros ó de dos conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados, de sus alturas, ó de los radios de sus bases; —y los volúmenes son proporcionales á los cubos de las mismas líneas.

Sean R y r, A y a, H y h, S y s, V y v, los radios de las bases, los lados, las alturas, las areas, y los volúmenes de dos cilindros ó de dos conos semejantes.

Tenemos primero, para dos cilindros semejantes,

$$S = 2\pi R\times H,\quad s = 2\pi r\times h,\quad (\text{n.}^\circ\ 444);$$

de donde $$S : s :: RH : rh;$$

pero siendo semejantes los rectángulos generadores, dan

$$\cancel{R : r} :: \cancel{H : h};$$

de donde $$R\times H : r\times h :: H^2 : h^2 :: R^2 : r^2;$$

luego $$S : s :: H^2 : h^2 :: R^2 : r^2.$$

Tambien tenemos $$V = \pi R^2\times H,\quad v = \pi r^2\times h;$$

de donde $$V : v :: R^2H : r^2h;$$

pero de $$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2,$$

se deduce $$R^2H : r^2h :: H^3 : h^3 :: R^3 : r^3;$$

luego $$V : v :: H^3 : h^3 :: R^3 : r^3.$$

Si se trata de dos conos semejantes, tendremos

$$S = \pi R\times A,\quad s = \pi r\times a\ (\text{n.}^\circ\ 446);$$

de donde $$S : s :: R\times A : r\times a;$$

pero los triángulos generadores, siendo semejantes, dan

$$R : r :: A : a;$$

~~de donde~~ $$\cancel{R\times A : r\times a :: A^2 : a^2 :: R^2 : r^2 :: H^2 : h^2;}$$

luego $$S : s :: A^2 : a^2 :: R^2 : r^2 :: H^2 : h^2.$$

Finalmente, $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$, $v = \frac{\pi r^2 h}{3}$ (n.° 447);

de donde $V : v :: R^2 H : r^2 h$; $H : r :: R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$;
$V : v :: R^2 R : r^2 r :: H^2 H : h^2 h$

pero de $R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$,

se deduce $R^2 H : r^2 h :: H^3 : h^3$;

luego $V : v :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3 :: R^3 : r^3$.

L. C. D. D.

§. II. *De la esfera.*

N.° 451. **Nuevas definiciones.** Se da el nombre de *zoza esférica* á toda porcion de la superficie de una esfera, comprendida entre dos planos paralelos; las *bases* de la zona son los dos círculos determinados por los dos planos.

Cuando uno de los planos es tangente á la esfera (n.° 365), la zona se llama *de una sola base*, y toma tambien el nombre de *càsquete esférico.*

Segmento esférico es la parte de esfera comprendida entre dos planos paralelos; y los círculos determinados por estos son bases del segmento á la vez que de la zona esférica correspondiente.

Si uno de los planos es tangente, el segmento se llama *de una sola base.*

Altura de una zona ó de un segmento esférico es la distancia de las bases; ó bien la parte de diámetro perpendicular á las bases, comprendida entre ellas.

En fin, *sector esférico* es la figura engendrada por un sector circular (n.° 14) girando al rededor de uno de sus lados.— En otras palabras, es la parte de esfera comprendida entre una zona de una sola base, y la superficie cónica que tiene por cúspide el centro, y por base la de la zona.

(*Véanse* ademas los números 366 y 374 para las definiciones de *huso* y *úngula esférica,* de *triángulo*, *tetraedro* y *pirámide esféricos.*)

Fig. 354 **Lema.** (*Fig.* 354.)

N.° 452. *Hallándose situadas en un mismo plano una recta* AB *de longitud determinada*, *y una recta indefinida* XY, si se supone que la primera haga una revolucion entera en torno de la segunda, *la superficie engendrada por la primera es equivalente á la de un cilindro que tiene por altura la proyeccion de la recta determinada sobre la otra, y por radio de su base la perpendicular* CO *levantada á la primera recta* AB *por su punto medio* C, *y prolongada hasta encontrar á la recta indefinida*: — O en otros términos,

$$superf.\ AB = PQ \times circ.\ OC.$$

En efecto, esta superficie es evidentemente la de un tronco de cono de bases paralelas, que son los círculos AP y BQ; y si, desde el punto C, bajamos la recta CI perpendicular á XY, tendremos

$$superf.\ AB = AB \times circ.\ CI = AB \times 2\pi\, CI \text{ (n.° 447).}$$

Esto supuesto, tiremos la recta AK perpendicular á BQ: los dos triángulos ABK, COI, son semejantes por tener sus lados perpendiculares, y dan (n.° 194) la proporcion

$$AB : OC :: AK : CI; \text{ de donde } AB : 2\pi OC :: AK : 2\pi CI;$$

y $$AB \times 2\pi CI = AK \times 2\pi OC = PQ \times circ.\ OC;$$

Luego tambien, $superf.\ AB = PQ \times circ.\ OC.$
L. C. D. D.

Advert. Pueden suceder como casos particulares, que la recta AB esté situada en la disposicion que marca AB (*fig.* 354, *bis.*), hallándose el punto A situado en el eje XY, ó bien, en la disposicion que marca A'B', paralelamente al eje. Fig. 354.

En el primer caso, tenemos, $superf.\ AB = AB \times circ.\ CI$ (n.° 447, *escol.*); pero los dos triángulos semejantes ABQ, COI, dan tambien

$$AB \times circ.\ CI = AQ \times circ.\ OC;$$

luego $$superf.\ AB = AQ \times circ.\ OC.$$

En el segundo caso, la superficie engendrada por A'B' es la de un cilindro cuya altura ó lado es A'B' ó P'Q', y la base es el círculo B'Q', ó el círculo O'C'; luego

$$superf.\ A'B' = P'Q' \times circ.\ O'C'.$$

Por consiguiente, la proposicion es tambien verdadera en estos dos casos.

N.º 453. CorolaRIO 1.º *El area de la superficie engendrada por una porcion de polígono regular*, ó mas general-
Fig. 355. mente, *por una línea poligonal regular* ABCDE (*fig.* 355) *que gira al rededor del diámetro* AA′ *del círculo circunscrito, es igual al producto de su altura* AS, *multiplicada por la circunferencia del círculo inscrito.*

Bájense desde los puntos B, C, D, E, las perpendiculares BP, CQ, DR, ES, al diámetro AA′, y desde el centro O las perpendiculares OI, OK,..., á los lados AB, BC,... En virtud del lema precedente, tenemos

$$\textit{area}\ AB = AP \times \textit{circ.}\ OI,$$
$$\textit{area}\ BC = PQ \times \textit{circ.}\ OK,$$
$$\textit{area}\ CD = QR \times \textit{circ.}\ OL;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de donde, sumando y observando que $OI = OK = OQ,\ldots$, resulta

$$\textit{area}\ ABCDE = (AP + PQ + QR + \ldots)\textit{circ.}\ OI = AS \times \textit{circ.}\ OI.$$

Del mismo modo tendriamos

$$\textit{area}\ BCDE = PS \times \textit{circ.}\ OI.$$

Fig. 355.

Teorema I. (*Fig.* 355.)

N.º 454. *El area de una zona esférica*, sea de una sola base AMBM′C, sea de dos bases, BM′CM″D, *es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo de la esfera*, *circ.* OA, *multiplicada por su altura* AQ ó PR;

Y — *El area de toda la esfera es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo, multiplicada por su diámetro.*

En efecto, los arcos AMBM′C, BM′CM″D, y la semicircunferencia ADA′, pueden considerarse como líneas poligonales regulares de infinito número de lados [ó *elementos* (número 245)]; en cuyo caso el radio del círculo inscrito se hace igual al de el círculo circunscrito, ó al de la esfera. — Tenemos pues

$$\textit{area}\ \mathrm{AMBM'C} = \mathrm{AQ} \times \textit{circ.}\ \mathrm{OA},$$

$$\textit{area}\ \mathrm{BM'CM''D} = \mathrm{PR} \times \textit{circ.}\ \mathrm{OA},$$

$$\textit{area total de la esfera} = \mathrm{AA'} \times \textit{circ.}\ \mathrm{OA};$$

L. C. D. D.

Advert. Sean R el radio de una esfera, H la altura de una zona de una ó de dos bases, y S el area de esta zona ó de toda la esfera; — tendremos las fórmulas

$$S = H \times 2\pi R = 2\pi RH, \quad S = 2R \times 2\pi R = 4\pi R^2;$$

y esta última demuestra que — *El area total de la esfera es cuadrupla de la de su círculo máximo.*

COROLARIO. Si en una esfera dada tomamos por *unidad de superficie* el huso *recto* (n.° 366, *advert.*) ó la *cuarta parte* de la superficie total de la esfera, y el ángulo *recto* por *unidad* de ángulo, se reconoce facilmente que

El area de un huso esférico cualquiera ABCA′ (*fig.* 356) *está espresada por su ángulo* A; Fig. 356.

Lo cual significa que, designando F el *area* de un huso recto, se tiene la proporcion

$$\textit{huso}\ \mathrm{ABCA'} : \mathrm{F} :: \mathrm{A} : \textit{un recto}.$$

Porque si tiramos por el centro un plano BCB′C′ perpendicular á la arista AA′ del huso, tenemos

$$\textit{huso}\ \mathrm{ABCA'} : \textit{area total de la esfera} :: \textit{arco}\ \mathrm{BC} : \textit{circ.}\ \mathrm{BCB'C'};$$

de donde $\quad \textit{huso}\ \mathrm{ABCA'} : 4\mathrm{F} :: \mathrm{A} : 4\ \textit{rectos},$

y por consiguiente, $\textit{huso} : \mathrm{F} :: \mathrm{A} : \textit{un recto}.$

Para abreviar suele decirse que *huso* ABCA′ = A.

TEOREMA II. (*Fig.* 357.) Fig. 357.

N.° 455. *El area de un triángulo esférico cualquiera* ABC [es decir, la *razon* entre este triángulo y el huso recto], *es igual á el esceso de la semisuma de sus tres ángulos sobre un ángulo recto*, ó mas exactamente, *es igual á la razon entre este esceso y el ángulo recto.*

Tomemos por plano de la figura (n.° 369) el de la circunferencia de círculo máximo BCB'C', al cual pertenece el arco BC, lado del triángulo ABC, y concluyamos las circunferencias ABA'B', ACA'C', correspondientes á los otros dos lados AB, AC. — Esto supuesto,

El huso esférico ABCA', cuyo ángulo es A, se compone de los dos triángulos ABC, A'BC; pero este último es simétrico respecto del triángulo AB'C' (n.° 335), y estos triángulos son equivalentes (n.° 375); luego el huso ABCA' es igual á la suma de los dos triángulos ABC, AB'C'.

Ademas, es evidente que los husos en B y en C son respectivamente iguales á las sumas de triángulos BAC y B'AC, CAB y C'AB. — Tenemos pues las igualdades

$$\mathrm{ABC} + \mathrm{AB'C'} = \textit{huso}\ \mathrm{A} = \mathrm{A}\ (\textit{corolario precedente}),$$
$$\mathrm{BAC} + \mathrm{B'AC} = \textit{huso}\ \mathrm{B} = \mathrm{B},$$
$$\mathrm{CAB} + \mathrm{C'AB} = \textit{huso}\ \mathrm{C} = \mathrm{C};$$

de donde, sumando y observando que

$$\mathrm{ABC} + \mathrm{AB'C'} + \mathrm{B'AC} + \mathrm{C'AB}$$

forman la superficie de un hemisferio, y valen 2F, tendremos

$$2\,\mathrm{ABC} + 2\mathrm{F} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}.$$

Por consiguiente, $\quad \textit{area}\ \mathrm{ABC} = \dfrac{\frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) - 1\ \textit{recto}}{1\ \textit{recto}},$

tomándose F por *unidad de superficie*, y el *ángulo recto* por *unidad de ángulo*.

Advert. Designando por R el radio de la esfera, tendremos para fórmula del valor absoluto del area del triángulo

$$\textit{area}\ \mathrm{ABC} = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) - 1\ \textit{recto}}{1\ \textit{recto}} \cdot \pi \mathrm{R}^2.$$

Fig. 358.

LEMA. (*Fig.* 358.)

N.° 456. *El volúmen del espacio engendrado por la revolucion de un triángulo cualquiera* OAB *girando al rededor de una recta indefinida* XY, *tirada en su plano por uno de sus vértices* O, *tiene por espresion el producto de la superfi-*

cie engendrada por el lado opuesto á dicho vértice, multiplicada por la tercera parte de la altura* OC *del triángulo correspondiente á este lado considerado como base.

[La figura resultante es el espacio limitado por la superficie del tronco de cono cuyas bases tienen por radios las perpendiculares AP, BQ, bajadas desde los puntos A, B, al eje por una parte, y por la otra por las dos superficies cónicas que tienen el punto O por vértice comun, y los círculos AP, BQ, por bases.]

Para demostrar esta proposicion, prolonguemos el lado BA hasta encontrar en S con la recta XY, y procuremos primero valuar el volúmen engendrado por el triángulo OBS. — Este volúmen se compone evidentemente de los dos conos engendrados por los triángulos rectángulos OBQ, SBQ.

Ahora bien,

$$vol.\,\mathrm{OBQ} = \pi\overline{\mathrm{BQ}}^2 \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OQ},\quad vol.\,\mathrm{SBQ} = \pi\overline{\mathrm{BQ}}^2 \times \tfrac{1}{3}\mathrm{SQ}\ (\text{n.}^{\text{o}}\ 448);$$

luego $$vol.\,\mathrm{OBS} = \pi\overline{\mathrm{BQ}}^2 \times \tfrac{1}{3}(\mathrm{OQ} + \mathrm{SQ}) = \tfrac{1}{3}\pi\overline{\mathrm{BQ}}^2 \times \mathrm{OS}.$$

Esta última espresion equivale á $\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{BQ} \times \mathrm{BQ} \times \mathrm{OS}$; pero $\mathrm{BQ} \times \mathrm{OS}$, espresa el *duplo* del area del triángulo OBS (n.º 215), y puede ser reemplazado por $\mathrm{SB} \times \mathrm{OC}$ que tambien representa lo mismo; luego tendremos

$$vol.\,\mathrm{OBS} = \tfrac{1}{3}\pi\,\mathrm{BQ} \times \mathrm{SB} \times \mathrm{OC} = \pi\,\mathrm{BQ} \times \mathrm{SB} \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OC}.$$

Si ahora recordamos que $\pi\,\mathrm{BQ} \times \mathrm{SB}$ espresa el area de la superficie cónica engendrada por SB (n.º 446), se obtiene

$$vol.\,\mathrm{OBS} = \textit{area del cono}\ \mathrm{SB} \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OC}.$$

Del mismo modo se hallaria que

$$vol.\,\mathrm{OAS} = \textit{area del cono}\ \mathrm{SA} \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OC}.$$

Siendo el volúmen buscado la diferencia entre estos dos, hallamos, finalmente,

$$vol.\,\mathrm{OAB} = (\textit{area}\ \mathrm{SB} - \textit{area}\ \mathrm{SA}) \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OC},$$

ó $$vol.\,\mathrm{OAB} = \textit{area}\ \mathrm{AB} \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OC};$$

L. C. D. D.

Advert. El teorema es tambien verdadero, pero exige una

Fig. 358, bis. demostracion especial, cuando la base AB (*fig.* 358, *bis.*) del triángulo OAB es paralela á la línea que sirve de eje.

El volúmen engendrado entonces es la diferencia entre el volúmen del cilindro ABPQ y los volúmenes de los conos AOP, BOQ. Pero tenemos

$$\textit{cil. } \mathrm{ABQP} = \pi \overline{\mathrm{BQ}}^2 \times \mathrm{AB} = \pi \overline{\mathrm{OC}}^2 \times \mathrm{PQ} \text{ (n.° 445)},$$

$$\textit{cono } \mathrm{AOP} + \textit{cono } \mathrm{BOQ} = \pi \overline{\mathrm{OC}}^2 \times \frac{\mathrm{PQ}}{3} \text{ (n.° 448)};$$

$$\text{de donde } \textit{vol. } \mathrm{AOB} = \pi \overline{\mathrm{OC}}^2 \times \frac{2}{3}\mathrm{PQ} = 2\pi \mathrm{OC} \times \mathrm{PQ} \times \frac{\mathrm{OC}}{3};$$

pero $2\pi\,\mathrm{OC} \times \mathrm{PQ}$, ó $2\pi\,\mathrm{BQ} \times \mathrm{AB}$, es la espresion del area lateral del cilindro engendrado por AB. — Luego

$$\textit{vol. } \mathrm{AOB} = \textit{area } \mathrm{AB} \times \tfrac{1}{3}\mathrm{OC}.$$

Corolario. *El volúmen del espacio engendrado por un* Fig. 355. *sector poligonal* OABCDO, *ó* OBCDEO (*fig.* 355), *girando al rededor de un diámetro* AA′, *es igual al producto del area de la superficie que le sirve de base, multiplicada por la tercera parte del radio del círculo inscrito.*

Porque, en virtud del lema precedente, tenemos

$$\textit{vol. } \mathrm{OAB} = \textit{area } \mathrm{AB} \times \tfrac{1}{3}\mathrm{OI}, \quad \textit{vol. } \mathrm{OBC} = \textit{area } \mathrm{BC} \times \tfrac{1}{3}\mathrm{OK}, \ldots;$$

de donde, á causa de ser $\mathrm{OI} = \mathrm{OK} = \mathrm{OL} = \ldots$,

$$\textit{vol. } \mathrm{OABCDO} = \textit{area } \mathrm{ABCD} \times \tfrac{1}{3}\mathrm{OI},$$
$$\textit{vol. } \mathrm{OBCDEO} = \textit{area } \mathrm{BCDE} \times \tfrac{1}{3}\mathrm{OI}.$$

Fig. 355.

Teorema III. (*Fig.* 355.)

N.° 457. *El volúmen de un sector esférico cualquiera,* OAMBM′CO, *es igual al producto de la zona esférica que le sirve de base, multiplicada por la tercera parte del radio de la esfera.*

Porque el sector poligonal generador, OAMBM′CO, se compone de una infinidad de triángulos isósceles que tienen por vértice el punto O, y por bases los *elementos* (n.° 245) del arco AMBM′C. — Pero el conjunto de estos triángulos, girando en torno de AA′ engendra un volúmen que tiene por espresion el producto del area engendrada por cada uno de los elementos correspondientes, multiplicada por el tercio del radio (n.º 456); luego tambien, &c.

Por consiguiente,

El volúmen de la esfera total tiene por espresion el producto de su area total, multiplicada por el tercio del radio.

ESCOLIO 1.º Tambien se obtiene esta última espresion considerando la superficie esférica como compuesta de un número *infinito de facetas infinitamente pequeñas*, y sensiblemente *planas*, que son entonces las bases de otros tantos conos ó pirámides, cuyo vértice comun es el centro O de la esfera. — De donde resulta que el volúmen de todos estos conos ó pirámides, es decir el volúmen total de la esfera, tiene por espresion el producto de la suma de todas las bases, ó el area total de la esfera, multiplicada por el tercio de la altura comun, que es el radio de la esfera.

De esto se deduce tambien inmediatamente, que

El volúmen de un tetraedro, y en general de una pirámide esférica, es igual al area del triángulo ó del polígono que le sirve de base, multiplicada por el tercio del radio.

ESCOLIO 2.º Llamando R al radio de una esfera, resulta, para espresion de su volúmen V,

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

ó bien, designando por D su diámetro, que es igual á 2R,

$$V = \frac{4}{3}.\pi\frac{D^3}{8} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Respecto del sector esférico, sea H la altura de la zona correspondiente; tendremos

$$V = 2\pi RH \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Advert. En las aplicaciones se necesita muy á menudo recordar estas fórmulas.

Fig. 359

TEOREMA IV. (*Fig.* 359.)

N.º 458. *El volúmen de un segmento esférico* BMCQP *es igual á la suma de los volúmenes*, — 1.º — de UNA ESFERA *que tiene por diámetro la altura* PQ *del segmento*, — 2.º — de UN CILINDRO *cuya altura fuera la misma altura dicha, y la base* UNA MEDIA DIFERENCIAL *entre las dos bases del segmento*; es decir que se tiene

$$vol.\ \mathrm{BMCQP} = \frac{1}{6}\pi\overline{\mathrm{PQ}}^3 + \frac{circ.\ \mathrm{PQ} + circ.\ \mathrm{CQ}}{2}.\mathrm{PQ}.$$

En efecto, el volúmen buscado se compone evidentemente del volúmen engendrado por el segmento circular BMCIB girando al rededor de AA', y del volúmen del tronco de cono engendrado por el trapecio BCQP. — Procuremos primero determinar el volúmen BMCIB.

Tenemos $vol.\ \mathrm{BMCIB} = vol.\ \mathrm{OBMC} - vol.\ \mathrm{OBC}$;

pero $vol.\ \mathrm{OBMC} = area\ de\ la\ zona\ \mathrm{BMC} \times \frac{1}{3}\mathrm{OC}$ (n.º 457),

ó $vol.\ \mathrm{OBMC} = \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{OC}}^2 \times \mathrm{PQ}$ (n.º 457, *escolio* 2.º),

y $vol.\ \mathrm{OBC} = \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{OI}}^2 \times \mathrm{PQ}$ (n.º 456, *corolario.*);

asi pues $vol.\mathrm{BMCIB} = \frac{2}{3}\pi.(\overline{\mathrm{OC}}^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2)\ \mathrm{PQ} = \frac{2}{3}\pi.\overline{\mathrm{CI}}^2.\mathrm{PQ}$;

pero $\mathrm{CI} = \frac{1}{2}\mathrm{CB}$; de donde $\overline{\mathrm{CI}}^2 = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{CB}}^2$;

luego finalmente, $vol.\mathrm{BMCIB} = \frac{2}{3}\pi.\frac{1}{4}\overline{\mathrm{CB}}^2.\mathrm{PQ} = \frac{1}{6}\pi.\overline{\mathrm{CB}}^2.\mathrm{PQ}$.

Esto supuesto, sumemos con este volúmen el del tronco de cono BCQP, es decir,

$$\frac{1}{3}\pi(\overline{\mathrm{CQ}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \mathrm{CQ}.\mathrm{BP}).\mathrm{PQ}\ (\text{n.º } 449);$$

y tendremos

$$vol.\ \mathrm{BMCQP} = \frac{1}{6}\pi.\overline{\mathrm{CB}}^2.\mathrm{PQ} + \frac{1}{3}\pi(\overline{\mathrm{CQ}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \mathrm{CQ}.\mathrm{BP}).\mathrm{PQ},$$

ó bien, reduciendo á un comun denominador, y sacando $\frac{1}{6}\pi . PQ$ por factor comun,

$$vol.\ BMCQP = \frac{1}{6}\pi . PQ\ (\overline{CB}^2 + 2\overline{CQ}^2 + 2\overline{BP}^2 + 2CQ.BP).$$

Observemos ahora que

$$\overline{CB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{PQ}^2 + (CQ\text{-}BP)^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 + \overline{BP}^2 \text{-} 2CQ.BP;$$

de donde, sustituyendo en la espresion precedente, y reducien-

do, $$vol.\ BMCQP = \frac{1}{6}\pi.(\overline{PQ}^2 + 3\,\overline{CQ}^2 + 3\overline{BP}^2)\ PQ,$$

espresion que puede descomponerse en las dos siguientes:

$$\frac{1}{6}\pi\overline{PQ}^3 \text{ y } \frac{1}{2}(\pi\overline{CQ}^2 + \pi\overline{BP}^2).PQ \text{ ó } \times \frac{circ.\ CQ + circ.\ BP}{2}.\ PQ;$$

L. C. D. D.

Escolio general *sobre la esfera.*— Los cuatro teoremas precedentes y las consecuencias que hemos deducido de ellos nos suministran el medio de obtener las areas y los volúmenes de todas las partes de una esfera conocido su radio.

Añadiremos sin embargo que la *úngula esférica*, segun se definió en el número 366, *advert.*, *tiene por medida la razon entre el ángulo recto y el ángulo rectilíneo correspondiente*, tomándose por unidad la úngula terminada por un huso recto, que es la cuarta parte de la esfera (n.° 454, *corol.*).

Teorema V.

N.° 459. *Las areas totales de dos esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros; y sus volúmenes son proporcionales á los cubos de las mismas líneas.*

En efecto, las fórmulas

$$S = 4\pi R^2, \quad S' = 4\pi R'^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V' = \frac{4}{3}\pi R'^3,$$

dan $$S : S' :: 4\pi R^2 : 4\pi R'^2 :: R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2,$$

y $$V : V' :: \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi R'^3 :: R^3 : R'^3 :: D^3 : D'^3.$$

Escolio. Dos *sectores* esféricos se llaman semejantes en esferas de radios diferentes, R, R′, cuando los sectores circulares *generadores* son *semejantes*, es decir (n.° 252), corresponden *á un mismo ángulo en el centro*; y sería facil reconocer

1.° — Que *las zonas semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios y á los cuadrados de las alturas*; — 2.° — que *los sectores esféricos semejantes son proporcionales á los cubos de las mismas líneas.*

Terminaremos este capítulo con una comparacion muy curiosa entre las *areas* y los *volúmenes* de los tres cuerpos redondos.

De la esfera, cilindro y cono circunscritos.

N.° 460. Sean un círculo descrito con un radio $CD = R$
Fig. 360. (*fig.* 360), y un cuadrado EFGK, y un triángulo equilátero SAB, circunscritos al círculo; — las bases KG, AB, de estas últimas figuras, se suponen tangentes en el mismo punto D del círculo.

Tenemos evidentemente

$$KG = CD = 2R;$$

y ademas se demostró en el corolario 2.° del número 237, que

$$AB = SA = 2R\sqrt{3}, \qquad SD = 3OD = 3R.$$

Esto supuesto, hagamos girar el semicírculo CID, el rectángulo CEKD, y el triángulo rectángulo SAD, al rededor del eje SD. — En este movimiento, las tres figuras engendrarán *una esfera* de diámetro 2R, *un cilindro* que tendrá el radio $DK = R$ y la altura $EK = CD = 2R$, y *un cono* cuya base tendrá por radio $AD = R\sqrt{3}$, siendo el lado $SA = 2R\sqrt{3}$ y laa ltura $SD = 3R$.

Estas dos últimas figuras se llaman *cilindro* y *cono equilátero circunscrito.*

Valuemos sucesivamente las areas y volúmenes de estos tres cuerpos.

1.° — *area total de la esfera* $= 4\pi R^2$ (n.° 454),

volúmen de la esfera $= \frac{4}{3}\pi R^3$ (n.° 457),

2.° — *area de la superf. lat. del cil.* $= 4\pi R^2$ (n.° 444),

ó, añadiendo las dos bases cuyo valor es $2\pi R^2$, *area total del cilindro* $= 6\pi R^2$,

volúmen del cilindro $= 2\pi R^3$ (n.º 445),

3.º — *area de la superf. lat. del cono* $= 6\pi R^2$ (n.º 446);

ó, añadiendo la base cuyo valor es $3\pi R^2$,

area total del cono $= 9\pi R^2$,

volúmen del cono $= 3\pi R^3$ (n.º 448).

Si comparamos primero la esfera con el cilindro, vemos que — *El area total de la esfera es igual á el area de la superficie lateral del cilindro, y á las dos terceras partes del area total de este; — el volúmen de la esfera vale tambien las dos terceras partes del volúmen del mismo.*

Luego, — *los volúmenes son entre sí como las areas totales.*

Comparando en seguida la esfera con el cono se ve que — *El area total de la esfera vale $\frac{2}{3}$ del area lateral del cono, ó $\frac{4}{9}$ del area total de este; — el volúmen de la esfera vale tambien $\frac{4}{9}$ del volúmen del cono.*

Luego, — *los volúmenes son tambien entre sí como las areas totales.*

En fin, comparando entre sí el cilindro y el cono, se ve que las *areas laterales*, las *areas totales* y los *volúmenes* estan respectivamente *en la misma razon* 2 : 3.

Escolio. Esta propiedad del cilindro y del cono circunscritos á la esfera, que consiste en que los volúmenes de la esfera y del cilindro ó del cono son entre sí como sus areas totales, no es particular del cono y el cilindro, sino que tambien pertenece á todos los poliedros cuyas diferentes caras son tangentes á la esfera.

En efecto, un cuerpo de esa especie puede descomponerse en pirámides que tengan por vértice comun el centro de la esfera, y por bases respectivas las caras del poliedro. — Por consiguiente, su volúmen tiene por espresion el producto de la suma de todas las bases, ó el area total del poliedro, multiplicada por el tercio de la altura comun que es el radio de la esfera (n.º 365); y como el volúmen de la esfera es igual al producto de su area total, multiplicada por el tercio del radio, resulta necesariamente que los volúmenes han de ser entre sí como las areas.

CAPITULO III.

PROBLEMAS NUMÉRICOS SOBRE LA ESTENSION CON TRES DIMENSIONES.

§. I. *Sobre los poliedros.*

Fig. 286

PROBLEMA I. (*Fig.* 286.)

N.° 461. *Conociendo las bases y la altura de un tronco de pirámide cualquiera de bases paralelas, calcular las alturas de la pirámide total y de la pirámide deficiente.*

Sean B y b las dos bases del tronco, H su altura, X y x las alturas de las dos pirámides; lo cual da $X - x = H$.

Esto supuesto, como los polígonos B, b, son semejantes (n.° 334), tenemos la proporcion

$$B : b :: X^2 : x^2, \quad \text{ó} \quad \sqrt{B} : \sqrt{b} :: X : x;$$

de donde $\sqrt{B} - \sqrt{b} : \sqrt{B} :: X - x : X$; luego $X = \dfrac{H . \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$;

y $\quad \sqrt{B} - \sqrt{b} : \sqrt{b} :: X - x : x$; luego $x = \dfrac{H . \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$.

ESCOLIO 1.° Sean A^2, a^2, los cuadrados respectivamente equivalentes á las dos bases; entonces esas dos fórmulas se truecan en estas

$$X = \frac{H . A}{A - a}, \qquad x = \frac{H . a}{A - a},$$

Puede suponerse, para mayor sencillez, que A, a, designan lados homólogos de las bases; porque teniendo entonces

$$B : b :: A^2 : a^2, \quad \text{ó} \quad \sqrt{B} : \sqrt{b} :: A : a,$$

resulta

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}=\frac{A}{A-a}, \qquad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}=\frac{a}{A-a};$$

con lo cual resultan las mismas espresiones de X, x.

ESCOLIO 2.° Esto conduce á una demostracion sencilla, pero *algebráica*, del volúmen de un tronco de pirámide cualquiera de bases paralelas.

Designemos por V el volúmen buscado, por P, p, los volúmenes de las dos pirámides: tendremos

$$V=P-p;$$

pero $$P=\frac{X}{3}\cdot B, \qquad p=\frac{x}{3}\cdot b \qquad (\text{n.° } 439),$$

ó, poniendo en lugar de X, x, B, b, sus valores,

$$P=\frac{H}{3}\cdot\frac{A^3}{A-a}, \quad p=\frac{H}{3}\cdot\frac{a^3}{A-a};$$

luego $$V=P-p=\frac{H}{3}\cdot\frac{A^3-a^3}{A-a}.$$

Pero en el Algebra se ha visto, que A^3-a^3 dividido por $A-a$, da un cociente exacto é igual á A^2+Aa+a^2.

Luego finalmente

$$V=\frac{H}{3}(A^2+a^2+Aa)=\frac{H}{3}(B+b+\sqrt{Bb}),$$

espresion que, traducida en lenguaje geométrico, da lugar al enunciado del número 443.

ESCOLIO. Respecto de un tronco de cono recto con bases paralelas, como tenemos $B=\pi R^2$, $b=\pi r^2$, siendo R y r los radios de las dos bases, resulta

$$1.° \; X=\frac{H\cdot R\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}(R-r)}=\frac{HR}{R-r}, \quad x=\frac{H\cdot r\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}(R-r)}=\frac{Hr}{R-r};$$

$$2.^{o}\ V = \frac{\pi R^2 . X}{3} - \frac{\pi r^2 . x}{3} = \frac{H}{3}\pi\left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right)$$

$$= \frac{H}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr).$$

(*Véase* el número 449.)

Problema II.

Se quiere medir un metro cúbico de leña por medio de cuatro reglas rectilíneas unidas que forman un cuadrado de un metro de lado, cuyo plano está dispuesto verticalmente; los trozos ó astillas, en lugar de tener un metro de longitud, tienen 1,2; — *se pregunta cuánto se debe disminuir la altura del paralelepípedo.*

Teniendo la base del paralelepípedo $1,2 \times 1$ ó 1 metro cuadrado, 2 de superficie, es necesario dividir 1 por 1,2; lo cual da

$\frac{10}{12}$ de metro ó 8 *decímetros* $\frac{1}{3}$.

Problema III.

Los lados de la base de un tetraedro valen 12, 15 *y* 17 *metros respectivamente; su altura* 9 *metros:* — *hallar su volúmen.*

Teniendo por medida el area de la base (n.º 287)

$$\sqrt{22 \times 10 \times 7 \times 5} = \sqrt{7700},$$

el volúmen del tetraedro será

$$3\sqrt{7700} = \sqrt{69300} = 263^{m.\ c.}, 248,$$

valor aproximado hasta milésimas.

Problema IV.

Dado el volúmen de un tetraedro regular (n.º 381) *igual á* $19^{m.\ c.}$, 683, — *hallar su arista* [a], *y su area* [A].

Designando por R el radio del círculo circunscrito á la
Fig. 307. base ABC (*fig.* 307), tenemos $a = R\sqrt{3}$ (n.º 237, *corol.* 1.º);

de donde $R = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$.

La espresion del area de la base ABC es $\frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}$ (n.° 237, *escol.*), ó, poniendo en lugar de R su valor, $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$.

Por otro lado, la altura SO del tetraedro es igual á

$$\sqrt{\overline{SA}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{1}{3} a \sqrt{6}.$$

Tenemos por consiguiente la ecuacion

$$19{,}683 = \tfrac{1}{9} a \sqrt{6} \times \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3}, \qquad (\text{n.° } 439),$$

ó bien $19{,}683 = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$;

luego $a^3 = \dfrac{12 \times 19{,}683}{\sqrt{2}} = 6 \sqrt{2} \times 19{,}683$;

de donde $3 \log. a = \log. 6 + \log. 19{,}683 + \frac{1}{2} \log. 2 = 2{,}2227575$,

y por consiguiente $\log. a = 0{,}7409192 = \log. 5{,}50705$.

Asi pues, la arista a vale $5^{m.}{,}50705$.

Tenemos en seguida $A = 4 . ABC = a^2 \sqrt{3}$;

lo cual da $\log. A = 2 \log. a + \frac{1}{2} \log. 3 = 1{,}7203990 = \log. 52{,}5289$.

Luego finalmente $A = 52^{m.\ c.}{,}5289$.

PROBLEMA V. (*Fig.* 361.) Fig. 361.

Se quiere saber el volúmen [V] *de un tronco de pirámide triangular regular*, SABC, *cuya base mayor tiene de lado* 0,9, *la menor* 0,4, *y la arista lateral* Aa *es igual á* 0,5.

Tenemos la fórmula $V = \frac{1}{3} Oo\,(ABC + abc + \sqrt{ABC . abc})$,

y solo se trata de calcular sucesivamente la altura Oo del tronco, y las areas de las dos bases ABC, *abc*.

Los triángulos semejantes SAB, S*ab*, dan

SA : S*a* :: AB : *ab*; de donde A*a* : SA :: AB : *ab* : AB,

ó 0,5 : SA :: 0,5 : AB; luego SA = AB = 0,9.

Del mismo modo probariamos que $Sa = ab = 0{,}4$;

lo cual prueba que, en virtud de los datos particulares de la cuestion, las dos figuras SABC, S*abc*, son no solo pirámides regulares (n.° 343), sino tambien tetraedros regulares (n.° 381).

Esto supuesto, en virtud del problema precedente, tenemos

$$1.^\circ \qquad SO = \tfrac{1}{3}\,AB\,.\sqrt{6},\quad So = \tfrac{1}{3}\,ab\,.\sqrt{6};$$

de donde $$Oo = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}\,.\,0{,}5;$$

$$2.^\circ \qquad ABC = \tfrac{1}{4}\,\overline{AB}^2\,.\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}\,.\,0{,}81\,.\sqrt{3};$$

$$3.^\circ \qquad abc = \tfrac{1}{4}\,\overline{ab}^2\,.\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}\,.\,0{,}16\,.\sqrt{3}.$$

Luego, sustituyendo en la fórmula anterior,

$$V = \tfrac{1}{9}\,.\sqrt{6}\,.\,0{,}5\,.\,\tfrac{1}{4}\,(0{,}81 + 0{,}16 + 0{,}36)\,.\sqrt{3},$$

ó $$V = \frac{1}{12}\,.\sqrt{2}\,.\,0{,}5\,.\,1{,}33 = \frac{1{,}33}{24}\,.\sqrt{2},$$

y $$\log.\,V = \log.\,1{,}33 + \tfrac{1}{2}\log.2 + c.\,\log.24 = \bar{2},89415540;$$

y se obtiene finalmente $V = 0^{m.\,c.},078371.$

Comprobacion.

$$SABC = \tfrac{1}{3}\,SO\,.\,ABC = \tfrac{1}{9}\,.\,AB\,.\sqrt{6}\,.\,\tfrac{1}{4}\,.\,\overline{AB}^2.\sqrt{3} = \tfrac{1}{12}\,\overline{AB}^3\,.\sqrt{2}$$

ó lo que es lo mismo, $= 0{,}085913$;

$$Sabc = \tfrac{1}{3}\,So\,.\,abc = \tfrac{1}{9}.\,ab.\sqrt{6}\,.\,\tfrac{1}{4}.\,\overline{ab}^2.\sqrt{3} = \tfrac{1}{12}(\overline{ab}^3).\sqrt{2} = \underline{0{,}007542}$$

$$0{,}078371.$$

Luego $V = 0{,}078371$, como antes.

§. II. *Sobre los cuerpos redondos.*

Problema I.

N.° 462. *Dado el volúmen de una esfera igual á* $1843^{m.\,c.},086278$, *hallar su radio* [r].

Tenemos la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (n.° 457);

de donde $$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 . 1843,086278}{4\pi}},$$

$$\text{y log. } r = \tfrac{1}{3}[\text{log. }3 + \text{log. }1843,086278 + c.\text{log. }4 + c.\text{ log. }\pi],$$

$$\text{ó log. } r = 0,881153 = \text{log. }7,61 \ [\text{log. }\pi = 0,4971499 \text{ (p. 224)}].$$

Luego $r = 7^{m.},61.$

Problema II.

El arista de un cubo tiene $0^{m.},36$ *de longitud.* — *Se quiere saber el volúmen de la esfera circunscrita.*

El cuadrado de la diagonal (n.° 342, *escol.* 2.°) vale $3(0,36)^2$; y por consiguiente, la diagonal tendrá de longitud $0,36 \ . \sqrt{3}$. Siendo ademas esta diagonal el diámetro de la esfera pedida, se sigue que el volúmen de esta tiene por espresion (n.° 457)

$$\tfrac{1}{6}\pi . 3\sqrt{3}\,(0,36)^3 = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{3}\,(0,36)^3$$

$$\begin{aligned} \text{log. }\pi &= 0,4971499 \\ \tfrac{1}{2}\text{ log. }3 &= 0,2385606 \\ 3\text{ log. }0,36 &= \bar{2},6689075 \\ c.\text{ log. }2 &= \underline{9,6989700} \\ &\ \ \ \bar{1},1035880 = \text{log. }0,126937. \end{aligned}$$

Luego el volúmen buscado es en metros cúbicos 0,126937.

Problema III.

Se quiere saber el area de un triángulo esférico cuyos ángulos son respectivamente $A = 85°,17'$ | $B = 103°,35'$ | $C = 67°,49'$, *siendo el radio de la esfera igual á* $1^{m.},54$.

Tenemos desde luego $A + B + C - 200° = 56°,01$;

de donde $\tfrac{1}{2}(A + B + C) - 1^{q} = 0^{q},28005.$

Asi, en virtud de la fórmula del número 455, el area del triángulo es igual

á $$\pi(1{,}54)^2 \times 0{,}28005 = 2{,}0865;$$

luego este triángulo vale $2^{m.\ c.},0865$.

[Hemos usado en este ejemplo la division centesimal del círculo].

Fig. 362.

PROBLEMA IV. (*Fig.* 362.)

Tenemos un crisol en forma de cono truncado ABCD, *cuyo fondo* CD *tiene* $0^{m.},03$ *de diámetro, la boca* AB *tiene* $0^{m.},06$, *y la altura* CL *es de* $0^{m.},08$; *este crisol contiene cierta cantidad de metal fundido cuya superficie* EF *tiene* $0^{m.},05$ *de diámetro: — Se quiere hacer con él una esfera, y se desea saber el radio que debe tener su molde.*

Calculemos de antemano la altura CI del metal fundido. Tirando CK paralela á DB, tenemos la proporcion

$$CI : CL :: EG : AK; \quad \text{de donde} \quad CI = \frac{CL \cdot EG}{AK},$$

ó poniendo en lugar de CL, EG=EF—CD, AK=AB—CD, sus valores,

$$CI = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}02}{0{,}03} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}16 = \frac{16}{3},$$

tomando aqui el *centímetro* por unidad.

El volúmen del metal fundido es por consiguiente (n.° 449.)

$$\tfrac{16}{9}\pi\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\right] = \tfrac{4}{9}\pi \cdot 49.$$

Debemos pues tener, representando por r el radio buscado,

$$\tfrac{4}{9}\pi \cdot 49 = \tfrac{4}{3}\pi r^3;$$

de donde $$r^3 = \frac{49}{3}, \quad \text{y} \quad r = \sqrt[3]{\frac{49}{3}},$$

ó finalmente $$r = 2^{\text{cent.}},53722.$$

PROBLEMA V.

Dados el lado de un cono recto, igual á $25^{m.},15$, *y su altura* $17^{m.},3$, *hallar su superficie lateral*, A, *y su volúmen* B.

Tenemos primero (n.º 446)

$$A=\pi.25{,}15.\sqrt{(25{,}15)^2-(17{,}3)^2}=\pi.25{,}15.\sqrt{42{,}45\times 7{,}85};$$

dedonde $\log.A=\log.\pi+\log.25{,}15+\frac{1}{2}\log.42{,}45+\frac{1}{2}\log.7{,}85$,

ó, efectuando los cálculos indicados,

$$\log.A=3{,}1590615=\log.1442{,}32;$$

luego $A=1442^{m.\ cuad.},32.$

Despues tenemos (n.º 448)

$$V=\frac{1}{3}\pi\times 17{,}3\times 42{,}45\times 7{,}85,$$

$\log.V=\log.\pi+\log.17{,}3+\log.42{,}45+\log.7{,}85+c.\log.3,$

ó $\log.V=3{,}7808221=\log.6037{,}01;$

luego $V=6037^{m.\ cúb},01.$

PROBLEMA VI.

Valuar el volúmen de un cristal de forma lenticular cuyo diámetro es $0^{m.},03$, *y el espesor* $0^{m.}004$.

El volúmen de este cristal es un doble segmento de esfera de una sola base, que tiene por radio $0^{m.}015$.

Luego tiene por espresion (n.º 458)

$$\begin{aligned}&\pi(0{,}015)^2.0{,}002+\tfrac{1}{3}\pi(0{,}002)^3\\&=\tfrac{1}{3}\pi.0{,}002[3(0{,}015)^2+(0{,}002)^2]\\&=1{,}04719755\times 0{,}00001358\\&=0{,}000001422094;\end{aligned}$$

luego el volúmen buscado vale $1422^{milím.\ cúb.},094$.

§. III. *Otros problemas sobre los volúmenes y las densidades de los cuerpos* (*).

Problema I.

N.° 463. *Un obelisco de piedra de sillería tiene la forma de una pirámide cuadrangular regular, sostenida por un prisma de base cuadrada que le sirve de pedestal; la base, comun á la pirámide y al pedestal, tiene* $1^{m.},2$ *de lado; el apotema de la pirámide es á este lado*$::5:\sqrt{2}$; *y la altura del pedestal es doble del mismo lado: — Se quiere saber el peso total de la masa bajo el supuesto de ser* 2,5 *la densidad de la piedra.*

Teniendo la apotema por valor $\dfrac{1,2\times5}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$, y siendo su cuadrado igual á 18, tenemos para altura de la pirámide

$$\sqrt{18-(0,6)^2}=4,2,$$

y para volúmen de la misma,

$$1,4\times(1,2)^2=2,016.$$

Siendo el del pedestal igual á $(1,2)^2\times2,4=3,456$, resulta que el volúmen total vale $5^{m.\ cúb.},472$.

Como, por hipótesis, la densidad es 2,5, se obtiene finalmente para peso de la masa total

$$1000000^{gr.}\times2,5\times5,472=13680000^{gr.}=13680^{\text{kilog.}}\ (^{**}).$$

(*) En Física, se llama *densidad* de un cuerpo el peso que tiene en la *unidad* de volúmen, y *peso específico* la relacion del peso de un cuerpo en cierto volúmen con el peso de otro cuerpo [por ejemplo, *el agua*] en el *mismo* volúmen.

Hay *identidad* entre los números abstractos que representan el *peso específico* y la *densidad* de un cuerpo.

Sean V el volúmen de un cuerpo, D su densidad, P su peso absoluto. — Se tienen las relaciones

$$P=D\,.\,V;\quad \text{de donde}\quad D=\frac{P}{V},\ V=\frac{P}{D}.$$

(**) Se sabe que el *gramo* es el peso de un *centímetro cúbico* de agua destilada, y por consiguiente que el metro cúbico pesa 1000 kilógramos.

PROBLEMA II.

Tenemos una pirámide exaedra regular de plata pura cuyas dimensiones y peso no conocemos; pero sabemos, 1°— que su arista lateral es doble del lado de la base; 2.° — que el peso específico de la plata es 10,5; 3.° — que si la pirámide se hiciera moneda añadiéndole la cantidad necesaria de liga, se harian 6048 fr. — Se quieren saber las dimensiones y peso de la pirámide.

Llamando x el lado de la base, su area será $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$ (número 237, *escol.*). Siendo la arista lateral doble de este lado, que es tambien el radio de la base, la altura valdrá $x\sqrt{3}$; y el volúmen de la pirámide estará espresado por

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\,x^2\sqrt{3}\,.\,x\sqrt{3}=\tfrac{3}{2}\,x^3.$$

Si ahora tomamos el *centímetro* por unidad, bastará multiplicar esta espresion por 10,5 ó $\frac{21}{2}$, para tener el peso de la pirámide espresado en *gramos*, lo cual da

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot x^3.$$

Pero se necesita $\frac{1}{9}$ de liga para convertir en moneda la pirámide; luego el peso total se obtendrá multiplicando la espresion precedente por $\frac{10}{9}$, y se tendrá

$$\frac{3}{2}\times\frac{21}{2}\cdot x^3\times\frac{10}{9}\quad\text{ó}\quad\frac{7\,.\,5}{2}\cdot x^3.$$

Ahora, puesto que 1 *franco* pesa 5 *gramos*, dividiendo por 5 se tendrá el número de francos; de donde

$$\tfrac{7}{2}\cdot x^3=6048\quad\text{y}\quad x^3=1728;$$

luego $$x=12.$$

Luego el lado de la base tendrá 12 centímetros, las aristas laterales 24, y la altura $12\sqrt{2}$.

El volúmen será exactamente 2592 *centímetros cúbicos*, y el peso 27 kilog. ,216.

PROBLEMA III.

Suponiendo la tierra perfectamente esférica, y sabiendo que el cuadrante del meridiano vale 10000000 *de metros, se quiere determinar su radio* [r], *el area de su superficie* [s], *su volúmen* [v], *y su peso* [p] [*siendo segun* CAVENDISH, 4,5 *la densidad media de la tierra*].

Sea c la circunferencia del meridiano; tenemos

$$r=\frac{c}{2\pi};\ \text{de donde}\ \log.r=\log.\frac{1}{2}c+\text{comp.}\log.\pi=6,8038801,$$

y por consiguiente $r=6366200$ *metros.*

Ahora $$s=4\pi r^2=\frac{c^2}{\pi};$$

de donde $\log. s=2\log. c+\text{comp.}\log.\pi=14,7069701$,

y por consiguiente $s=509296$ *miriámetros cuadrados.*

Finalmente $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{c^3}{6\pi^2}$; de donde $\log. V=21,0337290$,

y por consiguiente $V=1\,080\,750\,000$ *miriámetros cúbicos.*

Multiplicando el número de metros cúbicos contenidos en V por 4,5 . 1000 ó 4500, tendremos el peso de la tierra espresado en *kilógramos*

$$\begin{aligned}\log. V &= 21,0337290\\ \log. 4500 &= \underline{\ \ 3,6532125}\end{aligned}$$

de donde $$\log. p=24,6869415$$

y $p=4\,863\,420\,000\,000\,000\,000$ *millones de kilógramos.*

PROBLEMA IV.

Un físico sabe que una gota de agua de jabon que forma un cilindro de dos milímetros de radio y dos milímetros de altura, puede desenvolverse en una esfera de 54 *milímetros de radio: — Se quiere saber,* 1.° *— cuál debe ser el espesor de la evoluta acuosa que forma esta esfera ó bomba;* 2.° *— cuántas partes visibles á simple vista contiene, suponiendo* *que una buena vista puede distinguir* $\frac{1}{10}$ *de milímetro*; 3.° — *cuántas partes contendrá visibles por medio de un microscopio que aumente* 20 *veces las dimensiones lineales.*

Sea en general r el radio de la gota, y h su altura: su volúmen será $\pi r^2 h$ (n.° 444).

Sea ahora R el radio de toda la bomba, y x el espesor de su cubierta (n.° 457); el volúmen de la parte acuosa será

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{3}\pi(R-x)^3.$$

Tendremos pues $\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R-x)^3$;

de donde $(R-x)^3 = R^3 - \frac{3}{4}r^2 h$;

$$R - x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{8R^3 - 6r^2 h},$$

y $$x = R - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{8R^3 - 6r^2 h}.$$

Ahora, —1.°— poniendo en lugar de R, r, y h, sus valores respectivos en *milímetros* $R=54$, $r=2$, $h=2$, se obtiene

$$x = 54 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(108)^3 - 48} = 54 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{1259664},$$

ó, efectuando todos los cálculos indicados,

$$x = 0{,}0007;$$

luego el espesor buscado es $\frac{7}{10000}$ de *milímetros*.

2.° — La superficie de la bomba tiene por medida

$$4\pi R^2 = 366^{\text{m. cuad.}}{,}43 \qquad (\text{n.° } 454, \textit{advert.}),$$

y por consiguiente esta superficie contiene

3 664 300 partes visibles á simple vista.

3.° — Si se emplea un microscopio que haga 20 veces mayores las dimensiones lineales, ó 400 veces mayores las superficies, se tendrán 400 veces mas partes visibles, es decir, 1 465 720 000.

Ademas, esta gota contiene cerca de 8π ó sean 25 milímetros cúbicos; luego un milímetro cúbico de agua de jabon dará en el mismo microscopio 58 628 800 partes visibles.

APÉNDICE

Á LOS DOS LIBROS ÚLTIMOS.

Este Apéndice estará, como el primero, dividido en dos secciones, la primera de las cuales tratará de la *simetría* de las figuras en el espacio, de los *planos diametrales*, del *centro de las distancias medias* respecto de un plano, de los *centros de semejanza*, y de la *construccion de los poliedros regulares*; la segunda comprenderá las nociones principales sobre las superficies de *revolucion*, las superficies *desarrollables* y las superficies *alabeadas* ó *gauchas*, y concluirá con la determinacion de la interseccion de un cilindro ó de un cono por un plano, en virtud de consideraciones puramente geométricas.

Adoptaremos ademas, respecto de los *números* de este *Apendice*, el mismo sistema que en el primero (*véase la introduccion*, página 254).

PRIMERA SECCION.

De la simetría en el espacio. — Centros, ejes y planos de simetría. — Planos diametrales. — Centros de las distancias medias. — Centros de semejanza. — Construccion de los poliedros regulares.

De la simetría en el espacio.

N.° 1. Se distinguen en general, respecto de los poliedros, dos clases de *simetría*, la simetría de *forma*, y la simetría de *posicion*.

Para dar una idea clara de estas dos clases de simetría, con-
Fig. 363. sideremos primero un tetraedro SABC (*fig.* 363); y en sus aristas prolongadas mas allá del vértice S, tomemos tres partes

SA'=SA, SB'=SB, SC'=SC; tirando luego las rectas A'B', A'C', B'C': con lo cual obtendremos dos tetraedros SABC, SA'B'C', cuyas partes constituyentes [*aristas, caras, ángulos diedros*] son evidente y respectivamente iguales, pero situadas en orden *inverso*; por cuya razon no pueden superponerse los tetraedros. — En este caso pues se dice que son *simétricos* uno de otro.

Nada impide despues separar los tetraedros, para colocarlos de cualquier modo en el espacio, en cuyo caso no dejarán de ser *simétricos*, cualquiera que sea su posicion relativa. — Ademas, no pudiendo un ángulo triedro tener mas que *un solo* simétrico (n.° 334), resulta igualmente que un tetraedro no puede tener mas que *un solo simétrico*; en otras palabras:

Dos tetraedros simétricos de un tercero son iguales y superponibles.

Esto supuesto: — Dos *poliedros* se llaman *simétricos entre sí* [independientemente de su posicion relativa en el espacio], cuando *pueden descomponerse en un mismo número de tetraedros simétricos é inversamente dispuestos.*

De donde se deduce inmediatamente que, — 1.° — *Un poliedro no puede tener mas que un solo simétrico;* — 2.° — *Dos poliedros simétricos tienen todas sus aristas y sus caras iguales respectivamente, iguales tambien sus ángulos diedros, y respectivamante simétricos sus ángulos poliedros.*

La simetria de posicion puede existir de *tres* maneras, ó respecto de un *punto*, que entonces se llama *centro de simetría*, ó respecto de una *recta*, llamada *eje de simetría*, ó respecto en fin de un *plano*, que se llama *plano de simetría*.

Trataremos primero de la segunda especie.

De la simetría respecto de un eje.

N.° 2. *Definicion.* — Dos puntos son *simétricos* respecto de una recta, cuando la recta que los junta es perpendicular á la primera y queda dividida por esta en dos partes iguales.

Un poliedro es *simétrico*, ó *dos* poliedros son *simétricos* entre sí respecto de una recta, cuando esta pasa por los puntos medios de todas las rectas que [sin ser aristas ni diagonales] juntan de *dos en dos* los vértices correspondientes, y es perpendicular á cada una de ellas.

TEOREMA 1. (*Fig.* 364.) Fig. 364.

N.° 3. *Dos figuras cualesquiera, simétricas respecto de una recta* XY, *son iguales entre sí.*

Sean A, B, C, D, ..., los puntos de la primera figura, y

A', B', C', D',..., los de la segunda, simétricos de la primera. — Tiremos las rectas AA', BB', CC',..., las cuales, en virtud de la definicion, deben quedar cortadas por el eje de simetría en sus puntos medios *a*, *b*, *c*,..., y serle perpendiculares. — Esto supuesto, concibamos que la primer figura gira al rededor de XY como eje de revolucion: en este movimiento las rectas A*a*, B*b*, C*c*,..., que se suponen invariablemente ligadas entre si, describirán sectores semejantes (n.° 252); luego cuando el punto A coincida con A', los puntos B, C,..., coincidirán con B', C',...; y lo mismo sucederá con las figuras totales; *luego*, etc.

Corolarios. En un poliedro *simétrico* respecto de un eje,— 1.° — *Toda recta que encuentra al eje en ángulo recto, y termina en la superficie, queda dividida por el eje en dos partes iguales;*

2.° — *Todo plano tirado por el eje corta al poliedro en dos partes iguales;*

3.° — *Todo plano perpendicular al eje determina una seccion simétrica respecto del punto de interseccion del plano con el eje*; y ese punto es el *centro de simetría de la seccion* (número 2, primer *Apéndice*).

Escolio 1.° El mas sencillo de los poliedros simétricos respecto de un eje, es el *prisma recto* cuya base es *simétrica respecto de un punto.*

Cuando la base de un prisma recto es un *rectángulo*, es decir, cuando el prisma se convierte en un paralelepípedo rectángulo, tiene por ejes de simetría las tres rectas que juntan los *centros* de las caras opuestas.

Si, ademas la base es un *cuadrado*, hay otros *dos* ejes de simetría que juntan los *puntos medios* de las aristas laterales opuestas.

En fin, cuando la base del prisma es un *rombo*, la figura tiene *tres* ejes de simetría: *uno*, que junta los centros de las dos bases, y los *otros dos*, que juntan los *puntos medios* de las aristas laterales opuestas.

Escolio 2.° El eje de *una pirámide* regular (n.° 343) es tambien eje de *simetría*, con tal que sea *par* el número de las caras laterales.

Escolio 3.° La simetría respecto de un eje no es, hablando propiamente, sino una simetría de *posicion*, pues, en virtud del teorema precedente, las figuras son iguales y superponibles. Pero no sucede lo mismo con la simetría respecto de un punto, ni con la simetría respecto de un plano, las cuales son á la vez simétricas de forma y de posicion. — Hé aqui la causa por qué hemos comenzado por la segunda especie de simetría.

De la simetría respecto de un punto ó de un plano.

N.° 4. *Definiciones.* — Dos puntos se llaman *simétricos* respecto de otro *punto*, cuando este divide en dos partes iguales la recta que junta los dos primeros; y respecto de un *plano*, cuando este es perpendicular á la recta dicha que junta los dos puntos y pasa por su punto medio.

TEOREMA II. (*Fig.* 365, 366.) Fig. 365, 366.

N.° 5. *Si tres puntos* A, B, C, *estan situados en línea recta, sus simétricos* A′, B′, C′, *respecto de un punto* O, *ó de un plano* MN, *estan tambien en línea recta.*

Juntemos el punto B′ con los puntos A′, C′. — Esto supuesto, los dos triángulos OAB, OA′B′ (*fig.* 365), son iguales por tener un ángulo igual [en O] formado por lados respectivamente iguales; luego, *ángulo* ABO = *ángulo* A′B′O; y las dos rectas AB, A′B′, son paralelas (n.° 46). Se demostraria del mismo modo que tambien son paralelas las rectas BC, B′C′. Pero los tres puntos A, B, C, estan, por hipótesis, en línea recta; luego tambien lo estan los A′, B′, C′, pues de lo contrario se seguiria que por el punto B′ se podrian tirar dos paralelas á la recta AB, lo cual es imposible (n.° 291, 5.°). Fig. 365.

En el caso de la *figura* 366, los pies *a*, *b*, *c*, de las perpendiculares tiradas por los puntos A, B, C, en el plano MN, estan situados en una misma recta (n.° 326); y si hacemos girar la figura acC′A′ al rededor de ac como charnela, como por la definicion tenemos, aA′ = aA, bB′ = bB, cC′ = cC, los puntos A′, B′, C′, vendrán á caer sobre los A, B, C; *luego*, etc. Fig. 366.

COROLARIOS. De la anterior demostracion resulta inmediatamente que, — 1.° — *Dos rectas de longitud determinada, simétricas respecto de un punto, son paralelas é iguales;*

2.° — *Dos triángulos simétricos respecto de un punto, son iguales y tienen sus planos paralelos;* — sucediendo lo mismo con dos *ángulos simétricos;*

3.° — *Dos rectas de longitud determinada, simétricas respecto de un plano, hacen ángulos iguales con el plano*; y prolongadas, *le encuentran en el mismo punto, á no ser que sean paralelas.*

4.° — *Dos triángulos simétricos respecto de un plano, son iguales; y sus planos* [*sino son paralelos*] *encuentran en una misma línea al plano de simetría y forman con él angulos iguales.* — *Los ángulos simétricos son tambien iguales.*

Fig. 367, 368.

Teorema III. (*Fig.* 367, 368.)

N.° 6. *Si cuatro puntos* A, B, C, D, *estan en un mismo plano, sus simétricos* A′, B′, C′, D′, *respecto de un punto* O, *ó de un plano* MN, *estan tambien en un mismo plano.*

Formemos los cuadriláteros ABCD, A′B′C′D′, y tiremos las diagonales AC y A′C′, BD y B′D′. Los tres pares de triángulos ABC y A′B′C′, ACD y A′C′D′, ABD y A′B′D′, son iguales (número 5, *corol.* 2.° y 4.° *de este Apénd.*); luego, *ángulo* BAC = *ángulo* B′A′C′, *ángulo* CAD = *ángulo* C′A′D′, y *ángulo* BAD = *ángulo* B′A′D′. — Pero los ángulos BAC, CAD, estando por hipótesis en un mismo plano, deben dar BAD = BAC + CAD; luego tambien B′A′D′ = B′A′C′ + C′A′D′, lo cual exige que estos tres ángulos esten en un mismo plano; *L. C. D. D.*

Escolio. Cuando los cuatro puntos A, B, C, D, estan en planos diferentes, sucede lo mismo con sus simétricos A′, B′, C′, D′; y entonces los dos sistemas de puntos determinan dos tetraedros ABCD, A′B′C′D′, cuyos ángulos diedros y triedros son simétricos, y que, por consiguiente, ellos son tambien *simétricos entre sí.*

Fig. 367, 368.

Teorema IV. (*Fig.* 367, 368.)

N.° 7. Cuando dos poliedros tienen un vértice A y A′, B y B′, C y C′,..., situados de dos en dos *simétricamente* respecto de un punto O ó de un plano MN (n.° 2 *de este Apénd.*), [en cuyo caso los dos poliedros se llaman *simétricos respecto de un punto ó de un plano*]: — 1.° — *Los poliedros tienen sus caras respectivamente iguales, iguales tambien los ángulos diedros, y simétricos los ángulos poliedros;* — 2.° — *Los poliedros son simétricos entre sí* (n.° 1 *de este Apénd.*).

La primera parte de esta proposicion resulta evidentemente de los *corolarios* del número 5 y del *escolio* del número 6.

La segunda se deduce del mismo *escolio* y de la *definicion* dada en el número 1, observando que los dos poliedros estan entonces compuestos de un mismo número de tetraedros simétricos de dos en dos é *inversamente* dispuestos.

Fig. 367.

Teorema V. (*Fig.* 367.)

N.° 8. Cuando los vértices A y A′, B y B′, C y C′,..., de un mismo poliedro estan situados de dos en dos *simétricamente* respecto de un punto O, en cuyo caso el poliedro se llama *simétrico respecto de un punto*, — 1.° — *Este poliedro tiene for-*

zosamente un número par de aristas iguales y paralelas de dos en dos; y lo mismo sucede con las caras; — 2.° — *Los ángulos planos y los ángulos diedros son tambien respectivamente iguales; y los ángulos poliedros son simétricos entre sí;* — 3.° — *Toda recta que pasa por el centro de simetría y termina en la superficie, queda dividida por dicho centro en dos partes iguales;* — 4.° — En fin, *todo plano tirado por el centro divide al poliedro en dos figuras simétricas entre sí.*

Las dos primeras partes de este *teorema* se deducen tambien facilmente de los corolarios al número 5, y del *escolio* al número 6.

Para demostrar la tercera parte, consideremos una recta cualquiera MM′ que pasa por el punto O y termina en las dos figuras ABCD, A′B′C′D′, que suponemos ser caras del poliedro, las cuales, en virtud de la primera parte del presente teorema, deben ser iguales y paralelas. Tiremos las rectas AM, A′M′, que serán paralelas (n.° 318): — esto supuesto, los dos triángulos OAM, OA′M′, son iguales por tener un lado igual [OA=OA′] adyacente á dos ángulos iguales respectivamente; luego darán OM = OM′.

La última parte resulta necesariamente de que el plano que pase por el punto O, determina dos poliedros parciales simétricos entre sí, por hallarse compuestos de un mismo número de tetraedros simétricos de dos en dos, é *inversamente* dispuestos.

Escolio 1.° El mas sencillo de los poliedros simétricos respecto de un punto, es el *paralelepípedo:* el cual tiene por *centro de simetría* su centro de figura (n.° 342, *escol.*).

Como todo plano diagonal de un paralelepípedo pasa por el centro de figura, resulta, en virtud de la segunda parte del teorema precedente, que divide al paralelepípedo en dos partes simétricas entre sí; proposicion que enunciamos en el número 432.

Escolio 2.° Despues del paralelepípedo, vienen los prismas que tienen por *bases polígonos simétricos respecto de un punto,* en cuyo caso el centro de simetría es el punto medio de la recta que junta los centros de las bases.

N.° 9. Escolio general sobre la simetría respecto de un punto ó de un plano, comparada con la simetría absoluta.

Resulta de las diversas proposiciones establecidas en los números 7 y 8, que dos poliedros simétricos respecto de un *punto* ó de un *plano* son á la vez *simétricos entre sí* (número 1 *de este Apéndice*).

Recíprocamente, *dos poliedros simétricos entre sí* [considerados absolutamente] *pueden siempre colocarse simétricamente respecto de un punto del espacio,* ó respecto de *un plano,* pudiendo ser el punto y el plano un vértice, ó una cara comun á los dos poliedros (*).

TEOREMA VI.

N.° 10. *Dos poliedros simétricos son equivalentes.*

Segun la definicion (número 1 *de este Apéndice*), basta demostrar la proposicion respecto de dos tetraedros.

Fig. 363. Si consideramos pues los tetraedros simétricos SABC, SA'B'C' (*fig.* 363, número 1 *de este Apéndice*), como el punto S es un centro de simetria (número 5 *de este Apéndice*) respecto de estos tetraedros, resulta que los planos de las caras ABC, A'B'C', son paralelos; luego la recta KSK', perpendicular á ABC, es tambien perpendicular á A'B'C'; y ademas, tenemos SK=SK' (n.° 8, 3.°).—Luego los tetraedros tienen la misma base y la misma altura, y son equivalentes; luego tambien, etc...; *L. C. D. D.*

N.° 11. En fin, facilmente se demostrarian las dos proposiciones siguientes:

1.° Cuando haya en un poliedro *dos planos de simetría perpendiculares entre sí*, su interseccion comun es *un eje de simetría.*

2.° Y si hay *tres*, el punto comun á todos ellos es *un centro de simetría.*

De los planos diametrales.

N.° 12. Asi como en ciertos polígonos hay ciertas rectas llamadas *diámetros* (n.° 7, *Apend.* 1.°), que pasan por los puntos medios de una serie de rectas paralelas entre sí y terminadas en el perímetro del poligono, á una y otra parte de dichos diámetros, asi tambien se concibe que ciertos poliedros sean tales, que un sistema de rectas paralelas entre sí y terminadas en su superficie á uno y otro lado de un plano, queden divididas en dos partes iguales por este plano, que toma entonces el nombre de *plano diametral.*

(*) Un objeto y su imagen reflejada en un espejo presentan el ejemplo mas vulgar de dos figuras simétricas entre sí.

Respecto de *una figura simétrica*, tenemos tambien ejemplo en la forma esterior del cuerpo humano, compuesto de dos partes simétricas entre sí. — Asi, las dos manos son simétricas entre sí, y lo mismo los dos guantes con que las cubrimos. Pero observemos que si los volvemos del *reves*, el guante de la izquierda vendrá bien á la derecha, y *vice-versa.* — Este último ejemplo puede hacer comprender la clase de *reversion* que sería necesaria hacer sufrir á las figuras simétricas para hacerlas superponibles.

TEOREMA VII. (*Fig.* 369.) Fig. 369

N.° 13. *Cuando los vértices* A y A′, B y B′, C y C′,...., *de un mismo poliedro* [ó de dos poliedros] *estan situados de dos en dos en rectas paralelas entre sí, si un plano* PQ *pasa por los puntos medios de todas ellas:* — 1.° — *cada par de aristas homólogas* AB *y* A′B′, AC *y* A′C′,...., *encuentra al plano* PQ *en un mismo punto* D, E,...., [á no ser que sean paralelas]; — 2.° — *Cada par de planos* ABC, A′B′C′, *determinados por los vértices homológos, considerados de tres en tres, encuentra al plano* PQ *en una misma recta* DE [á no ser que sean paralelos]; — 3.° — *toda recta* MM′ *paralela á las primeras* AA′, BB′,...., *terminada por una y otra parte del plano en la superficie del poliedro, queda dividida en dos partes iguales por este plano,* llamado entonces *plano diametral.*

1.° Las rectas AA′, BB′, determinan un plano cuya traza en el plano PQ es una recta ab; y las rectas AB, A′B′, hallándose situadas en el plano AB B′A′, no pueden encontrar al plano PQ sino en la recta ab. Como ademas tenemos por hipótesis $Aa = aA'$, $Bb = bB'$, resulta (n.° 201, *recíp.*) que las tres rectas AB, A′B′, ab, concurren en un mismo punto; luego, etc.

2.° Los planos de los dos triángulos ABC, A′B′C′, deben contener las trazas D, E, F, de las rectas AB y A′B′, AC y A′C′, BC y B′C′, en el plano PQ; luego estos tres planos se cortan en una misma recta.

3.° Supongamos, para fijar las ideas, que los estremos de la recta MM′ pertenecen á dos caras ABC, A′B′C′, del poliedro; y tiremos las rectas CM, C′M′: — como estas rectas estan situadas en los dos planos ABC, A′B′C′, cuya traza en el plano PQ es la recta DFE, deben encontrar á este último plano en un mismo punto G; y á causa de ser $Cc = cC'$, por hipótesis, tenemos tambien $Mm = mM'$; *L. C. D. D.*

Advert. En el caso en que las rectas AA′, BB′, CC′,...., son todas iguales y paralelas, las rectas AB y A′B′, AC y A′C′,...., son tambien iguales y paralelas de dos en dos; los planos ABC, A′B′C′, son tambien paralelos entre si, y paralelos al plano PQ que divide en dos partes iguales á las rectas AA′, BB′,...., MM′.

ESCOLIO 1.° El teorema precedente comprende como caso particular las figuras simétricas respecto de un plano (número 7 *de este Apéndice*), y les es aplicable por consiguiente.

ESCOLIO 2.° Todo prisma triangular *recto* ú *oblicuo* tiene *cuatro* planos *diametrales*, que son: uno el plano tirado á igual distancia de las bases; y los otros tres los planos que pasan respectivamente por las aristas laterales y por los diámetros de las bases (número 7, *escol.* 2.°, *Apénd.* 1.°).

Centro de las distancias medias.

El punto que hemos llamado centro de las distancias medias en un polígono (número 8 y 9, *Apénd.* 1.º), goza respecto de un plano de las mismas propiedades que respecto de una recta.

Teorema VIII.

N.º 14. *La perpendicular bajada desde el centro de las distancias medias de un polígono cualquiera, á un plano tirado á voluntad en el espacio, es igual al cociente de la suma algebráica de las perpendiculares bajadas al plano desde los vértices del polígono, dividida por el número total* n *de los vértices.* — Esta suma es *nula* cuando el plano pasa por el centro de las distancias medias, y *vice-versa.*

Siendo la demostracion de este teorema semejante enteramente á la espuesta en el número 9 del *Apéndice* 1.º, nos referimos á ella, reduciéndonos á observar que no es aquí necesario que los vértices esten en un mismo plano: — basta, — 1.º — que la línea poligonal sea *cerrada;* — 2.º — que un mismo vértice no sea la reunion de *mas de dos* lados.

Escolio. Para fijar, en este caso, la posicion del centro de las distancias medias de todos los vértices, se pueden tirar tres planos que se corten entre sí de dos en dos [suponiéndolos, para mayor sencillez, *perpendiculares* entre sí]. — Se bajan líneas perpendiculares desde los vértices á cada uno de los tres planos; se forma en seguida para cada plano la suma algebráica de las perpendiculares que le corresponden; y se divide esta suma por el número *n* de los vértices. — En fin, á distancias representadas por los *tres* cocientes, se tiran tres planos respectivamente paralelos á los primeros: — La interseccion comun de estos tres nuevos planos es el punto buscado.

N.º 15. Cuando cuatro puntos A, B, C, D, no estan en un mismo plano, combinándose de tres en tres, determinan *cuatro* planos distintos, y por consiguiente un tetraedro. — Esto supuesto:

Fig. 370.

Teorema IX. (*Fig.* 370.)

En todo tetraedro ABCD, *las rectas* MN, PQ, RS, *que juntan los puntos medios respectivos de las aristas opuestas, concurren en un mismo punto, que es el centro de las distancias medias de los cuatro vértices* A, B, C, D.

Consideremos primero las rectas MN y PQ, y tiremos despues las rectas MP, PN, NQ, QM: las dos rectas MP, NQ, paralelas á BD, son paralelas entre sí; y lo mismo PN, QM, paralelas á AC, son paralelas entre si; luego la figura MPNQ es un paralelógramo cuyas diagonales son MN, PQ; luego estas rectas se cortan en su punto medio O.

De un modo análogo se probaria que las dos rectas MN, RS, se cortan en su punto medio, que no puede ser otro que el punto O.

Concibamos ahora por el punto O un plano cualquiera; y desde los puntos M, N, tiremos las rectas M*m*, N*n*, perpendiculares al plano: los dos triángulos rectángulos O*m*M, O*n*N, son evidentemente iguales y dan $Mm = Nn$. — El mismo raciocinio repetiriamos con las perpendiculares bajadas al plano desde los puntos P, Q, y R, S. — Ademas, estas perpendiculares, iguales de dos en dos, estan situadas, una á un lado y otra á otro del plano; donde se ve que su suma algebráica debe ser nula; por consiguiente (número 14 *de este Apéndice*), el punto O es el centro de las distancias medias de los cuatro puntos A, B, C, D;

L. C. D. D.

Escolio. El punto O se encuentra á la vez en *cuatro* planos tirados paralelamente á las caras, *á una distancia* de cada cara, *igual á la cuarta parte de su distancia* al vértice opuesto.

En efecto, la distancia de este punto á la cara BCD, por ejemplo, es igual á la cuarta parte de las distancias de los cuatro puntos A, B, C, D, al plano BCD (n.° 14); pero las distancias relativas á los tres puntos B, C, D, son nulas; luego, etc.

Teorema X. (*Fig.* 371.) Fig. 371.

N.° 16. *Las cuatro rectas que juntan los vértices de un tetraedro* ABCD *con los centros de las distancias medias de las caras opuestas, concurren en un mismo punto, que es el centro de las distancias medias de los cuatro vértices* A, B, C, D.

Sean G, K, los centros de las distancias medias de las caras BCD, ABC, y tírense las rectas DG, AK; siendo G y K los centros [de las distancias medias] de las caras BCD, ABC, resulta (número 9, *escol.* 3.°, *Apénd.* 1.°) que las rectas DG, AK, prolongadas, deben pasar por el punto medio I de la arista BC comun á las dos caras; luego estas rectas estan en un mismo plano AID, que contiene á las rectas AG, DK; luego estas se cortan necesariamente en un punto O'.

Tiremos ahora la recta GK, y observemos que siendo IG la *tercera parte* de ID, é IK la *tercera parte* de IA (n.° 98), tenemos la proporcion

$$IG : ID :: IK : IA;$$

de donde se deduce que KG es paralela á AD; luego los triángulos O'KG, O'AD, son semejantes por ser equiángulos, y dan la nueva serie de razones iguales,

$$O'G : O'A :: O'K : O'D :: KG : AD.$$

Pero los triángulos semejantes IKG, IAD, dan tambien

$$KG : AD :: IG : ID :: 1 : 3;$$

y por consiguiente,

$$O'G : O'A :: O'K : O'D :: 1 : 3.$$

Luego O'G vale la *tercera parte* de O'A, ó la *cuarta parte* de AG; y O'K es la *tercera parte* de O'D ó la *cuarta parte* de DK.

Como probariamos igualmente que las rectas de union de los vértices B y C con los centros de las caras opuestas deben encontrar á la recta AG en un punto cuya distancia al punto G es la *cuarta parte* de AG, tenemos motivo para concluir que las cuatro rectas tiradas respectivamente desde los cuatro vértices á los centros de las caras opuestas, se reunen en un mismo punto, que se halla situado en cuatro planos respectivamente paralelos á los planos de las caras, á una distancia, respecto de cada cara, y partiendo desde ella, igual á la *cuarta parte* de su distancia al vértice opuesto.

Luego finalmente, en virtud del *escolio* del número precedente, el punto O' es el *centro de las distancias medias*.

De los centros de semejanza.

Teorema XI.

N.° 17. *Si se juntan todos los vértices* A, B, C, D,..., *de un poliedro, con un punto cualquiera* O *del espacio, por medio de rectas* OA, OB, OC, OD, ..., *y en ellas ó en sus prolongaciones se toman partes* OA', OB', OC',..., *proporcionales con las rectas* OA, OB, OC,..., *se obtienen los vértices de un nuevo poliedro que es* DIRECTA *ó* INVERSAMENTE *semejante al primero;* — y el punto O se llama *Centro de semejanza* ESTERNO en el primer caso, é INTERNO en el segundo.

Para la demostracion de esta proposicion y las consecuencias que de ella se derivan, nos referimos á cuanto dijimos en los números 12 y siguientes del *Apéndice primero*, porque serian enteramente análogos los raciocinios; pero vamos á entrar, respecto de los centros de semejanza de *dos* ó de *mas* esferas, en algunos pormenores que pueden ofrecer interes.

Fig. 372. N.° 18. Consideremos primero dos circulos C, C', (*fig.* 372)

[que, para fijar las ideas, supondremos *esteriores uno á otro*], y tracemos la línea de los centros CC′, como tambien las tangentes comunes M*m*, N*n*, tanto *esteriores* como *interiores*.

Esto supuesto, imaginemos que los semicírculos AMB, *amb*, hagan una revolucion entera al rededor de la línea de los centros, llevándose tras sí las dos tangentes comunes: — En este movimiento, los dos semicírculos engendrarán dos esferas (n.° 362), y las dos tangentes, dos superficies cónicas (n.° 357) cuyos vértices serán, para una el *centro de semejanza esterno*, O, de los dos círculos generadores, y para la otra su *centro de semejanza interno*, O′ (n.° 12, *escol. Apéndice* 1.°); — estos puntos se llaman tambien *centros de semejanza esterno* é *interno*, respecto de las dos esferas.

En este mismo movimiento, los puntos de contacto M y *m*, N y *n* describirán circunferencias de círculo, cuyos radios serán las perpendiculares MP y *mp*, NQ y *nq*, bajadas desde dichos puntos á la línea de los centros, y que pertenecerán á la vez á las dos esferas y á las dos superficies cónicas; de modo que se podrá considerar á estas últimas como que envuelven á las primeras, y les son *tangentes* en las circunferencias de círculo MP y *mp*, NQ y *nq*.

N.° 19. Digo ahora que — *Todo plano tangente á una de las superficies cónicas, es tambien tangente á las dos esferas;*

Y recíprocamente, — *Todo plano tangente á las dos esferas es tangente á las dos superficies cónicas.*

Para demostrar la proposicion directa, tiremos por los puntos M y *m*, N y *n*, las tangentes MT y *mt*, NS y *ns*, á los círculos de contacto, *círc.* MP y *círc. mp*, *círc.* NQ y *círc. nq*: — Los planos OMT, O′NS, determinados por los lados M*m*O, N*n*O′, de los dos conos, y por las tangentes MT, NS, son tangentes á los conos (n.° 359). Por otro lado, las mismas rectas M*m*O, N*n*O′, MT, *mt*, NS, *ns*, son tangentes á circunferencias pertececientes á las esferas; luego los planos tangentes á los dos conos en los puntos M y *m*, N y *n*, son tambien tangentes á las dos esferas.

La *recíproca* se demostraria facilmente por medio de lo que acabamos de decir:

Debe ademas observarse que, como por cada uno de los lados del cono, que son en número infinito, se puede tirar un plano que sea tangente á aquellos, resulta que:

Dos esferas dadas en el espacio tienen una infinidad de planos tangentes cuyas intersecciones sucesivas constituyen en cierto modo *dos envolturas*: una, llamada *esterior*, está formada por la serie de planos tangentes, respecto de los cuales estan ambas esferas totalmente colocadas á un mismo lado; otra, llamada *interior*, formada por la serie de planos tangentes, respecto de los cuales una esfera está colocada á un lado y otra á otro.

N.º 20. De aqui resulta que un plano tangente á dos esferas no queda determinado sino cuando está sujeto á una tercera condicion, por ejemplo, la de *pasar por un punto dado*, ó la de *ser tangente á una tercer esfera*.

En el primer caso, se tienen generalmente *dos* planos tangentes que pasan por el punto dado, y estan simétricamente colocados respecto del plano determinado por el punto dado y los centros de las dos esferas. Estas se encuentran, segun las diversas posiciones del punto, á veces al mismo lado, y á veces á lados diferentes de los planos.

Estos dos se reducen á *solo uno* cuando el punto pertenece á una de las aristas de los conos que envuelven á las dos esferas; y *no hay solucion alguna* si el punto dado es interior á uno de los conos.

En el segundo caso, y suponiendo siempre las tres esferas *esteriores unas á otras*, pueden tenerse *cuatro sistemas* de á *dos* planos tangentes á las *tres*, á saber: *dos* planos que comprenden entre sí á las tres esferas, y *seis* colocados de dos en dos entre una de las tres esferas y las otras dos.

Este segundo caso da lugar á un teorema muy notable y análogo al que se demostró en el número 16 del *primer Apéndice*, respecto de tres circunferencias de círculo.

Teorema XII.

N.º 21. *Los* SEIS *centros de semejanza de tres esferas esteriores unas á otras, estan situados de* TRES EN TRES *en una misma recta*: — Los tres centros de semejanza *esternos*, y despues *uno* de los *esternos* y *dos* de los *internos*; lo cual da CUATRO rectas.

En efecto, consideremos primero los dos planos tangentes que comprenden á las tres esferas: — Siendo estos planos á la vez tangentes á los *tres conos esteriores* que envuelven á las esferas (número 19 *de este Apénd.*), contienen á las tres aristas correspondientes á los planos tangentes, y por lo tanto contienen tambien á los tres vértices de los conos; luego su interseccion comun pasa por los tres vértices, es decir, por los tres centros de semejanza *esternos* (número 18 *de este Apénd.*).

Igualmente, cada uno de los dos planos tangentes colocados entre una de las tres esferas y las otras dos, es tangente al cono *esterior* que envuelve á las dos últimas, y á los dos conos *interiores* que envuelven respectivamente á la primera y á la segunda, á la primera y á la tercera: luego su comun interseccion comprende los vértices de esos tres conos, es decir, el centro de semejanza *esterno* de las dos últimas esferas, y los centros de semejanza *internos* de la primera y la segunda, de la primera y la tercera; *L. C. D. D.*

Haremos observar, por conclusion, que esta demostracion puede servir para comprobar la exactitud del teorema en el caso de las tres circunferencias de círculo; porque los centros de semejanza de estos círculos son los mismos que los de tres esferas á quienes ellos pertenecieran como círculos máximos.

Asi es como apoyándose en verdades de la Geometría del *espacio*, se consigue demostrar muy sencillamente otras proposiciones de la Geometría *plana*.

Construccion de los poliedros regulares.

Ya hicimos conocer (n.° 381, *escol.*) los medios de construir el *tetraedro* y el *exaedro regulares*. Nos falta esponer el modo de construir los poliedros cuyos ángulos poliedros son la reunion de *tres* ó *cuatro* ángulos de triángulos *equiláteros*, ó de *tres* ángulos de *pentágonos regulares*.

1.° Octaedro regular. (*Fig.* 373.) Fig. 373.

N.° 22. Designemos por m el lado del triángulo equilátero que debe servir de base á la construccion; y sea ABCD el cuadrado construido sobre él [la figura se supone aquí en relieve]. — Desde el punto O, centro de este cuadrado, *levántese* la recta indefinida LOL′ perpendicular al plano ABCD, y *tómense* en esta recta, partiendo desde el punto O, á una y otra parte del plano, dos partes iguales OE, OF, iguales al radio OA del cuadrado, cuyo radio vale $\frac{1}{2} m \sqrt{2}$ (n.° 257); *tírense* las rectas EA, EB, EC, ED, y FA, FB, FC, FD: la figura asi obtenida es el poliedro pedido.

Desde luego, la figura es un *octaedro* evidentemente; pero ademas digo que este octaedro es *regular*.

En efecto, las ocho rectas que acabamos de trazar son todas iguales (n.° 303); ademas, como el triángulo AOE da

$$AE = \sqrt{2\,\overline{AO}^2} = m = AB,$$

resulta que los ocho triángulos determinados por las rectas son todos equiláteros, iguales entre sí é igualmente inclinados.

Advert. El punto O es un *centro de simetría*. — Tambien es el *centro de la figura* (n.° 382).

2.° Icosaedro regular. (*Fig.* 374.) Fig. 374.

N.° 23. Sobre el lado m del triángulo equilátero dado *constrúyase* un pentágono regular BCDEF; despues, desde el centro O de este polígono, *levántese* una perpendicular al plano BCDEF, y señalemos en ella un punto A tal que dé BA=BC=*m* [lo cual siempre es posible, porque vimos (n.º 239, *escol.*) que el lado BC del pentágono regular es mayor que su radio BO].— *Tírense* finalmente las rectas AB, AC, AD, AE, AF: asi obtenemos *cinco* triángulos equiláteros, iguales entre sí y reunidos en el mismo punto A.

Supongamos despues que en el punto B se forma del mismo modo, empleando la cara ABC, un ángulo pentaedro regular; este segundo ángulo será igual al precedente; sus ángulos diedros serán todos iguales por consiguiente; luego estos dos ángulos pentaedros tendrán dos caras comunes ABC, ABF. Del mismo modo bastarán dos nuevos triángulos CKI, CKD, para formar en el punto C un tercer ángulo pentaedro regular, puesto que los ángulos diedros en AC, BC, tienen un valor conveniente.

Tendremos asi reunidos *diez* triángulos iguales é igualmente inclinados, que formarán una especie de casquete poliédrico ABCDEFGIK, tal que los ángulos del borde, DEFGIK, estan alternativamente compuestos de *dos* ó de *tres* triángulos.

Esta línea poligonal, que termina la superficie, tiene sus lados iguales, pero no puede tener todos sus vértices en un mismo plano; porque si los cuatro puntos, D, E, F, G, por ejemplo, estuvieran en un mismo plano, como los puntos D, E, F, determinan el plano del pentágono BCDEF, seria necesario que la recta FG estuviera situada en él, de donde se seguiria que las caras AFB, BFG, estaban tambien en el mismo, lo cual es *absurdo*.

Pero cualquiera que sea la naturaleza de esta línea, siempre puede imaginarse que se puede construir un casquete igual al primero: todos los ángulos diedros del segundo tendrán el mismo valor que los del primero. Luego, podremos sin solucion de continuidad, reunir los *ángulos dobles* del borde del primero con los *ángulos triples* del borde del segundo, y *vice-versa;* de donde resultará una figura de 20 caras iguales entre sí é igualmente inclinadas, ABCDEFGIKC'B'A'.

Fig. 375. 3.º Dodecaedro regular. (*Fig.* 375.)

N.º 24. Supongamos que con tres *pentágonos regulares* iguales se forma un ángulo *triedro* en A, lo cual es posible (número 409). Sus tres ángulos diedros serán iguales (n.º 333, *escol.* 2.º). Ahora, con nuevos pentágonos iguales á los precedentes, pueden formarse sucesivamente en los puntos B, C, D, E, otros ángulos triedros siempre del mismo valor. Resultarán *seis* pentágonos regulares formando un casquete ABCDEFGIKLMNPQ.

tal que los ángulos del borde estarán compuestos alternativamente de *uno* ó de *dos* ángulos planos.

[Aqui debe hacerse sobre la línea poligonal que termina este casquete la misma observacion hecha arriba en el icosaedro].

Si se imagina despues otro segundo casquete igual al primero, se podrán reunir ambos *borde á borde*, de modo que los ángulos *simples* del uno se enlacen con los *dobles* del otro; y asi se tendrá una figura compuesta de *doce* caras iguales é igualmente inclinadas.

N.º 25. Escolio 1.º—Para construir *mecánicamente* un poliedro regular, se traza primero en una hoja de carton, tomando una de las caras por *base* de la construccion, el desarrollo de todas las caras, segun se indicó en los n.os 356 y 361, y despues se *pliegan* convenientemente las diversas caras por las aristas comunes.

Escolio 2.º Todos los poliedros regulares, á escepcion del tetraedro, tienen un *centro de simetría*, que es el mismo *centro de figura* (n.º 382).

Todos tienen tambien *planos de simetría*,—que son en general planos perpendiculares á los puntos medios de las aristas ó de las rectas que juntan los vértices opuestos de dos en dos, ó bien planos que pasan por las aristas opuestas tomadas de dos en dos.

Esc. 3.º El *tet.dro regular* tiene	4 vértices,	4 caras y	6 aristas.
El *cubo*	8 vértices,	6 caras y	12 aristas.
El *octaedro*	6 vértices,	8 caras y	12 aristas.
El *dodecaedro*	20 vértices,	12 caras y	30 aristas.
En fin, el *icosaedro*	12 vértices,	20 caras y	30 aristas.

Escolio general sobre los poliedros. — Estas espresiones, que pueden comprobarse facilmente en las figuras que hemos construido, estan implícitamente comprendidas en el enunciado de un teorema debido al célebre Euler, y que se traduce en la fórmula

$$V + C = A + 2,$$

designando V el número de los vértices, C el de las caras, y A el de las aristas.

Hay ademas muchos teoremas mas ó menos importantes sobre los poliedros en general, para cuya demostracion remitimos á la *Memoria* de MM. Cauchy, ya citada, y á los *Anales de Matemáticas* de M. Gergonne, en diversos lugares, y principalmente en el t. 15, página. 157.

SEGUNDA SECCION.

De las superficies de revolucion. — De las superficies desarrollables y de las gauchas. — Intersecciones de un cilindro y un cono por un plano.

Superficies de revolucion.

N.° 26. Se llama *superficie de revolucion* toda superficie engendrada por una línea, recta ó curva, sujeta á hacer una revolucion entera al rededor de una recta *fija*, que por lo comun se supone en un mismo plano con la línea movible; — y *sólido* ó *cuerpo de revolucion*, la parte del espacio, circunscrita por la superficie: cuya parte del espacio es *limitada* ó *indefinida*, segun que la curva movible está cerrada ó se estiende indefinidamente.

La figura engendrada por un triángulo al rededor de un eje fijo (n.° 456) no es mas que un caso particular de los *sólidos de revolucion*.

Se llama *generatriz* la línea movible, y la recta fija se llama *eje de revolucion*.

Todo plano que pasa por el eje se llama *plano meridiano*, y este plano determina, por su interseccion con la superficie, una línea que no es mas que una de las posiciones de la generatriz, cuando esta se halla situada en un mismo plano con el eje; de lo contrario, la interseccion del plano meridiano con la superficie puede ser una curva enteramente distinta de la generatriz.

Por ejemplo, concibamos que una recta indefinida no situada en un mismo plano con otra recta haga una revolucion entera al rededor de esta. — En este caso, un plano meridiano cualquiera corta la superficie en una *hipérbola* (n.° 55 *del* 1.er *Apénd.*), como se demuestra en la *Geometría analítica*; y esto es lo que ha hecho dar á la superficie engendrada el nombre de *hiperboloide de revolucion*.

Uno de los caractéres esenciales de una superficie de *revolucion* consiste en que — *Cada punto de la línea movible describe* en el espacio *una circunferencia de círculo, cuyo plano es perpendicular al eje, y cuyo radio es la perpendicular bajada* *desde el punto al eje:* su *centro* es ademas el pie de la perpendicular. — Asi llegamos á una propiedad de los planos tangentes á las superficies de revolucion, que será el objeto del teorema siguiente.

Teorema I.

N.° 27. *Todo plano tangente á una superficie de revolucion en un punto dado de ella, es perpendicular al plano meridiano tirado por dicho punto.*

En efecto, por lo comun se define un *plano tangente* á una superficie, diciendo que es el *elemento* de la superficie en el punto que se considera, *prolongado indefinidamente en todos sentidos;* definicion que conviene con la que hemos dado de la tangente (n.° 37, *Apénd.* 1.°), y de la cual resulta necesariamente que — *El plano tangente en un punto de la superficie, contiene todas las tangentes á las curvas resultantes de cortar la superficie por medio de planos que pasen por dicho punto.*

Esto supuesto, en el punto dado, concibamos un plano tangente á la superficie, y por el mismo punto tiremos un plano perpendicular al eje: este plano corta á la superficie en una circunferencia de círculo, y al plano tangente en una tangente á dicho círculo. Pero esta tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto, y por consiguiente, en virtud del teorema sobre los planos, demostrado en el n.° 300, es tambien perpendicular al plano meridiano correspondiente; luego el plano tangente, que contiene á esta tangente, es tambien perpendicular al plano meridiano (n.° 309);

L. C. D. D.

Escolio. Siempre que una superficie de revolucion ha sido engendrada por una línea *no situada en el mismo plano con el eje*, puede ser susceptible de otra generacion, en la que la generatriz es la *interseccion* de la superficie con un plano meridiano.

Teorema II. (*Fig.* 376.) Fig. 376.

N.° 28. Cuando la superficie de revolucion está engendrada por una linea *cerrada*, y situada en un mismo plano con el eje,

1.° *El area de la superficie tiene por espresion el producto de la línea generatriz* [rectificada], *multiplicada por la circunferencia que describe el centro de las distancias medias de la misma* [considerada como un polígono *infinitesimal* (n.° 9, *Apéndice* 1.°)];

2.° *El volúmen del espacio determinado por esa superficie, es igual al area que termina la generatriz, multiplicada por la misma circunferencia.*

1.° Concibamos la curva generatriz descompuesta en sus elementos MM', $M'M''$,...; y sean mp, $m'p'$, $m''p''$,... las perpendiculares bajadas desde sus puntos medios al eje LL'. Sean ademas S la superficie total, s, s', s'',..., las superficies parciales engendradas por los diferentes elementos, que, para simplificar, pueden suponerse todos iguales entre sí y representados por e; sea en fin n el número infinito de estos elementos. Esto supuesto, cada elemento, girando en torno al eje, engendra la superficie convexa de un tronco de cono, y por consiguiente, para cada superficie parcial tenemos sucesivamente

$$S = 2\pi.mp.e, \qquad S' = 2\pi.m'p'.e, \qquad S'' = 2\pi.m''p''.e,...;$$

de donde se deduce $S = 2\pi(mp + m'p' + m''p'' + ...)e$,

ó bien
$$S = 2\pi.\frac{mp + m'p' + m''p'' + ...}{n} \times n.e.$$

Pero $n.e$ representa la generatriz; y $2\pi.\dfrac{mp + m'p' + ...}{n}$ la circunferencia que tiene por radio la perpendicular bajada al radio desde el centro de las distancias medias; luego, etc.

2.° Designemos por V el volúmen del cuerpo, por A el area de la superficie circunscrita por la generatriz, y concibamos esta superficie dividida en un número infinito n de rectángulos todos iguales entre sí, tales que $abcd = r$, y que tengan dos lados perpendiculares al eje [y los otros dos por consiguiente paralelos al mismo]. Prolónguense ademas ab, ac, hasta su encuentro en a', d', con LL'; y bájese desde el punto o, centro del rectángulo, la perpendicular oi sobre LL'.

Hecho esto, es claro que el pequeño rectángulo, en su movimiento al rededor del eje, engendra una especie de figura *anular* cuyo volúmen es la diferencia entre los volúmenes de dos cilindros que tienen bc por altura comun, y aa', ba', por radios de sus bases. Tenemos pues

$$\text{vol. } abcd = \pi(aa'^2 - ba'^2).bc = \pi(aa' + ba')(aa' - ba').bc,$$

espresion que puede ponerse bajo la forma

$$\text{vol. } abcd = 2\pi.\frac{aa' + ba'}{2}.ab.bc = 2\pi.oi \times abcd = 2\pi.oi.r.$$

Del mismo modo se obtendria

$$\text{vol. } a'b'c'd' = 2\pi.o'i'.r, \quad \text{vol. } a''b''c''d'' = 2\pi.o''i''.r;...$$

Luego

$$V=2\pi\,(oi+o'i'+o''i''+\ldots).r=2\pi.\frac{oi+o'i'+o''i''+\ldots}{n}\times n.r.$$

Pero $n.r$ representa evidentemente la superficie terminada por la generatriz, y $\frac{oi+o'i'+o''i''+\ldots}{n}$ la perpendicular bajada al eje desde el centro de las distancias medias: luego está demostrada la segunda parte de la proposicion.

Escolio. Hemos hallado (n.° 456) por espresion del volúmen engendrado por un triángulo CAB (*fig.* 377) al rededor de una recta LL' tirada por uno de sus vértices C, Fig. 377.

$$vol.\ CAB = superf.\ AB \times \frac{CK}{3},$$

siendo CK la perpendicular bajada desde el punto C sobre AB. Pero si se junta el punto C con el punto medio de AB, y se baja DE perpendicular á LL', se tiene

$$superf.\ AB = 2\pi.DE.AB\ (\text{n.° } 447);$$

de donde $$vol.\ CAB = 2\pi.DE.AB.\frac{CK}{3},$$

ó bien $$vol.\ CAB = 2\pi.\frac{2}{3}DE.\frac{AB.CK}{2}.$$

Pero $\frac{AB.CK}{2}$ es la espresion del area del triángulo CAB; y $\frac{2}{3}$DE es igual á la perpendicular OI bajada al eje LL' desde el centro de las distancias medias (n.° 98, *escolio*).

Luego finalmente $vol.\ CAB = 2\pi.OI.area\ CAB$;

lo cual comprueba, respecto del triángulo, la exactitud del teorema enunciado.

De las superficies regladas.

N.° 29. Se da el nombre de SUPERFICIES REGLADAS á todas las superficies tales que en cada uno de sus puntos, *se le puede aplicar una recta, en un sentido á lo menos.*

Las superficies regladas se dividen en tres géneros.

El plano, que por su naturaleza es necesariamente una superficie reglada, y la mas sencilla de todas, constituye solo el primer género: los otros dos solo contienen superficies curvas: — y son las *superficies desarrollables* y *las gauchas ó alabeadas.*

De las superficies desarrollables.

Antes de tratar el caso general, daremos una estension conveniente á las definiciones del cilindro y del cono.

N.° 30. Consideremos en el espacio una curva cualquiera cuyos puntos *estan* á la vez todos, ó *no estan* en un mismo plano [en cuyo último caso se dice que es de *doble curvatura* (*)]; y concibamos una recta movible sujeta á la condicion de encontrar constantemente á la curva propuesta en alguno de sus puntos, y á la de *permanecer siempre paralela* á otra recta de direccion determinada, ó á la de *pasar constantemente por un mismo punto:* la superficie asi engendrada se llama, en el primer caso, superficie CILÍNDRICA, y en el segundo, superficie CÓNICA.

En el primer caso, se llama *cilindro* el espacio comprendido entre la superficie y des planos paralelos que cortan á la recta movible en todas sus posiciones; en el segundo, se llama *cono* el espacio comprendido, partiendo desde el punto por donde pasa constantemente la recta movible, entre la superficie engendrada y un plano tirado á voluntad, pero de modo que corte todas las posiciones de la dicha recta.

Esta recta se llama *generatriz, arista* ó *lado* de la superficie; y se llama *directriz* la línea que debe ir recorriendo la generatriz.

Cuando la directriz es una circunferencia de círculos, la superficie, cilíndrica ó cónica, se llama de *base circular.* — La recta tirada por el centro del círculo *paralelamente* á la generatriz del cilindro, ó bien la recta que *junta el centro del círculo con el vértice del cono*, se llama *eje* del cilindro ó del cono.

Si, siendo la directriz un círculo, el plano de este círculo es perpendicular al eje, se llaman *rectos* el cilindro y el cono; lo cual está conforme con las definiciones dadas en los números 353 y 357.

Si el plano del círculo es oblicuo al eje, se tiene un cilindro ó un cono *oblicuo de base circular.*

(*) Esta denominacion está fundada en que siendo en general una línea la interseccion de dos superficies (n.° 1.°, *Introd.*), su naturaleza y su forma deben depender de cada una de las *curvaturas* de las dos superficies.

En fin, puede decirse, en el caso del *cono*, que la superficie del cono recto es—*La superficie que describe una recta sujeta á pasar por un punto dado y á formar constantemente un mismo ángulo con una recta dada.*

N.º 31. Haremos aquí dos observaciones importantes.

Primera observacion:—De cualquier naturaleza que sea la directriz de la superficie cilíndrica ó cónica, puede muy bien suceder que la superficie sea la de un cilindro ó cono recto.

Para probarlo, basta concebir en la superficie de un cilindro recto (*fig.* 290) ó en la de un cono recto (*fig.* 292), una curva enteramente arbitraria, la cual podrá entonces considerarse como si hubiera servido primitivamente de *directriz* á la recta movible. Pero la superficie no por eso dejará de ser la de un cilindro ó cono rectos, porque estan ya satisfechas las condiciones de su definicion. Fig. 290. Fig. 292.

Añadiremos á esto el que en una superficie dada, cilíndrica ó cónica, nada impide tomar por *directriz* una curva cualquiera de las trazadas en ella, cuando esta curva es mas sencilla que considerada en un principio.

La *segunda* observacion se refiere al cono.

Siendo la generatriz una recta indefinida en los dos sentidos, resulta que toda superficie cónica está necesariamente compuesta de dos partes distintas que *se estienden indefinidamente* á una y otra parte del punto fijo.—Estas dos partes se llaman *hojas* de la superficie; el punto fijo se llama entonces su *centro*, conviniendo mas particularmente la denominacion de *vértice* al caso particular de considerarse una sola de las hojas.

N.º 32. Ya hemos visto (n.ºˢ 356 y 361) que las superficies del cilindro y del cono rectos gozan de la propiedad de poder desarrollarse en un solo y mismo plano. Esta propiedad corresponde esencialmente á todas las superficies cilíndricas y cónicas. Porque si se concibe una curva cualquiera trazada en la superficie, y despues de haberla dividido en sus *elementos*, se tiran por los estremos de estos las generatrices, la superficie quedará tambien dividida en una infinidad de bandas ó fajas laterales que constituirán sus *elementos*.—Mas todas estas bandas son planas, porque cada cual está determinada por dos líneas rectas paralelas ó concurrentes. Luego se puede, como en el caso del cono recto, desarrollarlas en un mismo plano, por ejemplo, en el plano de una de las bandas prolongadas indefinidamente.

N.º 33. Se llaman por lo general SUPERFICIES DESARROLLABLES aquellas que *tienen constantemente en un plano dos aristas ó generatrices consecutivas*, infinitamente cercanas.—Su denominacion proviene de que todas ellas pueden estenderse, desarrollarse ó desenvolverse en un plano. Resulta en efecto de su definicion, que pueden considerarse como compuestas de partes de plano, infinitamente estrechas en un sentido, pero infinitamente alargadas en el de las aristas; y como cada arista resulta comun á dos porciones consecutivas, resulta que se les puede aplicar lo que se dijo respecto de las superficies cilíndricas y cónicas.

Fig. 378. Sean *aa′, bb′, cc′, dd′*,... (*fig.* 378) las generatrices inmediatamente cercanas de la superficie, que se cortan en los puntos *a, b, c, d*,... muy próximos, y que forman una línea *abcd*...

Esta línea, que ordinariamente es una curva *de doble curvatura*, se llama ***arista de retroceso*** ó ***variacion*** de la superficie.

En el cono, el arista de retroceso se reduce á un punto, que es el *centro* de la superficie cónica. No existe en las superficies cilíndricas, ó se puede decir que la tienen en el infinito.

El arista de retroceso divide á toda superficie desarrollable [que no sea el cilindro] en dos partes distintas que se llaman *hojas*.

Nada mas diremos sobre este género de superficies, muchas de las cuales han recibido en las artes nombres particulares (*).

De las superficies gauchas.

N.° 34. Toda superficie curva engendrada por una línea recta, pero de tal modo que dos generatrices consecutivas no esten en un mismo plano, se llama SUPERFICIE GAUCHA.

La mas simple de todas estas superficies se designa comunmente con el nombre de ***plano alabeado;*** y se obtiene del modo siguiente:

Fig. 379. Sea ABCD (*fig.* 379) un cuadrilátero cuyos vértices no esten en un mismo plano [en cuyo caso se llama *cuadrilátero gaucho*]. Tírese por el punto B la recta BE paralela á AD, y por el vértice D opuesto al B, la recta DE paralela á AB: los planos determinados por los dos sistemas de rectas BC y BE, DC y DE, son respectivamente paralelos á las rectas AD y AB (n.° 315). Esto supuesto,

Concibamos en primer lugar un plano paralelo al plano EBC: este plano corta á las rectas AB, DC, en dos puntos M y N, tales que la recta MN es tambien paralela al plano EBC. Tirando asi una serie de planos paralelos al plano EBC, irán resultando una

(*) Las superficies ejecutadas por los *cartoneros*, *hojalateros*, etc., son generalmente superficies desarrollables, porque se construyen *doblando*, *encorvando* ó *contorneando* de diversos modos, superficies planas.

serie de rectas MN, M'N', M''N'',..., paralelas á ese mismo plano, y tales que dos cualesquiera de ellas, por ejemplo, MN, M'N', nunca pueden estar situadas en un mismo plano: pues de lo contrario, los cuatro puntos M, M', N, N', y por consiguiente las rectas AB, DC, estarian situadas en un mismo plano, lo cual seria contrario á la naturaleza del cuadrilátero ABCD.

El conjunto de esas rectas MN, M'N', M''N'',..., constituye una superficie curva, que es la superficie pedida.

Los cuatro lados del cuadrilátero hacen forzosamente parte de la superficie; porque desde luego los lados AB, DC, le pertenecen, por ser en cierto modo *directrices* de la recta movible. Y los lados BC, AD, representan dos posiciones particulares de la generatriz, por estar la BC situada en el plano EBC, y ser la otra AD, paralela á BE en virtud de la construccion, y por consiguiente paralela al plano EBC.

La superficie se estiende indefinidamente mas allá de los vértices del cuadrilátero.

Si se concibe ahora una serie de planos paralelos al EDC, se obtendrá igualmente una serie de rectas, tales como PQ, cuyo conjunto constituirá una superficie análoga á la precedente. Pero es facil comprobar que coinciden entrambas.

En efecto, tomemos un punto O en una de las generatrices MN de la primer superficie; y despues, por el punto O y la recta AB, y por el mismo punto y la recta CD, tiremos dos planos OAB, ODC: la interseccion comun de estos dos planos que, en virtud de la naturaleza del cuadrilátero, no pueden nunca confundirse, debe ser necesariamente paralela al plano EDC; porque si pudiera tener una direccion tal como OK, encontrando á este plano en el punto K, el plano ODC se confundiria con el plano EDC que contendria tambien el punto K; y por la misma razon, el plano OAB, que contiene al punto K, se confundiria con el plano ODC ó EDC, lo cual es *absurdo*.

La interseccion comun de los dos planos OAB, ODC, debiendo ser paralela al plano EDC, representa una de las posiciones, PQ, de la generatriz de la segunda superficie. De donde resulta que cada punto de la generatriz MN de la primera pertenece á la segunda. *Luego*, etc.

Asi, el *plano alabeado* puede definirse:—*Una superficie engendrada por el movimiento de una recta que se desliza á lo largo de dos lados opuestos de un cuadrilátero gaucho, permaneciendo siempre paralela á un plano paralelo al determinado por los otros dos lados del cuadrilátero* (n.° 323);—resulta de esta definicion, como se dijo mas arriba, que—*Por cada punto de la superficie, se pueden tirar dos rectas que esten en ella enteramente situadas.*

Añadiremos que, en virtud de una proposicion de los planos paralelos (n.° 321), tenemos para todas las posiciones de la generatriz MN, la serie de proporciones

$$\begin{aligned} AM &: MB :: DN : NC, \\ AM' &: M'B :: DN' : N'C, \\ AM'' &: M''B :: DN'' : N''C, \ldots \end{aligned}$$

La misma observacion hariamos respecto de la segunda generacion.

N.° 35. Despues del plano alabeado, viene la superficie *conoide*, ó la superficie engendrada, por ejemplo, por una recta horizontal que se mueve á lo largo de una vertical, apoyándose á la vez en una curva que se supone ordinariamente trazada, ya en un plano vertical, ya en un cilindro cuyo eje es vertical (*).

De las secciones cilíndricas y cónicas.

Terminaremos este Apéndice, investigando la naturaleza de las intersecciones de un plano con un cilindro ó un cono.

Fig. 380.

Teorema III. (*Fig.* 380.)

N.° 36. *En un cilindro recto circular, toda seccion* AMBM' *oblicua á las bases, es una elipse.*

Concibamos dos esferas, del mismo radio que el cilindro, tangentes en F y F', al plano secante, y que, inscritas en el cilindro, tocan su superficie lateral en dos circunferencias que tienen los diámetros *ab*, *a'b'*. Juntemos los puntos F, F', con un punto cualquiera M del contorno de la seccion, y tiremos la generatriz KMK': como las rectas FM, F'M, KK', tocan á las esferas en los puntos F, F', K y K', tenemos (n.° 103) MF=MK, MF'=MK', y por consiguiente,

$$FM + F'M = MK + MK' = KK' = aa' = bb'.$$

(*) Estas superficies han recibido en las artes los nombres de *bóvedas de arista*, *trompas cónicas*, *superficies rampantes*, etc. — Tal es la superficie inferior de una escalera de caracol, cuyas directrices son, — 1.° — el *eje* vertical de un cilindro; — 2.° — una curva llamada *hélice*, trazada en la superficie de otro cilindro tambien vertical.

Esta última superficie, llamada superficie *helizoide*, es tambien la base de la construccion del *tornillo* ó *rosca*, máquina muy usada en mecánica.

Luego, cualquiera que sea la posicion del punto M en la curva, la suma de sus distancias á los dos puntos fijos F, F′, es igual á la cantidad constante aa', ó bb'.

Esta cantidad constante es ademas igual á AB; porque tenemos

1.° $\quad Aa' = AF'$ (n.° 103), $Aa = AF$;

de donde $\quad aa' = AF' + AF = FF' + 2AF$;

2.° $\quad Bb' = BF', \qquad Bb = BF$;

de donde $\quad bb' = BF' + BF = FF' + 2BF'$;

luego, á causa de ser $aa' = bb'$, tendremos $AF = BF'$,

y por consiguiente, $\quad aa' = bb' = AB$.

Asi pues (n.° 49, *Apénd.* 1.°), la curva es una elipse cuyo eje mayor es AB, y los focos los puntos F, F′, en que las dos esferas tocan al plano de la seccion.

Teorema IV. (*Fig.* 381). Fig. 381.

N.° 37. *Todo cilindro oblicuo de bases circulares* (n.° 30 *de este Apéndice*) *puede dar un círculo cortándose por un plano no paralelo á las bases.*

Porque el simétrico del plano de la base AB, respecto á una seccion MN perpendicular á las aristas, corta al cilindro dando una figura A′B′ simétrica de esta base, y por consiguiente, dando un círculo que tiene un radio $O'A' = OA$.

Escolio. Asi pues, en un punto cualquiera de la superficie cilindrica se pueden dar dos secciones circulares iguales, que se llaman *secciones antiparalelas.*

Teorema V. (*Fig.* 382, 383, 384.) Fig. 382, 383, 384.

N.° 38. *En un cono recto circular, toda seccion que no pasa por el vértice, es una elipse, una hipérbola, ó una parábola.*

Puede suceder que el plano secante encuentre á todas las generatrices del cono á un mismo lado respecto del centro S (*fig.* 382), ó bien que encuentre á unas á un lado y á otras á Fig. 382.
otro (*fig.* 383), ó bien finalmente que sea paralelo á una sola de Fig. 383.
ellas (*fig.* 384). Fig. 384.

Primer caso. (*Fig.* 382).—Sea SAB el plano dirigido por Fig. 382.
el eje SO perpendicularmente á la seccion AMBM′. Concibamos

dos esferas que tengan los mismos centros y los mismos radios que la circunferencia inscrita al triángulo SAB, y la circunferencia ex-inscrita que toca á AB (n.° 127, *escol.* 1.°); estas esferas tocan al plano secante en F, F', y á la superficie cónica en las circunferencias ab, $a'b'$, cuyos planos son perpendiculares al eje. Júntense los puntos de contacto F, F', con un punto cualquiera M del perímetro de la seccion AMBM', y tírese la generatriz SM. Esto supuesto, siendo FM, F'M, SM, tangentes á las esferas en los puntos F, F', K y K', tendremos

$$MF=MK,\ MF'=MK';\ \text{de donde}\ MF+MF'=KK'=aa'=bb'.$$

Se probaria ademas como respecto del cilindro (n.° 36), que

$$aa'=bb'=AB.$$

Asi pues, (n.° 49, *Apénd.* 1.°), la seccion es una elipse cuyo eje mayor es AB, y los focos los puntos F, F', en que las dos esferas tocan al plano de la seccion.

Fig. 383. Segundo caso. (*Fig.* 383). — Prolongando todas las generatrices del cono para formar el cono opuesto, y haciendo construcciones y raciocinios análogos á los precedentes, hallamos $F'M-FM=aa'=AB$. De donde resulta que la seccion MAM' es una rama de hipérbola cuyo eje *transverso* es AB, y que tiene por focos los puntos F, F', en que las dos esferas tocan al plano de la seccion.

Fig. 384. Tercer caso. (*Fig.* 384). — Si la seccion, y por consiguiente la recta AB, es paralela á la generatriz Sb, resulta tambien $MF=MK$; los planos ab y SbK encuentran al plano de la seccion en las rectas XY y MT, una perpendicular, y otra paralela á AB;

asi pues, tenemos $MT : Sb :: MK : SK$.

Pero $Sb=SK$; luego $MT=MK$, y por consiguiente $MF=MT$.

De donde resulta que la seccion MAM' es una parábola cuyo foco y directriz (n.° 57 del *Apénd.* 1.°) son F y XY.

Escolio. Ahora se ve por qué la *elipse*, la *hipérbola*, y la *parábola*, se designan bajo el nombre comun de *secciones cónicas*. — Las secciones *circulares* estan comprendidas en la *elipse*.

Fig. 385. Teorema VI. (*Fig.* 385).

N.° 39. *Todo cono oblicuo de base circular* SACB, *puede dar un círculo cortándose por un plano no paralelo á la base* ACB.

La superficie esférica determinada por el vértice S y tres puntos tomados á voluntad en la circunferencia ACB, la contienen evidentemente. Tiremos el diámetro SOI de esta esfera; es facil probar que toda seccion *ab* hecha en el cono por un plano perpendicular á este diámetro en un punto cualquiera *o*, es un círculo.

En efecto, tiremos arbitrariamente la generatriz SC que encuentra al plano *ab* en un punto *k*; juntemos despues los puntos C y *k* respectivamente con los puntos I y *o* por medio de las rectas CI, *ko*: los ángulos SCI, *ko*I, son rectos, el primero porque está inscrito á la semicircunferencia SCI, el segundo porque SI es perpendicular al plano secante *ab*; luego el cuadrilátero IC*ko* es inscriptible á una circunferencia (n.° 129); de donde resulta que

$$SI \times So = SC \times Sk \text{ (n.° 229)}.$$

Sean ahora SH la altura del cono, y *kg* la perpendicular tirada á SC en el plano SCH: los ángulos CH*g*, *gk*C, son rectos, y por consiguiente el cuadrilátero CH*gk* da tambien

$$SC \times Sk = SH \times Sg;$$

luego, á causa de la primera relacion, tendremos

$$SI \times So = SH \times Sg.$$

Ahora bien, como las rectas SI, S*o*, SH, son invariables, la distancia S*g* lo es tambien. Luego las rectas *k*S, *kg*, tiradas desde un punto cualquiera *k* del perímetro de la seccion *ab* á los puntos fijos S y *g*, se cortan en ángulo recto. Por consiguiente, este perímetro está situado enteramente en la superficie esférica descrita con el diámetro S*g*. Pero se sabe que toda seccion plana de una esfera es un círculo (n.° 363); luego, etc.

Escolio. Asi pues, en un punto cualquiera de la superficie de un cono oblicuo de base circular, se pueden, como en el cilindro, obtener dos secciones circulares, que se llaman tambien secciones *antiparalelas*.

Conclusion. Los principios que acabamos de esplicar en esta seccion del Apéndice segundo, pueden considerarse como una especie de introduccion á la segunda parte de la Geometría descriptiva, cuyos *Preliminares* forma el tercer capítulo del libro tercero.

Esta segunda parte, mucho mas estensa, tiene por fin especial hacer conocer métodos — 1.° — para *tirar planos tangentes* á superficies curvas determinadas de forma y de posicion, — 2.° — para *determinar las intersecciones* mútuas de dos ó mas superficies,—3.°—cuando se trata de superficies desarrollables, para *construir su desarrollo*, y *determinar* en él *la forma* que toman las intersecciones, etc... Pero el esponer aun sucintamente estos métodos, nos llevaria muy lejos; y remitimos para este objeto á los *Tratados* de MM. Monge y Hachette, como tambien á las obras mas elementales de MM. Leroy y Lefebure de Fourcy.

FIN DE LA SEGUNDA PARTE Y DE ESTA OBRA.

ÍNDICE.

SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

LIBRO III. — DE LAS FIGURAS CONSIDERADAS EN EL ESPACIO.

CAPÍTULO PRIMERO. — *Del plano y de los cuerpos terminados por superficies planas.*

CAPÍTULO II. — *De los tres cuerpos redondos.*

CAPÍTULO III. — *Problemas sobre la Geometría del espacio.— Principios de Geometría descriptiva.*

LIBRO IV. — DE LA ESTENSION CONSIDERADA EN EL ESPACIO.

CAPÍTULO PRIMERO. — *Semejanza de los poliedros.—Determinacion de sus areas y volúmenes.*

CAPÍTULO II. — *Areas y volúmenes de los tres cuerpos redondos.*

CAPÍTULO III. — *Problemas numéricos sobre la estension de tres dimensiones.*

APÉNDICE

Á LOS DOS ÚLTIMOS LIBROS.

PRIMERA SECCION.

De la simetría en el espacio.—Centros, ejes y planos de simetría.—Planos diametrales.—Centro de las distancias medias.—Centros de semejanza.—Construccion de los poliedros.

SEGUNDA SECCION.

De las superficies de revolucion.—De las superficies desarrollables y de las gauchas.—Intersecciones de un cilindro y de un cono con un plano.

FIN DEL ÍNDICE.

Fig. 4.

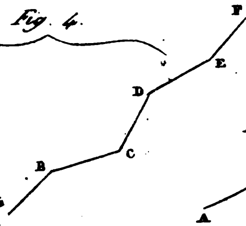


Fig. 5.

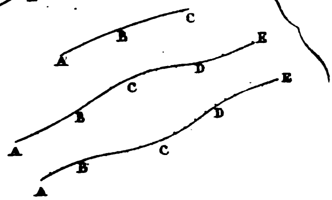


Fig. 10.

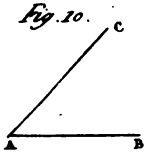


Fig. 11.

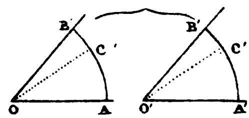


Fig. 16.

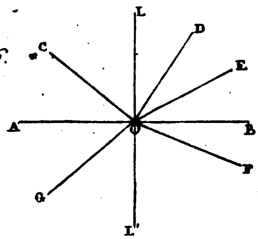


Fig. 21.

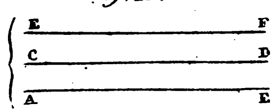
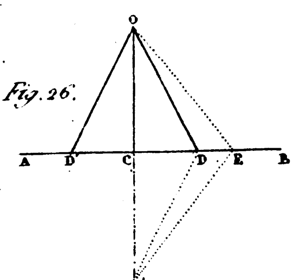


Fig. 26.



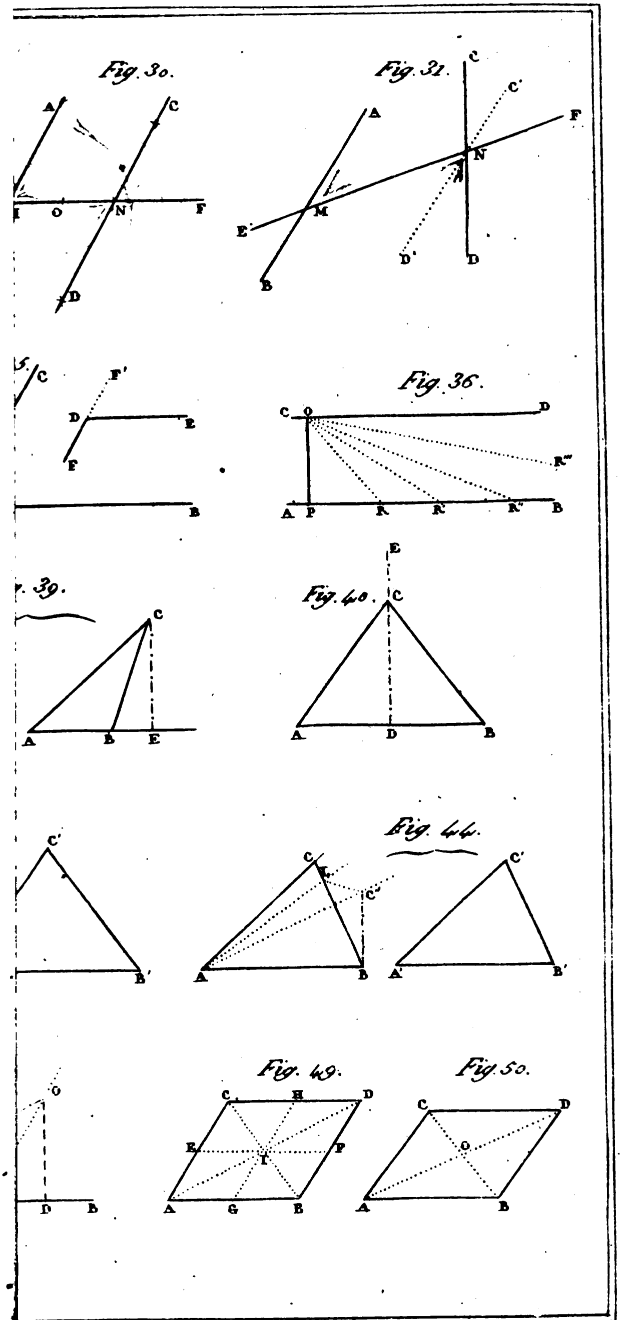


Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 36.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 44.
Fig. 49.
Fig. 50.

Fig. 55.

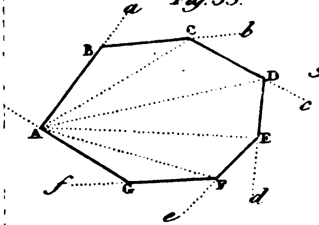


Fig. 56.

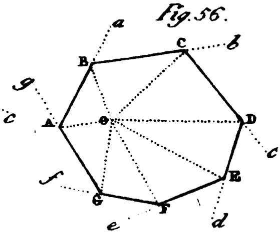


Fig. 60.

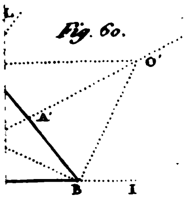
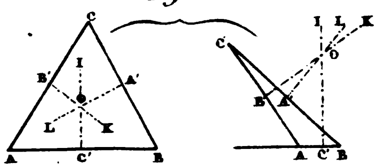


Fig. 61.



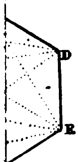


Fig. 66.

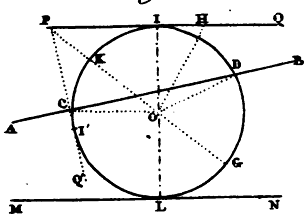


Fig. 71.

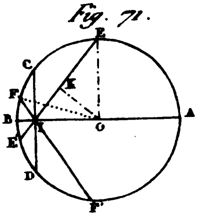


Fig. 72.

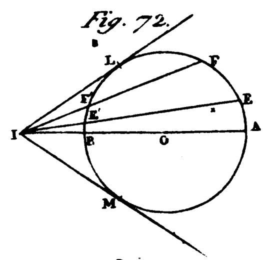


Fig. 75.

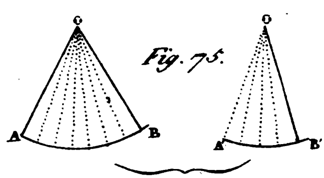


Fig. 80.

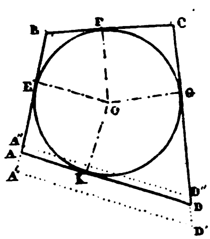
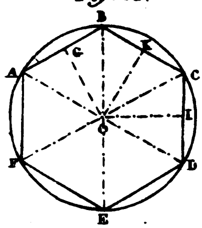


Fig. 81.



g. 85.

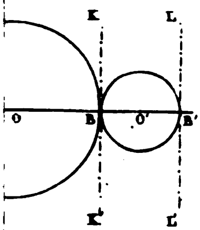
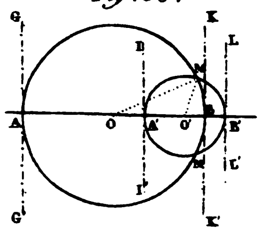


Fig. 86.



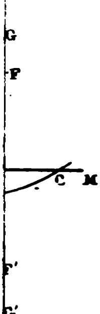


Fig. 91.

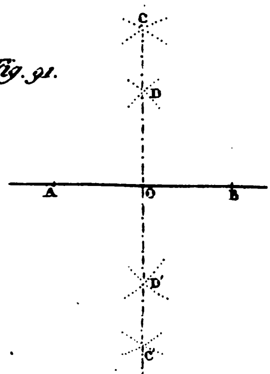


Fig. 95.

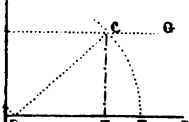


Fig. 96.

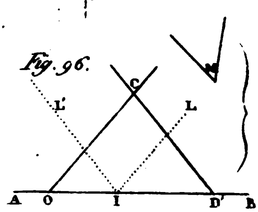


Fig. 100.

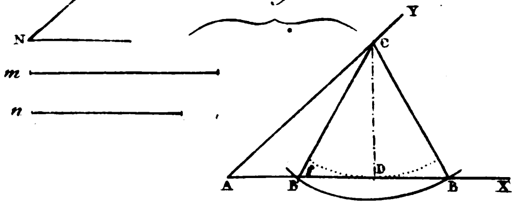


Fig. 104.

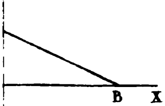
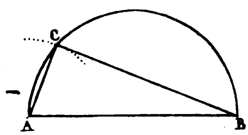


Fig. 105.



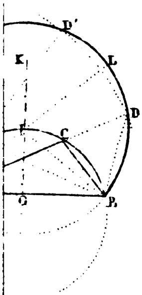
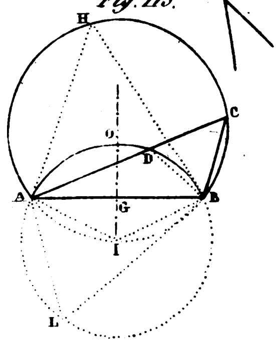


Fig. 110.



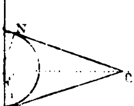


Fig. 114.

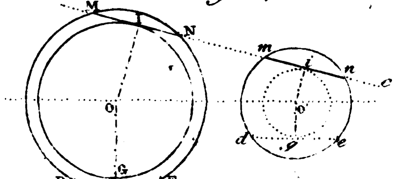


Fig. 118.

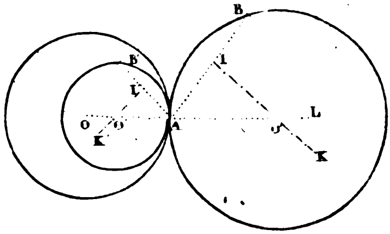


Fig. 122.

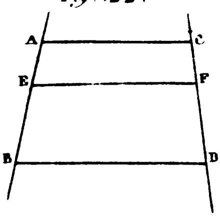


Fig. 123.

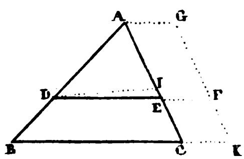


Fig. 127.

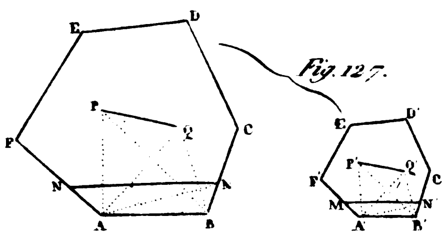


Fig. 131.

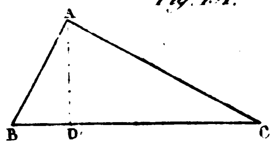


Fig. 135.

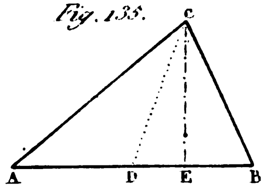
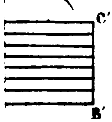


Fig. 138.



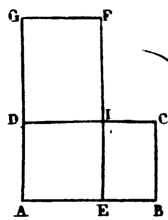


Fig. 139.

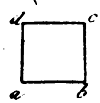
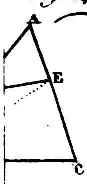


Fig. 143



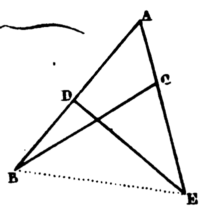


Fig. 144

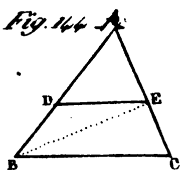


Fig. 148.

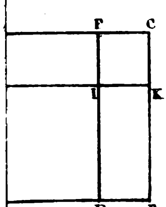


Fig. 149.

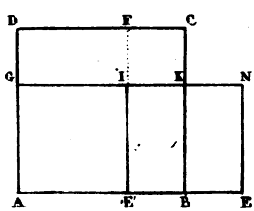


Fig. 154.

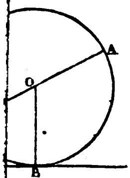


Fig. 155.

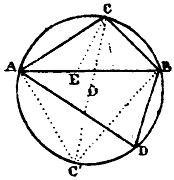


Fig. 156.

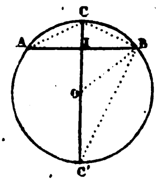


Fig. 161.

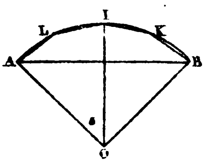


Fig. 162.

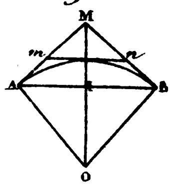


Fig. 168.

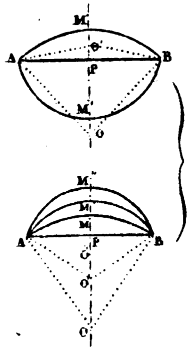


Fig. 167.

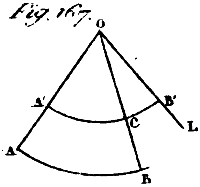


Fig. 172.

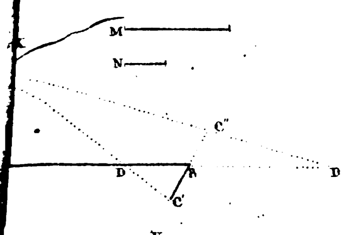


Fig. 173.

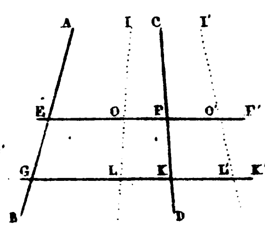


Fig. 178.

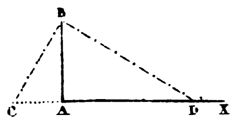


Fig. 179.

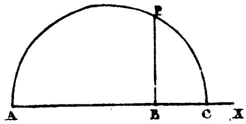


Fig. 183.

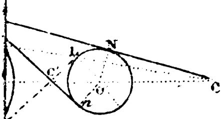
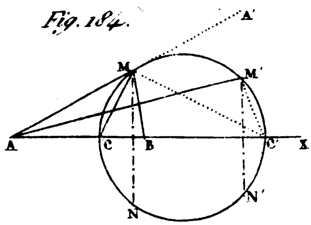
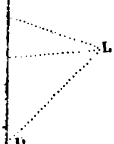


Fig. 184.





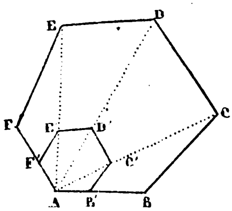
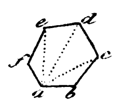
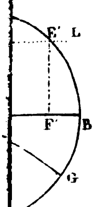


Fig. 188.





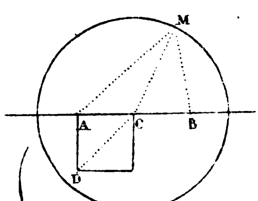


Fig. 193.

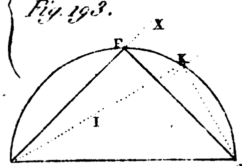
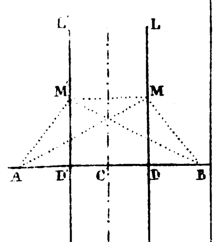


Fig. 194.



196.

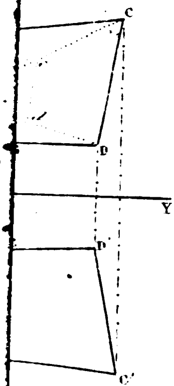


Fig. 196. bis

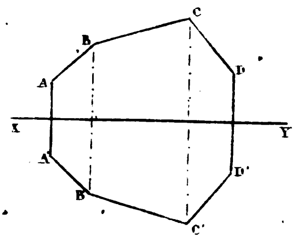


Fig. 200.

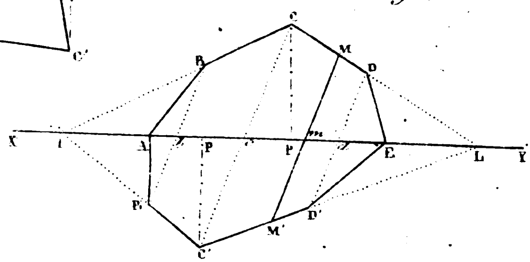


Fig. 204.

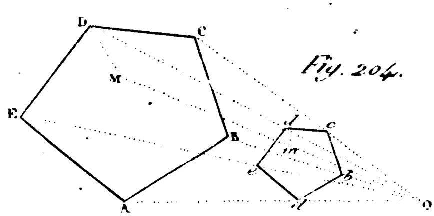


Fig. 205. bis

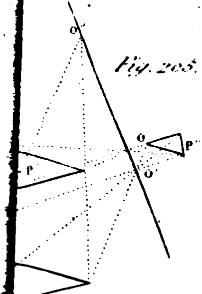
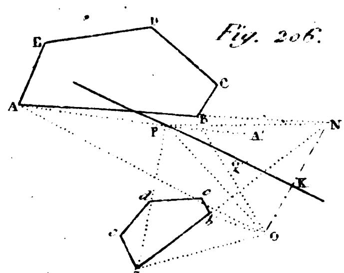


Fig. 206.



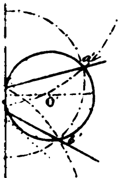
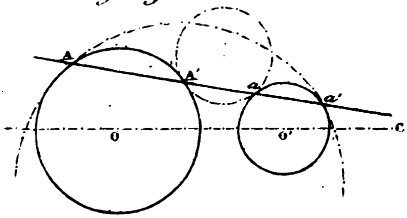


Fig. 209.



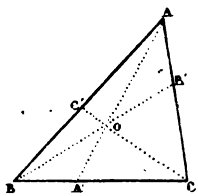
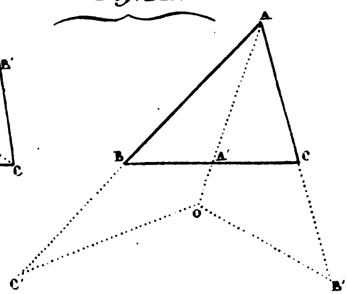


Fig. 211.



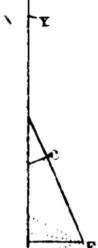


Fig. 215.

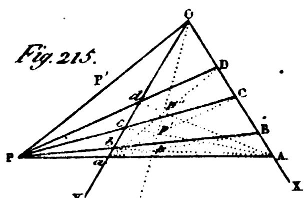


Fig. 219.

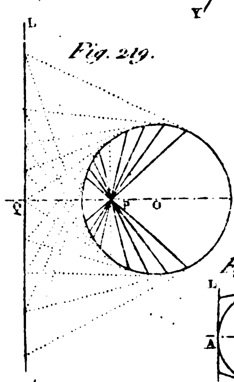


Fig. 219. bis

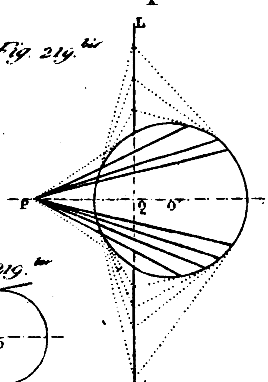


Fig. 219. ter

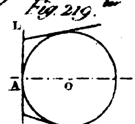


Fig. 222

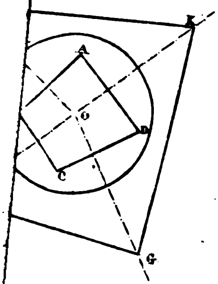


Fig. 223.

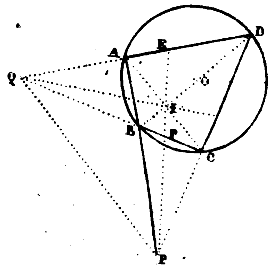


Fig. 226.

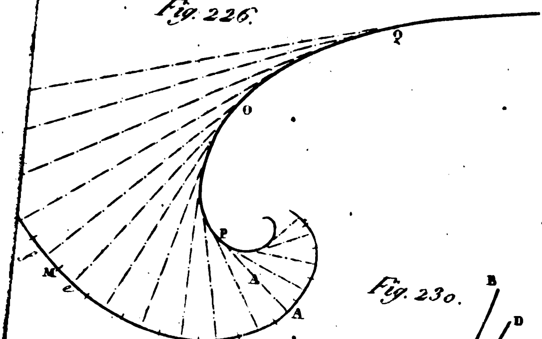


Fig. 230.

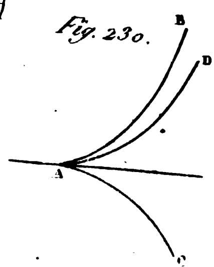
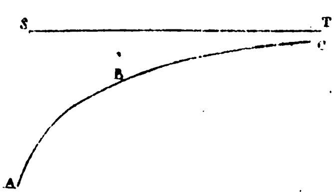


Fig. 231.



6.

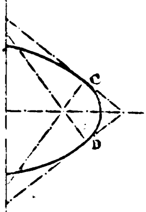


Fig. 237.

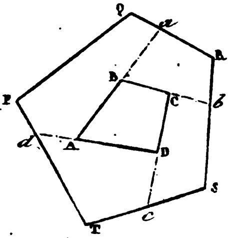


Fig. 238.

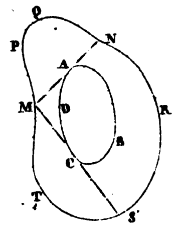
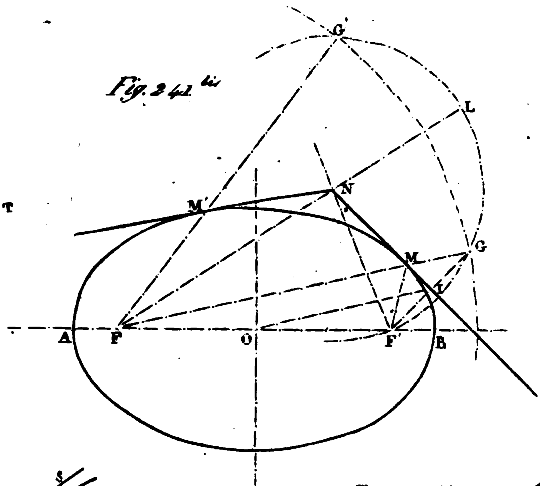


Fig. 241 bis



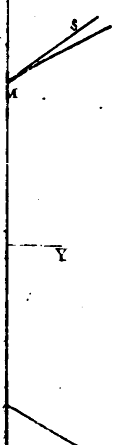
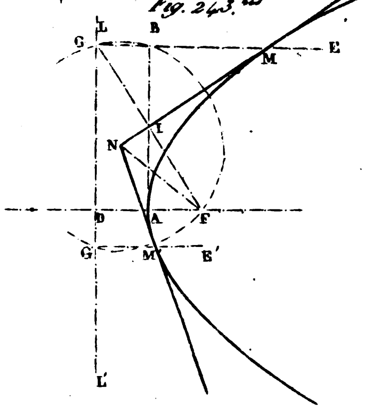


Fig. 243. bis



247.

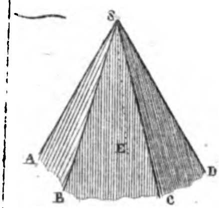


Fig. 248.

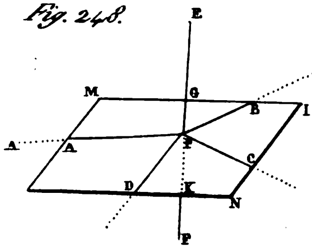


Fig. 252.

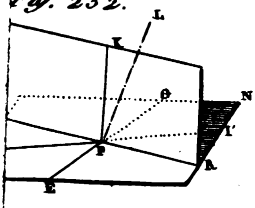
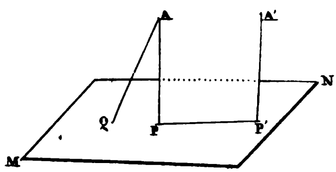


Fig. 253.



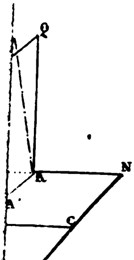
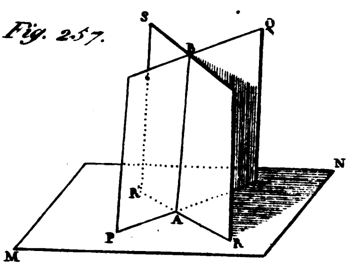


Fig. 257.



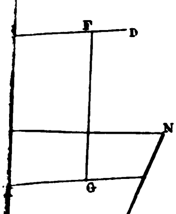


Fig. 262.

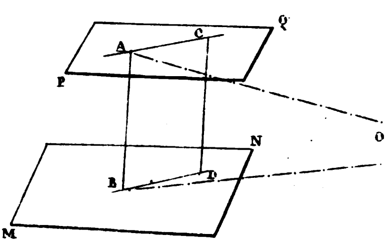


Fig. 267.

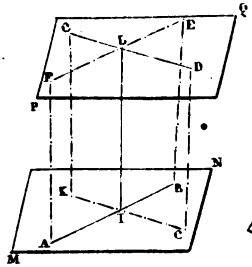


Fig. 268.

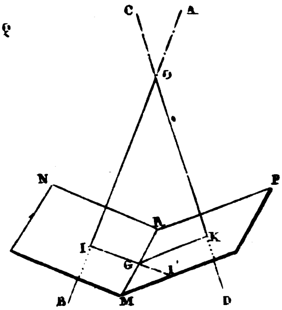


Fig. 272

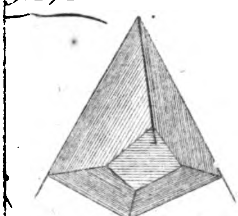
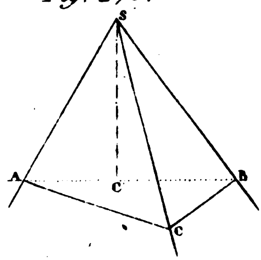


Fig. 273.



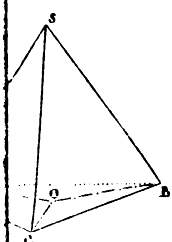
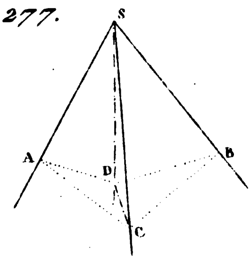


Fig. 277.



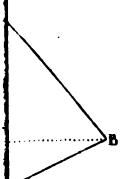


Fig. 285.

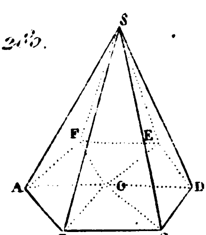


Fig. 286.

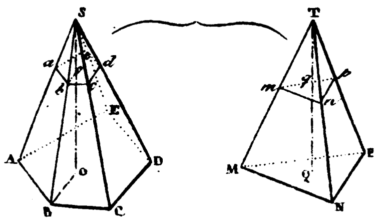


Fig. 291.

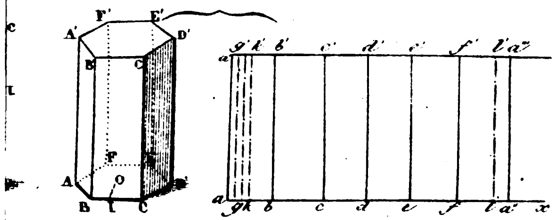


Fig. 296.

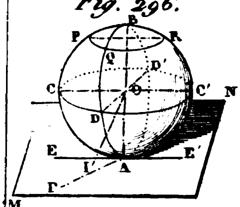
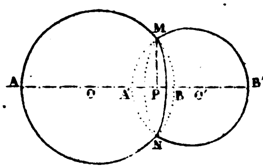


Fig. 297.



. 302.

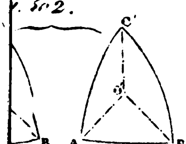


Fig. 303.

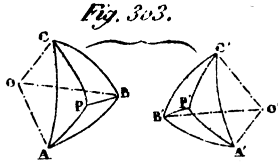


Fig. 307.

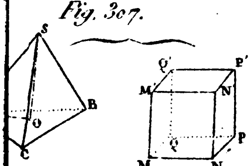


Fig 308.

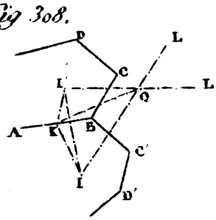


Fig. 312.

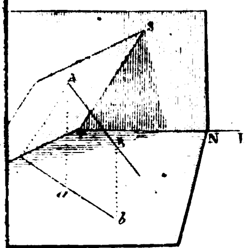


Fig. 313.

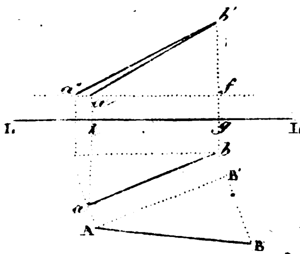


Fig. 318.

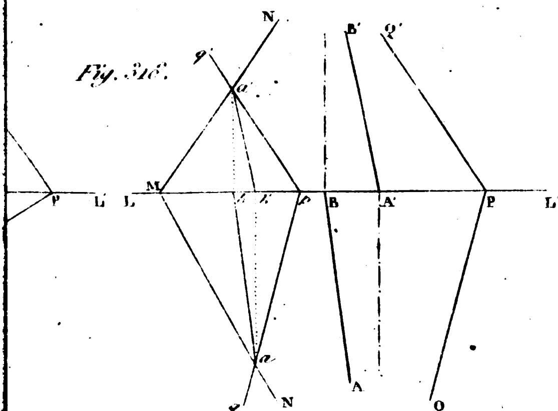


Fig. 322.

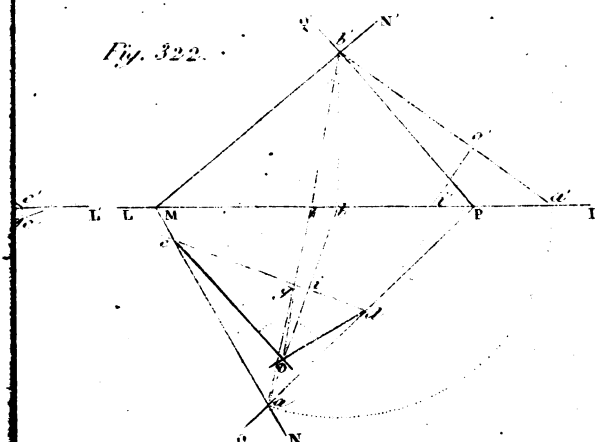
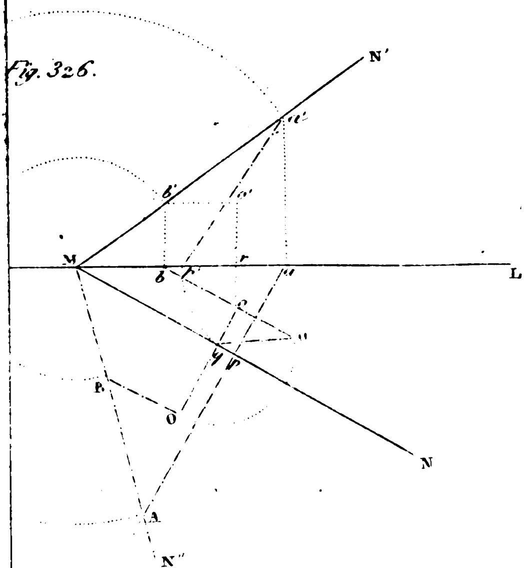
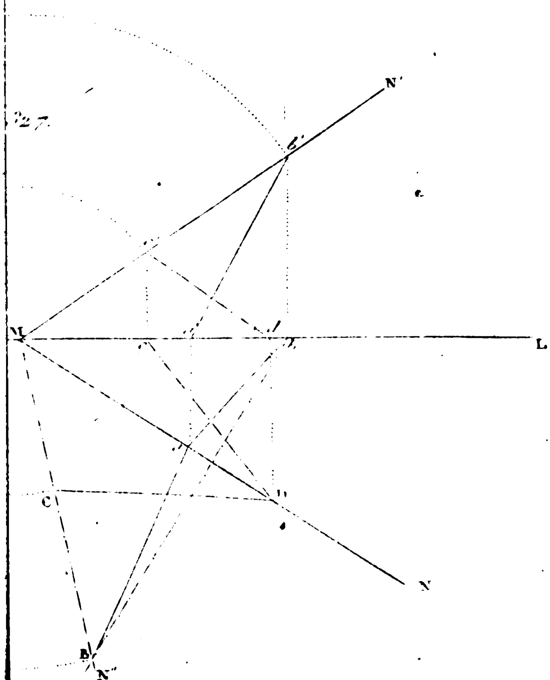


Fig. 326.



327.



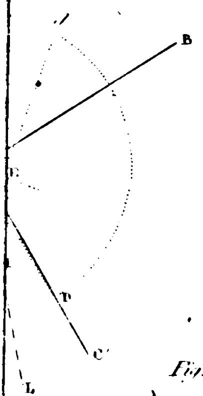


Fig. 331.

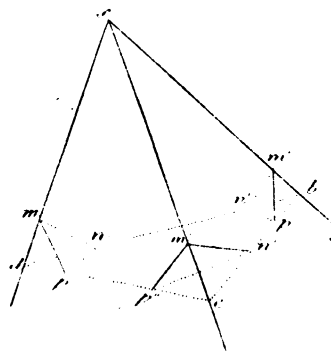


Fig. 335.

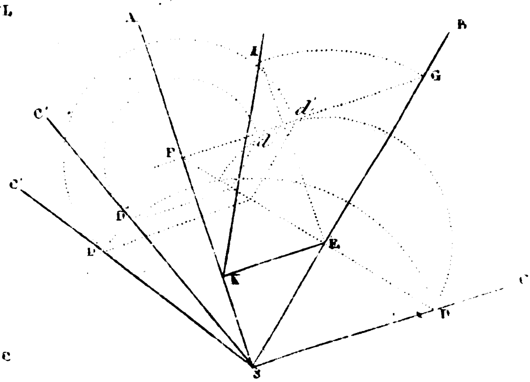


Fig. 332.

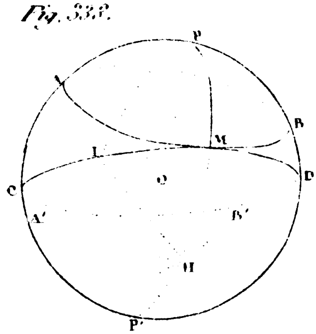


Fig. 342.

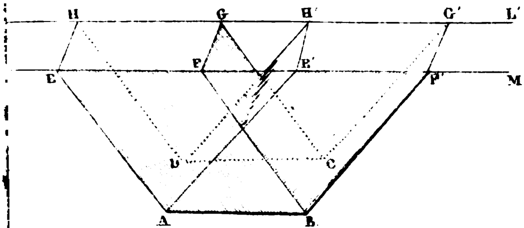


Fig. 345.

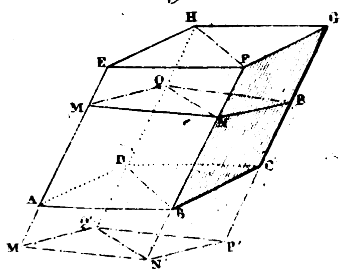


Fig. 349.

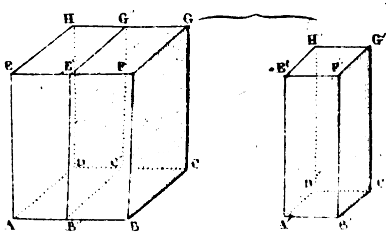
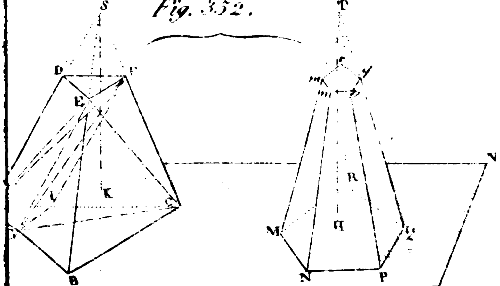


Fig. 352.



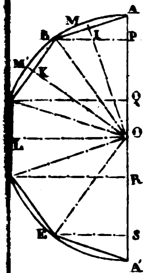


Fig. 356.

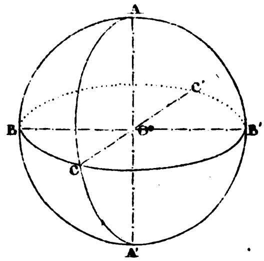
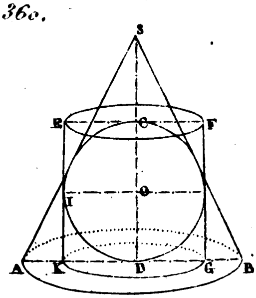


Fig. 360.



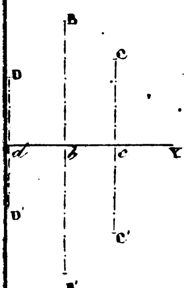


Fig. 365.

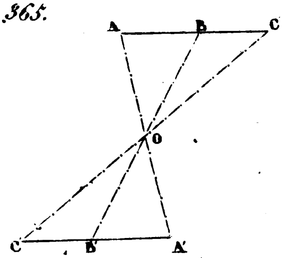
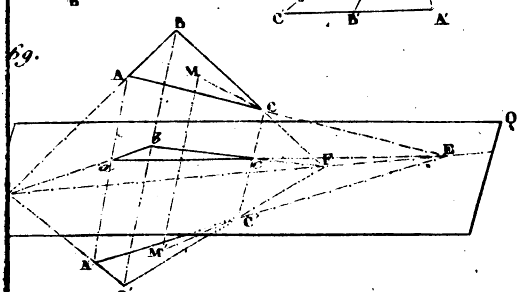


Fig.



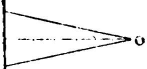
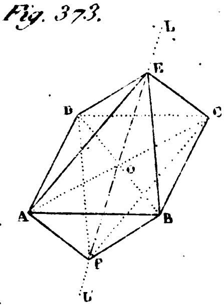


Fig. 373.



378.

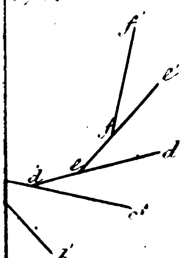
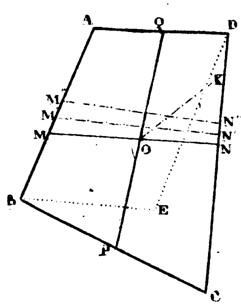


Fig. 379.



y. 384.

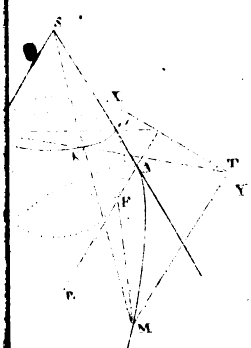


Fig. 385.